УДК 681.513.7

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СОГЛАСОВАННОСТИ[1]

Гуров С.И.
Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, Москва

Поступила в редакцию 10.03.2008, после переработки 06.06.2008.

В рамках бейесовского подхода к статистическим задачам предложен новый метод конкретизации априорного распределения, основанный на принципе, названным «принципом согласованности». Продемонстрировано применение предложенного метода к задаче интервального оценивания параметров биномиального, пуассоновского и нормального распределений.

A new method to specify an *a priori* distribution when using the Bayes approach is proposed based on the consistency principle. This principle is referred to as the *consistency principle*, since it assumes, on the one hand, the uniformity of the *a priori* densities and the likelihood function of the parameter and, on the other hand, the equality of the frequency and Bayes point estimates. The notions of the fiducial Fischer theory are used to determine the class of the *a priori* distributions. Thus, we propose the consistency principle unifying the frequency, Bayes, and fiducial approaches of mathematical statistics. The method is used to solve the problem of interval estimations of the classification error probability in various statistical models (binomial, polynomial, Poisson and normal).

Ключевые слова: математическая статистика, доверительное оценивание параметров, бейесовский подход, априорное распределение.
Keywords: *a priori* distribution, Bayes approach, consistency principle, interval estimation.

1. Введение

Основная трудность применения бейесовского подхода для получения выводов на основе статистического эксперимента состоит в необходимости конкретизации априорного распределения.

При наличии у исследователя результатов аналогичных экспериментов, проводимых ранее, возможно использование того или иного метода восстановления априорного распределения в рамках эмпирического бейесовского подхода. При отсутствии указанных данных такой возможности нет. В этих случаях обычно прибегают к постулату Бейеса (его называют также принципом равновероятности

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проекта 07-01-00211-а).

или законом недостаточного основания Лапласа), который устанавливает, что если ничего не известно о параметре θ, и он изменяется на конечном интервале, то в качестве априорного распределения принимают равномерное. В 1948 г. Г. Джеффрейс расширил постулат Бейеса, предложив т.н. *неинформативное* априорное распределение для неизвестного параметра θ (с плотностью, пропорциональной квадратному корню от определителя информационной матрицы Фишера), однако этот подход применяется и может приводить к новым результатам лишь в случае полубесконечной области изменения θ [15, 11].

Известны и другие способы конкретизации априорного распределения, основанные на использовании принципа наименьшей информативности, понятий субъективной вероятности, функции полезности, доверия и т.д. [3]. Однако применение их весьма ограничено. В [2] рассматриваются методы параметрического оценивания плотностей вероятностей; ими можно воспользоваться для восстановления априорного распределения.

В данной работе предлагается новый принцип конкретизации априорного распределения неизвестной величины θ, определяющей распределение $P_\theta(\xi)$ случайной величины ξ, значения которой наблюдаются в статистическом эксперименте. Принцип состоит в указании (1) некоторого естественного для данной статистической модели класса $\mathfrak{G}_c$ возможных априорных распределений, параметризованного конечномерным параметром γ и (2) метода нахождения значения γ по результатам статистического эксперимента.

Данный принцип мы будем называть *принципом согласованности*, поскольку он полагает, с одной стороны, однотипность априорных плотностей и функции правдоподобия параметра θ, и с другой — равенство его классической частотной и бейесовской точечных оценок. Требование согласованности двух указанных видов представляется вполне естественным. Заметим, что приравнивание частотной и бейесовской оценок применяется в математической статистике при рассмотрении минимаксных точечных оценок и нахождения соответствующего т.н. наименее благоприятного априорного распределения. При определении класса априорных распределений $\mathfrak{G}_c$ используются понятия фидуциальной теории Р. Фишера. Таким образом, предлагаемый принцип согласованности объединяет классический частотный, бейесовский и фидуциальный подходы математической статистики.

Полученное на основе указанного принципа априорное распределение определяет апостериорное, которое и используется для получения статистических решений, в нашей работе — для доверительного оценивания неизвестного параметра θ.

Данный поход в начале был предложен без обоснования в [4] и развит затем в [5, 6].

2. Точечное и интервальное оценивание параметров распределений случайных величин

Данный раздел носит вспомогательно-справочный характер. Здесь также будет приведено важное для дальнейшего определение сопряженного относительно некоторой статистической модели семейства априорных распределений. Все неопределённые понятия и ссылки могут быть найдены в [1, 8, 11, 12, 14].

Рассмотрим модель простого выбора, связанную с однократным наблюдением над случайным элементом ξ, принимающим значения в $\mathcal{X}$ и связанную с ней параметризованную статистическую структуру $\big(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathcal{P}\big)$. Здесь $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ — σ-алгебра событий на $\mathcal{X}$, а $\mathcal{P} = \{P_\theta(\xi), \theta \in \Theta\}$ — параметрическое семейство распределений на $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, где Θ — конечномерное пространство изменения параметра θ.

При проведении n элементарных экспериментов (наблюдений), образуется структура $\big(\mathcal{X}^n, \mathcal{B}(\mathcal{X}^n), \mathcal{P}^n\big)$. $\mathcal{X}^n$, как известно, называют выборочным пространством. Это множество всевозможных значений статистических данных, полученных в ходе выполнения n независимо проведенных единичных наблюдений над случайной величиной ξ. Статистическую структуру мы будем называть по типу распределения ξ (биномиальная, пуассоновская, нормальная и т.д.).

Далее мы полагаем, что $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ и $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$, как в подавляющем большинстве практических задач. Функции распределения мы будем обозначать прописными, а соответствующие плотности (в непрерывном случае) или функции вероятности (в дискретном случае) — строчными буквами: так $p_\theta(\xi)$ есть плотность распределения $P_\theta(\xi)$.

В рамках частотного подхода найдем точечную оценку неизвестного истинного значения θ^*. Известно, что при не очень жестких ограничениях многими "хорошими" статистическими свойствами обладает оценка $\hat{\theta}_L$ максимального правдоподобия (ML-оценка), определяемая как

$$\hat{\theta}_L \;=\; \arg\max_{\theta\in\overline{\Theta}} L(\theta,\, x) \;=\; \hat{\theta}_L(x)\,,$$

где $\overline{\Theta}$ — замыкание множества Θ, а $L(\theta,\, x) \propto p_\theta(x)$ — функция правдоподобия параметра θ для данных $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n) \in \mathcal{X}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ и

$$L(\theta,\, x) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i)\,.$$

Будем далее предполагать существование доверительной области для θ в виде интервала $J(\eta) = (\theta^-(x,\eta),\, \theta^+(x,\eta)) \in \Theta$, где η — коэффициент доверия. Указание на величину η и функциональную зависимость границ интервала будем иногда опускать и использовать обозначение $|J(\eta)| = (\theta^+ - \theta^-)$ для длины интервала $J(\eta)$.

Рассмотрим кратко методику построения неймановских (наиболее селективных), фидуциальных и бейесовских доверительных интервалов. Построение кратчайших доверительных интервалов мы рассматривать не будем, поскольку в большинстве практически важных случаев они совпадают с неймановскими.

В случае, когда $P_\theta(\xi)$ — непрерывное распределение, построение **неймановских** доверительных интервалов основано на следующем утверждении.

Утверждение. *Предположим, что* $(x_1,\, \ldots,\, x_n)$ *— выборка из распределения с непрерывной функцией распределения* $F(\xi \mid \theta) = P_\theta(\xi)$. *Пусть функция* $q(x_1,\, \ldots,\, x_n \mid \theta)$

1) *определена в каждой точке* θ *интервала* $(\theta_1,\, \theta_2)$, *содержащего* θ^*, *и в каждой точке выборочного пространства* $\mathcal{X}^n = \mathbb{R}^n$, *за исключением, возможно, лишь множества вероятностной меры 0,*

2) *непрерывна и монотонно убывает или возрастает по* θ *и*
3) *имеет функцию распределения, не зависящую от* θ.

Если $(q_1,\, q_2)$ *— интервал, для которого* $\mathrm{P}\,\{\, q_1 < q < q_2 \mid \theta \,\} = \eta$, *то при истинном значении параметра* θ, *равном* θ^*, *решения* θ^- *и* θ^+ *(где* $\theta^- < \theta^+$*) уравнений*

$$q(x_1,\, \ldots,\, x_n \mid \theta) \;=\; \begin{cases} q_1 \\ q_2 \end{cases}$$

существуют, и $(\theta^-,\, \theta^+)$ *—* 100η*-процентный доверительный интервал для* θ^*.

Здесь ясно, что если функция $q(x_1,\, \ldots,\, x_n \mid \theta)$ строго монотонна, то интервал $(q_1,\, q_2)$ определяется однозначно.

Пусть функция распределения некоторой точечной оценки $\hat\theta$ есть $F(t \mid \theta)$. Тогда в качестве $q(x_1,\, \ldots,\, x_n \mid \theta)$ можно взять $F(\hat\theta \mid \theta)$. Эту функцию называют неймановским доверительным распределением статистики $\hat\theta$. В качестве $\hat\theta$ можно взять ML-оценку $\hat\theta_L$. Для её функции распределения $F(\hat\theta_L \mid \theta)$ условия регулярности 1) – 3) в вышеприведенном утверждении выполняются почти во всех интересных для практики случаях. Далее, обычно рассматривают центральные интервалы[2], приняв вместо q_1 и q_2 величины P и $1 - P$, где $0.5 \leqslant P < 1$. Тогда η будет равняться $2P - 1$ и границы θ^-, θ^+ неймановских интервалов $J_N(2P-1) = (\theta^-,\, \theta^+)$ определяться как решения уравнений

$$F(\hat\theta_L \mid \theta) \;=\; \begin{cases} P, \\ 1 \,-\, P. \end{cases} \tag{1}$$

Если $P_\theta(\xi)$ — дискретное распределение, то при определении доверительных интервалов возникают неопределенности, связанные с нестрогими неравенствами, появляющимися в (1) вместо равенств. Для снятия этих неопределенностей эффективен прием рандомизации, заключающийся в добавлении к дискретной случайной величине равномерно распределенной непрерывной так, чтобы полученная сумма имела бы непрерывное распределение. В результате рандомизации доверительные интервалы даже укорачиваются[3], но появляются два распределения, по одному из которых определяют верхнюю, а по другому нижнюю границу интервала $J(\eta)$.

Далее мы рассмотрим понятия **фидуциальной** теории Р. Фишера, при этом фидуциальные доверительные интервалы будем также называть фишеровскими. Если в статистической структуре $\big(\mathcal{X},\, \mathcal{B}(\mathcal{X}),\, \mathcal{P}\big)$ и параметрическом семействе $\{P_\theta(\xi),\, \theta \in \Theta\}$, где $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ и $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ функция распределения $F(t \mid \theta)$ статистики s убывает с ростом θ так, что $F^*(t \mid \theta) = 1 - F(t \mid \theta)$, рассматриваемая как функция от θ обладает свойствами функции распределения, F^* называют *фидуциальным распределением* параметра θ.[4] Когда в качестве s используется достаточная статистика, указанные условия обычно выполняются.

[2] Нецентральные интервалы используют в случае, когда есть основания обеспечить разные вероятности нахождения доверительного интервала слева или права от истинного значения определяемой величины.

[3] Неопределенность, связанная с введением дополнительной случайной величины оказывается меньше устраненной неопределенности, связанной с неравенствами.

[4] «Фидуциальное распределение не является распределением вероятности в смысле частотной теории. Это новое понятие, выражающее интенсивность нашей веры в различные возможные значения параметра» [11].

Таким образом, с точностью до мультипликативной константы фидуциальное распределение получается, когда функция правдоподобия $L(\theta, x)$ рассматривается как функция от θ (и здесь θ выступает как случайная величина). Поэтому фидуциальные доверительные интервалы называют также интервальными оценками максимального правдоподобия.

В случае, когда $P_\theta(\xi)$ — непрерывное распределение, границы θ^- и θ^+ фидуциального интервала определяют решением системы:

$$\begin{cases} F(\theta^+ \mid x, \gamma) \; - \; F(\theta^- \mid x, \gamma) \; = \; \eta \,, \\ \\ f(\theta^+ \mid x, \gamma) \; = \; f(\theta^- \mid x, \gamma) \,, \end{cases}$$

где $h(\theta \mid x, \gamma)$ — непрерывная унимодальная плотность апостериорного распределения. Указанные выше условия обычно записывают компактнее: границы θ^-, θ^+ интервала определяются как решения уравнений (1), где в левой части стоит фидуциальная функция распределения $F(\theta \mid x, \gamma)$.

Если $P_\theta(\xi)$ — дискретное распределение, то возникают те же неопределенности, что и в частотном случае. Здесь также появляются два распределения для определения верхней и нижней границ интервала каждое.

Перейдем теперь к рассмотрению **бейесовского** подхода к построению интервальных оценок. Предположим, что задан класс $\{G(\theta \mid \gamma), \gamma \in \Gamma\}$ априорных распределений параметра θ с функциями распределений $G(\theta \mid \gamma)$, где γ — конечномерный параметр из некоторой области Γ. Тогда апостериорное распределение $H(\theta \mid x, \gamma)$ параметра θ находят из соотношения

$$dH(\theta \mid x, \gamma) \, \propto \, L(\theta, x) \cdot dG(\theta \mid \gamma) \,. \tag{2}$$

Отсюда, в частности, видно, что априорная мера может и не быть вероятностной. Этим иногда пользуются на практике, выбирая в качестве априорного т.н. *несобственные распределения*, задаваемые неотрицательной плотностью, интеграл от которой по всему пространству бесконечен (например, плотность постоянна на $\mathbb{R}$). Такой выбор возможен, если полученное апостериорное распределение оказывается собственным, что, впрочем, получается достаточно часто.

Другой способ применения несобственных распределений состоит в следующем [8]. Используют собственное априорное распределение, зависящее от некоторого параметра α. По результатам статистического эксперимента строят апостериорное распределение и затем находят его предельное значение при стремлении α к некоторому предельному значению. Часто полученное предельное распределение параметра θ оказывается собственным, даже если ему не соответствует никакое собственное априорное распределение.

Пусть совокупность всевозможных апостериорных распределений образует множество $\mathfrak{H} = \{H(\theta \mid x, \gamma), \, x \in \mathcal{X}^n, \, \gamma \in \Gamma\}$. Мы считаем функции из $\mathfrak{H}$ дифференцируемыми и строго вогнутыми по θ, что имеет место почти для всех практически важных случаев.

Удобно выбирать априорное распределение из специально подобранного для данной статистической структуры семейства распределений $\mathfrak{G} = \{G(\theta \mid \gamma), \, \gamma \in \Gamma\}$, а именно из т.н. сопряженных семейств распределений. Семейство распределений $\mathfrak{G}$ называется *сопряженным семейством априорных распределений* относительно статистической модели $\bigl(\mathcal{X},\, \mathcal{B}(\mathcal{X}),\, \mathcal{P}\bigr)$ получения статистических данных $x \in \mathcal{X}$, если при выборе в качестве априорного распределения $G = G(\theta \mid \gamma_0) \in \mathfrak{G}$ при любом объеме выборки и любых наблюденных в эксперименте значениях случайной величины апостериорное распределение H также принадлежит $\mathfrak{G}$, т.е. $H = G(\theta \mid \gamma(x,\, \gamma_0)$.

Наличие у данной статистической модели сопряженного семейства априорных распределений связано с существованием для неё достаточной статистики фиксированной размерности для любого объёма выборки и замкнутостью соответствующего семейства относительно умножения. Последнее означает, что для любых $\theta \in \Theta$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ существует $\gamma_3 \in \Gamma$ такое, что

$$g(\theta \mid \gamma_3) \;\propto\; g(\theta \mid \gamma_1) \cdot g(\theta \mid \gamma_2)$$

(для функций распределения это означает, что существует соответствующая свертка).

В свою очередь, достаточные статистики указанного типа, имеются лишь (при выполнении некоторых условий регулярности) у т.н. *экспонентных* распределений, для которых имеет место представление

$$P_\theta(\xi) \;=\; a(\theta) \cdot b(\xi) \cdot \exp\Bigl[\,\sum_{i=1}^{k} g_i(\theta) h_i(\xi)\Bigr].$$

Практически используемые распределения являются, как правило, экспонентными. Исключением является равномерное распределение: оно не экспонентно, поскольку для него не выполняется одно из упомянутых условий регулярности (заключающееся в том, что подмножество $\mathcal{X}$, для которого $p_\theta(\xi) > 0$ не зависит от значения $\theta \in \Theta$). В тоже время равномерное распределение имеет достаточную статистику.

Введенное таким образом понятие сопряженности совпадает с согласованностью в смысле [12] семейств распределений ξ и θ, и класс $\mathfrak{G}$ будет содержать фидуциальные распределения θ. Сопряженными будут, например, семейства бета-распределений относительно биномиальной и отрицательно-биномиальной статистической моделей, гамма-распределений относительно пуассоновской и экспоненциальной моделей, семейства односторонних и двухсторонних распределений Парето относительно равномерных на $(0,\, \theta)$ и $(\theta_1,\, \theta_2)$ моделей соответственно и т.д.

Бейесовской точечной оценкой $\hat\theta_B$ величины θ^* при квадратичной функции потерь $L(\theta^*, x)$ будет математическое ожидание $\mu_H = \mu_H(x,\, \gamma)$ апостериорного распределения. Мы ограничимся рассмотрением именно таких, используемых в подавляющем большинстве практических случаев функций потерь и считать, что

$$\hat\theta_B \;=\; \mu_H \;=\; \hat\theta_B(x,\, \gamma)\,.$$

Заметим, что при функции потерь $L(\theta^*, x) \;=\; |\theta^* - x|$ оценкой будет медиана апостериорного распределения. Если при унимодальной апостериорной плотности распределения $h(x)$ формально принять $L(\theta^*, \arg\max\limits_x\{h(x)\}) \;=\; 0$ и $L > 0$ иначе, то $\hat\theta_B$ будет совпадать с оценкой по *максимуму апостериорной вероятности*. Бейесовская оценка среднего значения нормального распределения при нормальном апостериорном распределении будет равняться апостериорному среднему при любой выпуклой функции потерь вида $L(|\theta^* - x|)$.

Бейесовские доверительные интервалы получают также, как в доверительно-интервальной и фидуциальной теориях, т.е. используя системы вида (1), где в левой части стоит функция апостериорного распределения $H(\theta \mid x, \gamma)$. Также остается справедливым все сказанное относительно случая, когда $P_\theta(\xi)$ — дискретное распределение.

Если в качестве априорного принять равномерное (пропорциональное $d\theta$) распределение, апостериорное распределение будет совпадать с фидуциальным, а бейесовские интервалы (их в этом случае будем обозначать $J(x, \eta, \gamma)$ или $J_B(\eta)$) — с неймановскими и фишеровскими.

3. Принцип согласованности

Принцип согласованности включает в себя два момента. Первый (ПС1) связан с определением класса $\mathfrak{G}_c = \{G(\theta \mid \gamma), \gamma \in \Gamma_c\}$, из которого выбираются априорные распределения.

Для данной статистической модели $\bigl(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathcal{P}\bigr)$ рассмотрим сопряженное семейство априорных распределений $\mathfrak{G} = \{G(\theta \mid \gamma), \gamma \in \Gamma\}$, у которых $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^k$.

Отметим, что обычно $\mathfrak{G}$ включает в себя класс некоторых специальных непрерывных распределений $\{G(\theta \mid \gamma), \gamma \in \Gamma_0\}$ (нормальное, бета-, гамма- и т.д.), встречающихся в математической статистике, и замыкание Γ_0 есть Γ.

С другой стороны, класс $\mathfrak{G}$, очевидно, содержит все фидуциальные распределения $\{F(\theta \mid \gamma), \gamma \in \Gamma_f \subseteq \Gamma\}$ данной статистической модели и область Γ_f соответствует всем таким распределениям.

Среди компонент вектора $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ из Γ_f имеются принимающие дискретные значения. Всегда, например, имеется компонента, соответствующая числу испытаний n. Мы будем формально считать возможным значение $n = 0$ и положим все дискретные координаты вектора $\gamma \in \Gamma_f$ непрерывными в соответствующих областях ограничений. Далее произведем замыкание соответствующей области параметров, включая в рассмотрения несобственные априорные распределения. В результате такого расширения получаем однозначно определенную область Γ_c такую, что $\Gamma_f \subset \Gamma_c \subseteq \Gamma$.

Определяемые областью Γ_c распределения образуют в $\mathfrak{G}$ подкласс, который мы назовем *согласованным семейством априорных распределений* относительно данной статистической модели.

ПС1: *Класс $\mathfrak{G}_c$ является согласованным семейством априорных распределений $\{G(\theta \mid \gamma), \gamma \in \Gamma_c\}$ относительно статистической модели $\bigl(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathcal{P}\bigr)$.*

Полученное по формуле Бейеса апостериорное распределение H будем записывать в виде $H(\theta \mid x, \gamma_1)$, где $\gamma_1 = \gamma(x, \gamma_0)$. Понятно, что если $\mathfrak{H}_c$ — класс всевозможных апостериорных распределений, получаемых в рамках данной статистической модели, то $\mathfrak{H}_c \subseteq \mathfrak{G}_c$.

Ясно также, что класс $\mathfrak{G}_c$ содержит все распределения, плотности которых пропорциональны функциям правдоподобия параметра θ при всевозможных вариантах исходов произвольного числа элементарных экспериментов:

$$dG(\theta \mid \gamma) \propto L(\theta, x), \qquad x \in \mathcal{X}^n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Представляется, что такой выбор класса $\mathfrak{G}_c$ адекватно отражает специфику статистической модели.

Второй момент (ПС2) принципа согласованности указывает способ нахождения параметра γ, конкретизирующего априорное распределение для данной задачи в условиях наблюденных результатов статистического эксперимента. Он определяет, что параметр γ находится как решение оптимизационной задачи

ПС2: $$|\,J(x,\,\eta,\,\gamma)\,| \;\to\; \max\,, \qquad \hat{\theta}_L(x) \;=\; \hat{\theta}_B(x,\,\gamma)\,, \quad \gamma \in \Gamma_c.$$

В случае отсутствия решения, считаем, что в данных условиях принцип согласованности неприменим. Область $\mathcal{X}_c \subseteq \mathcal{X}^n$ в которой решение задачи (ПС2) существует, назовем *областью применимости* принципа согласованности. При сделанных предположениях относительно свойств апостериорных распределений решение, очевидно, будет единственным.

Пусть $x \in \mathcal{X}_c$ и найдено решение γ^* задачи (ПС2). Оно определит плотности априорного $g(\theta\mid\gamma^*)$, и апостериорного $h(\theta\mid x,\,\gamma^*)$ распределений величины θ, обеспечивающие наибольшую величину доверительной области при условия совпадения точечных оценок, полученных в рамках частотного и бейесовского подходов. Это позволяет утверждать, что в сделанных предположениях достоверность (значение коэффициента доверия) справедливости включения $\theta^* \in J(x,\,\eta,\gamma^*)$ будет не менее η при любых γ и x. Полученные доверительные пределы θ^-, θ^+ и сам интервал $J_c(\eta) = J(x,\,\eta,\,\gamma^*)$ будем называть *согласованными.* Ясно, что величина согласованного доверительного интервала будет не больше соответствующего классического $J(\eta)$.

Против применения предлагаемого принципа могут быть выдвинуто возражение, связанное с тем, что часто оцениваемые параметры являются неизвестными, но фиксированными (неслучайными), и поэтому при их нахождении применимы лишь классические частотные методы. Однако, если придерживаться т.н. "субъективного" подхода в статистических задачах оценивания (считать, что априорное распределение является мерой нашего незнания), то применение бейесовского подхода является оправданным [10].

Отметим, что в согласованные доверительные пределы могут совпадать с полученными традиционно. С другой стороны, в некоторых случаях применение принципа согласованности приводит к сокращению доверительных интервалов. Ниже рассмотрены соответствующие примеры.

4. Согласованное интервальное оценивание параметра биномиального распределения

Рассмотрим применение предложенного подхода на примере задачи интервального оценивания неизвестной вероятности числа успехов m в n испытаниях Бернулли: $Bi_m(n,\,p) \;=\; \binom{n}{m} p^m(1-p)^{n-m}$.

Пусть величина ξ, принимающая значения 0 или 1, имеет распределение

$$\mathrm{P}\{\xi = t\mid p^*\} \;=\; Bi_t(1,\,p^*) \;=\; (p^*)^t\,(1-p^*)^{1-t}; \quad p^* \in\,(0,1)\,, \quad t \in\,\{0,\,1\}\,,$$

где p^* — неизвестная, но фиксированная величина, для которой требуется построить интервальную оценку. Как обычно, мы интерпретируем 1 и 0 соответственно как появление или отсутствие некоторого случайного события X в данном эксперименте. Пусть в результате проведения n таких элементарных экспериментов получена выборка $x = (x_1, \ldots, x_n)$. В рассматриваемом случае

$$\mathcal{X} = \{0, 1\}, \quad \mathcal{B}(\mathcal{X}^n) \text{ — булева алгебра } n\text{-мерных двоичных наборов,}$$
$$\theta = p^* = p, \quad \Theta = (0, 1) \subset \mathbb{R}.$$

Обозначим через $\bar{x}$ выборочное среднее $(1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$. Функция распределения $\bar{x}$ есть

$$\mathrm{P}\{\bar{x} \leqslant m/n \mid n, p\} = \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = I_{1-p}(n-m, m+1) =$$
$$= 1 - I_p(m+1, n-m);$$
$$0 \leqslant m \leqslant n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $I_p(a, b)$ — неполная В-функция[5], которая определена для положительных параметров a и b. Заметим, что в нашем случае функция распределения $\bar{x}$ является непрерывной и строго монотонно убывающей по $p = \theta$.

Пусть при проведении n элементарных испытаний событие X наблюдалось m раз. Тогда функция правдоподобия $L(p, x)$ величины ξ есть

$$L(p, x) = p^m (1-p)^{n-m},$$

а ML-оценкой $\hat{p}_L$ величины p будет являться наблюдённое значение величины $\bar{x}$:

$$\hat{p}_L = \bar{x} = \frac{m}{n}.$$

Известно, что эта оценка является несмещенной, эффективной и состоятельной, а несмещенная функция оценки $\widehat{\mathbf{D}}\{\hat{p}_L\}$ её дисперсии есть

$$\widehat{\mathbf{D}}\{\hat{p}_L\} = \frac{m\,(n-m)}{n^2\,(n-1)}. \tag{3}$$

Поскольку распределение ξ дискретно, в рамках классического частотного подхода доверительные интервалы $J = (p^-, p^+)$ с коэффициентом доверия $\eta = 2P - 1$ накрывающие значение p^* определяются как решения следующих уравнений [1]:

$$\begin{cases} I_{p^+}(m, n-m+1) = 1 - P, \\ I_{p^-}(m+1, n-m) = P. \end{cases} \tag{4}$$

Сопряженным семейством априорных распределений будет множество В-распределений $\mathfrak{G} = \{I_p(a, b) \mid \gamma \in \Gamma\}$, где $\gamma = (a, b)$ и $\Gamma = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$. с математическими ожиданиями и дисперсиями

$$\mu_I = \frac{a}{a+b}, \quad \sigma_I^2 = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

[5] бета-функция

Случай $a = b = 1$ соответствует здесь равномерному распределению на $(0, 1)$.

В соответствии с (ПС1) класс $\mathfrak{G}_c$ для данной задачи есть $\{I_p(a, b) \mid \gamma \in \Gamma_c\}$, где $\gamma = (a, b)$ и $\Gamma_c = \mathbb{R}_{\geqslant 1} \times \mathbb{R}_{\geqslant 1}$. Таким образом, плотность некоторого данного априорного распределения p представляет собой B-распределение

$$g(p \mid a, b) \;=\; \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, p^{a-1}(1-p)^{b-1} \;=\; Be_p(a, b); \qquad (5)$$
$$p \in (0,1)\,,\; \gamma \;=\; (a, b) \in \Gamma_c \;=\; \mathbb{R}_{\geqslant 1} \times \mathbb{R}_{\geqslant 1}\,.$$

Плотность вероятности апостериорного распределения будет равняться

$$h(p \mid x, a, b) \;=\; Be_p(m+a,\, n-m+b)\,, \qquad (6)$$

и бейесовская точечная оценка $\hat{p}_B$ параметра p есть

$$\hat{p}_B \;=\; \mu_H \;=\; \frac{m+a}{n+a+b}\,.$$

По плотности апостериорного распределения (6) найдем согласованный доверительный интервал $J_c(\eta) \;=\; (p^-,\, p^+)$ с коэффициентом доверия $\eta \;=\; (P+1)/2$ $(0.5 \leqslant P < 1)$: его границы суть решения уравнений

$$\begin{cases} I_{p^+}(m+a-1,\, n-m+b) \;=\; 1 \,-\, P, \\ I_{p^-}(m+a,\, n-m+b-1) \;=\; P. \end{cases} \qquad (7)$$

Таким образом, задача оптимизации (ПС2) записывается в виде

$$(p^+ \,-p^-) \;\to\; \max\,, \quad \frac{m}{n} \;=\; \frac{m+a}{n+a+b} \;=\; \hat{p}\,, \quad 1 \leqslant a,\, 1 \leqslant b\,, \qquad (8)$$

где p^+ и p^- — решения уравнений (7).

Первое ограничение (равенство частотной и бейесовской оценок) определяет область применимости принципа согласованности: $\mathcal{X}_c$ в данной задаче есть $1 \;\leqslant\; m \;\leqslant\; n-1$. Соответственно, мы исключаем из рассмотрения полное и 0-события (заметим, что в практике доверительного оценивания эти случаи принято рассматривать отдельно [9]). В указанных границах имеем $a = b \cdot m/(n-m)$.

Нетрудно видеть, что условие $(p^+ - p^-) \;\to\; \max$ равносильно $t \;\to\; \min$, где t — такое минимальное натуральное, что t-я производная от $h(p \mid x, a, b)$ в точке $p = 0$ или $p = 1$ не равна 0. Отсюда получаем, что решение оптимизационной задачи (8) есть

$$\begin{cases} a \;=\; 1,\; b \;=\; \dfrac{n-m}{m}, & \text{если } 1 \leqslant m \leqslant \dfrac{n}{2}, \\[2ex] a \;=\; \dfrac{m}{n-m}\,,\; b \;=\; 1, & \text{если } \dfrac{n}{2} < m \leqslant n-1. \end{cases} \qquad (9)$$

Полученное решение полностью определяет плотности априорного (5) и апостериорного (6) распределений. Точечной оценкой $\hat{p}$ истинного значения p^* будет, понятно, относительная частота $\frac{m}{n}$ и для дисперсии этой оценки верна формула (3).

Границы $p^-(\eta)$, $p^+(\eta)$ доверительного интервала $J_c(\eta)$ определяются уравнениями (7). Ясно, что $|J_c(\eta)| \leqslant |J_B(\eta)|$, причем равенство достигается лишь когда $m = n/2$. Например, при $n = 10$, $m = 1$ и $\eta = 0.9$ $(P = 0.95)$ по таблицам [1] имеем:

$$J_B = (0.005, 0.394); \quad J_c = (0.003, 0.238),$$

т.е. длина доверительного интервала сократилась почти на 40% (и сдвинулась в сторону 0). Очевидно, что симметричность плотностей апостериорных распределений при $\hat{p} = 1/2 - r$ и $\hat{p} = 1/2 + r$, $0 < r < 1/2$ повлечет равенство длин доверительных интервалов для этих случаев.[6]

Интересно сравнить полученное значение b с максимально правдоподобным в предположении малого $p = \frac{m}{n}$ $(m \neq 0)$, т.е. когда можно считать, что $a = 1$. Найдем ML-оценку параметра b распределения $Be_p(1, b)$. Функция правдоподобия в этом случае будет иметь вид

$$L(b, x) = b \cdot \Big(1 - \frac{m}{n}\Big)^{b-1}.$$

Нетрудно найти, что её максимум достигается при $\hat{b} = \left(\ln \dfrac{n}{n-m}\right)^{-1}$. Поскольку $b = (n-m)/m$, имеем

$$\frac{1}{\hat{b}} = \ln\Big(1 + \frac{1}{b}\Big) = \frac{1}{b} - \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{3b^3} - \dots,$$

далее, обращая ряд (см., например, [7]) получаем, что

$$\hat{b} = b + \frac{1}{2} - \frac{1}{12b} - \frac{5}{24b^2} - o\Big(\frac{1}{b^3}\Big),$$

т.е. $\hat{b} \approx b + 0.5$ хорошей с точностью: относительная ошибка не превосходит полупроцента при $b \geqslant 4$ (или $\hat{p} \leqslant 1/5$), что достаточно для практических приложений.

Таким образом, согласованная оценка для b в условиях сделанных предположений относительно мало отличается от её ML-оценки. Это отличие будет ещё меньше для длин соответствующих апостериорных интервальных оценок параметра p. Понятно, что аналогичные утверждения справедливы и для a при $b = 1$ и $\hat{p} \approx 1$.

5. Согласованное интервальное оценивание параметров полиномиального распределения

Результаты предыдущего пункта легко обобщаются на случай полиномиальной модели. Последняя является воспроизводящей и при размерности $v = 2$ вырождается в биномиальную.

[6] Для представления точечной оценки вероятностей редких событий в известной монографии [13] было предложено в качестве плотности априорного распределения использовать именно $Be_p(1, b)$ с достаточно большим b, однако не было приведено ни обоснования данному выбору, ни каких-либо указаний на возможный способ определения параметра b. Эта идея Э. Лемана и послужила толчком к проведению нашего исследования.

Функция вероятности $(v-1)$-мерного полиномиального распределения дается формулой

$$p\,(m_1,\,\ldots,\,m_v) \;=\; \frac{m!}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_v!}\,p_1^{m_1}p_2^{m_2}\,\ldots\,p_v^{m_v};$$
$$p_k\in(0,1),\qquad k=\overline{1,v}\,,\qquad \sum_{i=k}^{v} m_k \;=\; m\,.$$

Напомним, что первые моменты полиномиального распределения суть

$$\mu_k \;=\; mp_k,\; k=\overline{1,\,v}\,,$$

а матрица ковариаций —

$$C \;=\; (\mu_{ij})_{i,j=1}^{v-1,\,v-1}\,;\; \mu_{ii} \;=\; mp_i(1-p_i) \quad \text{(дисперсии)};$$
$$\mu_{ij} \;=\; -\,mp_ip_j,\; i\neq j\,.$$

Согласованным семейством априорных распределений здесь будет являться множество $\mathfrak{G}_c=\{Di_{\bar p}(d_1,\,\ldots,\,d_{v-1};\,d_v)\mid\gamma\in\Gamma_c\}$ $(v-1)$-мерных распределений Дирихле с параметрами $d_1,\,d_2,\,\ldots,\,d_v$, имеющих плотность

$$f(\,\bar p\mid d_1,\,d_2,\,\ldots,\,d_v\,) \;=\; \frac{\Gamma(d_1+d_2+\ldots+d_v)}{\Gamma(d_1)\Gamma(d_2)\ldots\Gamma(d_v)}\,\prod_{k=1}^{v}p_k^{d_k-1}$$

в любой точке симплекса $S_{v-1}(\bar x)$ и равную нулю в других точках $\mathbb{R}^v$, где $\bar p=(p_1,\,\ldots,\,p_v)$, $\gamma=(d_1,\,\ldots,\,d_v)$ и $\Gamma=(\mathbb{R}_{\geqslant1})^v$.

Функция вероятности апостериорного распределения будет являться плотностью $(v-1)$-мерного распределения Дирихле

$$Di_{\overline{p}}\,(m_1+d_1,\,\ldots,\,m_{v-1}+d_{v-1};\,m_v+d_v).$$

Условие совпадения точечных частотной и бейесовской оценки вероятностного вектора $\bar p=(p_1,\,\ldots,\,p_v)$ даёт

$$\frac{m_i}{m} \;=\; \frac{d_i+m_i}{d_0+m} \;=\; \widehat{p}_i\,,\quad i=\overline{1,\,v}\,, \tag{10}$$

где $d_0=d_1+\ldots+d_v$. Отсюда

$$d_i \;=\; m_i\,\frac{d_0}{m} \quad\text{и}\quad \frac{d_i}{d_j} \;=\; \frac{m_i}{m_j},\quad i,j\in\{1,\,\ldots,\,v\}\,.$$

Мы считаем, что $0<m_i$ для всех $i=1,\,\ldots,\,v$ (это, очевидно, есть область применимомости принципа согласованности для полиномиальной модели). Используя рассуждения, аналогичные приведенным для биномиальной модели, нетрудно показать (требование $d_0/m\to\min$), что решение оптимизационной задачи, получаемой согласно ПС2 будет следующим.

Пусть

$$\bar m \;=\; \min_{i\in\{1,\,\ldots,\,v\}}\{\,m_i\,\}$$

и данный минимум реализуется на индексах $i_1, \ldots, i_k$. Тогда $d_0 = m/\bar{m}$ и

$$d_i = \begin{cases} 1\,, & \text{если } i \in \{\, i_1, \ldots, i_k \,\}\,, \\ \dfrac{m_i}{\bar{m}}\,, & \text{если } i \in \{\, i_{k+1}, \ldots, i_v \,\}\,. \end{cases}$$

Теперь точечные оценки p_i, $i = \overline{1, v}$ с учетом полученных значений d_i находятся по (10), а интервальные — по (8), где производят замены

$$p \mapsto p_i\,,\; m \mapsto m_i\,,\; a \mapsto d_i\,,\; b \mapsto d_0 - d_i\,.$$

6. Согласованное интервальное оценивание параметра распределения Пуассона

Пусть случайная величина ξ распределена по закону Пуассона, т.е.

$$\mathrm{P}\{\xi = t \mid \lambda^*\} = Po_t(\lambda^*) = \frac{(\lambda^*)^t e^{-\lambda^*}}{t!}\,, \quad t = 0, 1, \ldots\,,$$

где λ^* — неизвестная, но фиксированная величина, для которой требуется построить интервальную оценку. Заметим, что функция распределения $Po_t(\lambda)$ является непрерывной и строго монотонно убывающей по $\lambda = \theta$.

Функция распределения ξ при $\lambda^* = \lambda$ есть

$$\mathrm{P}\{\xi \leqslant t \mid \lambda\} = \sum_{i=0}^{t} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = X^2(2\lambda, 2t+2)\,, \quad t = 0, 1, \ldots\,,$$

где $X^2(x, n)$ — интеграл вероятностей χ^2-распределения с n степенями свободы. Таким образом [1]:

$$Po_t(\lambda) = X^2(2\lambda, 2t+2) - X^2(2\lambda, 2t)\,.$$

Пусть в результате проведения n элементарных экспериментов получена выборка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ значений ξ. Обозначим $m = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Величина m является достаточной статистикой с функцией распределения

$$\mathrm{P}\{m \leqslant t \mid n, \lambda\} = \sum_{i=0}^{t} \frac{(n\lambda)^i}{i\,!}\, e^{-n\lambda}, \quad t = 0, 1, \ldots\,.$$

Обозначим $d = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ и пусть $r_0, \ldots, r_d$ — абсолютные частоты появления чисел $0, 1, \ldots, d$ в выборке x. Тогда функция правдоподобия $L(\lambda, x)$ величины ξ запишется как

$$L(\lambda, x) = \prod_{i=0}^{d} \Big(\frac{\lambda^i}{i\,!}\, e^{-\lambda}\Big)^{r_i} \propto \lambda^m \exp\big(-\lambda n\big) = \lambda^{(m+1)-1} \exp\big(-\lambda n\big)\,. \qquad (11)$$

Легко показать, что максимум $L(\lambda,\, x)$ по λ достигается на значении $\bar{x} = m/n$, т.е. ML-оценка для λ есть

$$\hat{\lambda}_L \;=\; \bar{x} \;=\; \frac{m}{n}\,.$$

Данная оценка является несмещенной и состоятельной. Кроме того, величина $\sqrt{n/\lambda}\,(\bar{x}-\lambda)$ асимптотически имеет нормальное стандартное распределение.

В силу дискретности распределения ξ, в рамках частотного подхода неймановские доверительные интервалы $J = (\lambda^-,\, \lambda^+)$ с коэффициентом доверия $\eta = 2P-1$ накрывающие значение λ^* определяются как решения следующих уравнений [1]:

$$\begin{cases} X^2\,(2n\lambda^-,\, 2m) \;=\; P, \\ X^2\,(2n\lambda^+,\, 2m+2) \;=\; 1 \,-\, P. \end{cases} \tag{12}$$

Перейдем к построению согласованного доверительного интервала для λ^*. Из (11) следует, что $\{g(\lambda \mid \gamma),\, \gamma \in \Gamma_c\}$ есть подкласс Г-распределений $G_\lambda(a,\, b)$ с плотностями

$$g(\lambda \mid a,\, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\lambda^{a-1}\exp(-\lambda b) = g_\lambda(a,\, b)\,, \quad \lambda > 0, \quad \gamma = (a,\, b) \in \Gamma_c = \mathbb{R}_{\geqslant 1}\times\mathbb{R}_{\geqslant 0}\,.$$

В общем случае Г-распределение определено при произвольных неотрицательных параметрах формы a и масштаба b, его математическое ожидание μ_G и дисперсия σ_G^2 суть

$$\mu_G \;=\; \frac{a}{b}\,, \quad \sigma_G^2 \;=\; \frac{a}{b^2}\,.$$

Несобственное равномерное распределение λ на $(0,\, \infty)$ получается как предельное Г-распределение при $a=1$ и $b \to 0$.

В нашей задаче плотность вероятности апостериорного распределения будет

$$h(\lambda \mid x,\, a,\, b) \;=\; g_\lambda(m+a,\, n+b)\,, \tag{13}$$

и бейесовская точечная оценка $\hat{\lambda}_B$ параметра λ есть

$$\hat{\lambda}_B \;=\; \mu_H \;=\; \frac{m+a}{n+b}\,.$$

Из (11), (12) и (13) следует, что границы согласованного доверительного интервала $J_c(\eta) = (\lambda^-,\, \lambda^+)$ с коэффициентом доверия $\eta = (P{+}1)/2$ $(0.5 \leqslant P < 1)$ находятся как решения уравнений

$$\begin{cases} X^2\,(\,2(n+b)\lambda^-,\, 2(m+a-1)\,) \;=\; P\,, \\ X^2\,(\,2(n+b)\lambda^+,\, 2(m+a)\,) \;=\; 1 \,-\, P\,, \end{cases} \tag{14}$$

Таким образом, задача оптимизации (ПС2) записывается в виде

$$(\lambda^+ - \lambda^-) \;\to\; \max\,, \quad \frac{m}{n} \;=\; \frac{m+a}{n+b} \;=\; \hat{p}\,, \quad 1 \leqslant a,\, 0 \leqslant b\,, \tag{15}$$

где λ^+ и λ^- — решения уравнений (14).

Равенство частотной и бейесовской оценок сразу даёт $a = b\cdot m/n$. Условие $a \geqslant 1$ влечет $m \neq 0$, что определят область применимости $\mathcal{X}_c$ метода согласованного оценивания. Далее, нетрудно видеть, что условие $(\lambda^+ - \lambda^-) \to \max$ равносильно максимизации дисперсии апостериорного распределения. Отсюда легко получаем, что решение оптимизационной задачи (15) есть

$$a = 1\,, \quad b = \frac{n}{m}\,,$$

и границы согласованного доверительного интервала с коэффициентом доверия $\eta = 2P - 1$ будут определяться из уравнений

$$\begin{cases} X^2\,(\,2(n + n/m)\lambda^-,\, 2m\,) \,=\, P, \\ X^2\,(\,2(n + n/m)\lambda^+,\, 2m + 2\,) \,=\, 1 \,-\, P. \end{cases}$$

При этом очевидно, что длины согласованных интервалов будут на $100\%/(m+1)$ меньше соответственных бейесовских.

Заметим, что в данном случае интервалы, полученные с использованием постулата Джеффрейса (в полубесконечной области изменения θ априорное распределение следует принять пропорциональным $d\theta/\theta$), совпадают с классическими [11].

Пусть получено $m \neq 0$. Сравним полученное нами b с максимально правдоподобным в предположении $a = 1$. Найдем ML-оценку параметра b распределения $G_\lambda(1,\, b)$ при полученном значении $\lambda = m/n$. Функция правдоподобия в этом случае будет иметь вид

$$L(b,\, x) \,=\, b \cdot \exp\Bigl(-\frac{m}{n}\, b\Bigr).$$

Нетрудно видеть, что её максимум достигается при $\hat{b} = \frac{n}{m} = b$, т.е. в условиях сделанного предположения согласованная оценка для b совпадает с её ML-оценкой.

7. Интервальное оценивание параметров нормального распределения

Рассмотрим задачу доверительного оценивания математического ожидания $\mu = \theta$ нормального распределения $N(\mu,\, \sigma)$ при известной дисперсии σ^2.

Зададимся коэффициентом доверия η и будем считать, что результатом n наблюдений за величиной $\xi \sim N(\mu,\, \sigma)$ является выборка $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n)$. Выборочное среднее $\bar{x}$ есть $(1/n) \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и, как известно, $\hat{\mu}_L = \bar{x}$.

Классически границы доверительного интервала находят, основываясь на том, что распределение $\bar{x}$ есть $N(\mu,\, \sigma/\sqrt{n})$, и, следовательно, случайная величина $(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}/\sigma$ имеет стандартное нормальное распределение $N(0,\, 1)$, свободное (независящее) от параметра μ. В силу этого, искомый доверительный интервал для μ есть

$$(\,\bar{x} \,-\, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, t_\eta,\;\, \bar{x} \,+\, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, t_\eta\,),$$

где t_η — квантиль уровня $(\eta + 1)/2$ стандартного нормального распределения. Таким образом, при данном η длина доверительного интервала полностью определяется значением среднего квадратичного отклонения $\sigma/\sqrt{n}$ нормального распределения выборочного среднего.

Найдем теперь согласованный доверительный интервал. Функцией правдоподобия, соответствующей статистическим данным x будет

$$L(\theta, x) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\Big)^n \exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2\Big] \propto \exp\Big[-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta-\bar{x})^2\Big].$$

В силу этого

$$g(\theta \mid a, b) \propto \exp\Big[-\frac{a}{2\sigma^2}(\theta-b)^2\Big], \quad \gamma = (a, b) \in \Gamma_c = \mathbb{R}_{\geqslant 0}\times\mathbb{R}.$$

Предельное значение $a = 0$ соответствует здесь равномерному на $(-\infty, +\infty)$ несобственному априорному распределению.

По (2) имеем

$$h(\theta, \mid x, a, b) \propto \exp\Big[-\frac{n+a}{2\sigma^2}(\theta-m)^2\Big], \quad \text{где } m = \frac{n\bar{x}+ab}{n+a}.$$

Таким образом, $h = N(m, \sigma/\sqrt{n+a})$.

В соответствии с (ПС2) должно выполняться равенство

$$\hat{\mu}_B = m = \frac{n\bar{x}+ab}{n+a} = \bar{x}.$$

Понятно, что требование $|J(x, \eta, \gamma)| \to \max$ означает максимизацию дисперсии плотности h, или $a \to \min$. Отсюда $a = 0$, вышепреведённое равенство выполняется, плотность апостериорного распределения h совпадает с плотностью распределения выборочного среднего, а согласованный интервал — с классическим.

С другой стороны,

$$L(a, b \mid x) = \exp\Big[-\frac{a}{2\sigma^2}(\bar{x}-b)^2\Big], \quad a \geqslant 0,$$

и $\hat{a} = 0$ является ML-оценкой параметра a.

Аналогично показывается, что и в двух других классических задачах интервального оценивания параметров нормального распределения (σ при известном μ; неизвестных μ и σ) согласованные интервалы совпадают с полученными традиционно. Видимо в силу этих почти очевидных результатов перспективность предлагаемого принципа согласованности не была замечена ранее.

В заключение отметим, что если в рассмотренных нами моделях в качестве априорной невероятностной меры взять предложенное Г. Джеффрейсом неинформативное распределение, то математическое ожидание полученного апостериорного распределения будет совпадать с ML-оценкой параметра. Кроме того, было показано, что (возможно, при принятии некоторых дополнительных естественных предположений) значения оценок параметров априорного распределения, полученные по предлагаемому принципу согласованности, совпадают или почти совпадают с максимально правдоподобными.

Автор выражает глубокую признательность Ю.И. Журавлеву за неизменную поддержку и В.Е. Бенингу за ценные консультации.

Список литературы

[1] Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983.

[2] Бостанджиян В.А. Определение плотности вероятности. Необходимый объем выборки. — М.: Наука, 1971.

[3] Володин И.Н. Бейесовский подход // Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. — С. 38.

[4] Гуров С.И. Оценка надежности классифицирующих алгоритмов. — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.

[5] Гуров С.И. Принцип согласованности и бейесовское интервальное оценивание // Таврический вестник информатики и математики, 2003, № 2. — С. 14-27.

[6] Gurov S.I. Interval estimates of the classification errors based on the consistency principle // Pattern Recognition and Image Analysis: in Mathematical Theory and Applications. Изд.-во МАИК «Наука» / Interperiodica Publishing, т. 14, № 3, 2004. — С. 342-348.

[7] Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1973.

[8] Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974.

[9] Закс Л. Статистическое оценивание. — М.: Статистика, 1976.

[10] Кендал М., Стюарт А. Теория распределений. — М.: Наука, 1966.

[11] Кендал М., Стюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.

[12] Климов Г.П. Теория вероятности и математическая статистика. — М.: Изд. Моск. ун-та, 1983.

[13] Леман Э. Теория точечного оценивания. — М.: Наука, 1991.

[14] Уилкс С. Математическая статистика. — М.: Наука, 1967.

[15] Jeffreys H. (1961) Theory of Probability, Oxford University Press.