Вестник ТвГУ. Серия "Экономика и управление". 2015. № 1, т.2. С. 136–144.

УДК 005.7 : 519.85

ИНСТРУМЕНТЫ ОПТИМИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ РЕСУРСОВ В СИСТЕМЕ ВНУТРИФИРМЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.Н. Бородулин

Тверской государственный технический университет, г. Тверь

Данная работа посвящена рассмотрению теоретических вопросов формализации динамических систем распределения ресурсов, а также прикладных моделей и инструментов их оптимизации на основании адаптации математического аппарата механических принципов движения. Рассматриваемые модели и методы могут быть положены в основу аналитического инструментария хозяйствующих субъектов в различных отраслях деятельности.

Ключевые слова: *математическое моделирование, сети распределения ресурсов.*

Эффективность функционирования систем управления современными предприятиями и организациями во многом определяется уровнем оптимизации движения различных видов ресурсов: материальных, финансовых, трудовых и др**.** Задачи оптимального распределения ресурсов относятся к сложным комбинаторным задачам. В тоже время решение подобных задач требует учета динамического характера используемых моделей, которые должны раскрывать сложный характер влияния внутренних и внешних факторов на целую совокупность также взаимосвязанных исследуемых величин.

В настоящее время законченные теоретические положения существуют лишь для ограниченного ряда постановок подобных задач [1,2]. Основные же результаты современных исследований лежат в плоскости прикладных разработок, направленных на создание эффективных вычислительных методов и специализированных инструментальных средств.

Рассмотрим общую задачу оптимального распределения ресурсов при наличии фазовых ограничений и задании области достижимости, с критерием оптимальности в виде минимума потенциала управления. Допустим, что состояние объекта (хозяйствующего субъекта или проекта) описывается вектором состояний $x(t)$. В момент времени $t=0$ объект находится в состоянии $x(0)=x_0$. За время Т необходимо перевести объект (систему) из состояния x_0 в состояние, принадлежащее некоторому множеству G_T и обеспечить во время перехода объекта из состояния x_0 в какое-либо состояние $x(T)=x_T \in G_T$, т.е. для $t \in [0,T]$ выполнение условия $x(t) \in G$. При этом, очевидно, имеет место также выполнение условий $x(0) \in G,$ а $G_T \subset G$. Если при этом динамика состояния объекта описывается системой дифференциальных уравнений $dx/dt = f(x,\bar{u})$, где $\bar{u}$ – вектор управлений.

В рамках дальнейшего изложения сформулируем некоторые основные критерии классификации известных теоретических постановок и прикладных разработок в области оптимизации движения внутрифирменных ресурсов.

Одним из главных вопросов при классификации задач распределения ресурсов является рассмотрение характеристик множества достижимости GT. Переход системы из состояния $x(0) = x_0$ в состояние $x(T) = x_T \in G_T$ определяется формализованным видом этих состояний. Начальное состояние x0 может задаваться функционалом (вектором, множеством), определяющим первоначальные характеристики операций и распределение ресурсов по операциям или просто его общее доступное количество. В общем случае конечное состояние xT также представляет собой подобный функционал и т.п. Это соответствует некоторому плановому состоянию системы распределения, причем подобный план формируется вне исследуемой модели и «спускается» с более высокого уровня управления. Именно в таком общем виде формализуются задачи распределения ресурсов технологического типа, которые заключаются в определении оптимальной загрузки производственных элементов (предприятий, цехов, технологических линий, оборудования и т.п.) потоками сырья, материалов, готовой продукции и пр. К подобному же типу можно отнести и задачи распределения финансовых ресурсов в рамках непрерывного функционирования хозяйствующих субъектов.

Важным обстоятельством в рассмотрении данного типа задач является именно непрерывный, незавершенный характер распределения ресурсов. То есть подразумевается, что конечное состояние является переходным, например, к следующей фазе производственного цикла, этапу финансового планирования, отчетному периоду и т.п. Собственно это состояние становиться не только целью функционирования исследуемой системы, но и точкой на временной оси, в которой в силу принятого в модели предположения (возможно обусловленного технологическими, экономическими, институциональными факторами реальной системы) возможно наиболее точное получение данных о состоянии всех ресурсов. Таким образом, модель системы распределения ресурсов оперирует целым вектором конечных, а точнее промежуточных состояний, каждое из которых играет роль своеобразного информационного среза, формируемого вне исследуемой системы и характеризуемого с помощью некоторых параметров. В качестве этих параметров, обычно задающих некоторые свойства устойчивости системы на переходных (межплановых) периодах, могут выступать, например, производственные или товарные резервы, показатели ликвидности, платежеспособности и т.п.

Если промежуточные состояния системы характеризуются одними и теми же значениями распределения ресурсов (т.е. система периодически возвращается к некоторому равновесному состоянию) или же параметры этих состояний изменяются по некоторой детерминированной и известной в начальный момент времени зависимости (например, в случае процессов воспроизводства или другого упорядоченного изменения внутреннего продукта), имеют место задачи распределения ресурсов обменного типа. Смысл задач, реализующих обменные схемы, заключается в определении цепочки обменов (обычно задаваемой в виде графа с вершинами –

участниками обменной цепи и дугами – потоками материальных, финансовых и др. ресурсов между ними) оптимальной с точки зрения организатора обмена и согласованной с интересами участников цепочки и существующими ограничениями.

В случаях когда, задача распределения ресурсов решается в условиях строго отведенного временного лимита, при этом конечное состояние системы характеризует логическое завершение функционирование реальной системы, можно говорить о задачах проектного типа. Постановки и методы решения подобных задач рассматриваются в рамках управления проектами – разделе теории управления, где под проектом понимается целенаправленное изменение некоторой системы, осуществляемое в рамках ограничений на время и используемые ресурсы. При этом характерной чертой любого проекта является его уникальность, то есть нерегулярность (неповторимость) соответствующих изменений. Важным обстоятельством при классификации задач распределения ресурсов для проектов является их законченный, безостаточный принцип. В условиях проекта становится актуальным его своевременное завершение, а не нацеленность на долгосрочное функционирование, и как следствие ставится задача определения необходимого уровня потребностей в отдельных видах ресурсов. При этом излишки ресурсов, которые могут возникнуть в процессе выполнения проекта, в общем случае следует считать потерями, а не факторами внутренней устойчивости, в качестве которых они рассматриваются в задачах технологического или обменного типа. Совокупность моделей и методов, ориентированных на решение задач управления проектами, носит название календарно-сетевого планирования и управления. В рамках данной методологии, используя в первую очередь аппарат теории графов, решаются задачи нахождения оптимальной с точки зрения различных критериев (времени, затрат, риска и т.п.) последовательности выполнения операций и распределения ресурсов проекта.

При упрощении временной шкалы, используемой в моделях распределения ресурсов, и приведении ее к порядковому типу, т.е. переходу от календарного или другого абсолютного представления временных моментов и интервалов к простой очередности следования операций, формальные постановки задач полностью лишаются своей стохастической составляющей и зависимости в явной форме от времени. Применительно к задачам распределения материальных ресурсов такого вида обычно используется определение транспортных. Теоретическая и практическая ценность постановок подобных задач для различных научных направлений обуславливает постоянное развитие их математического аппарата и прикладного инструментария исследований. Формализация распределения ресурсов информационного типа используется в задачах исследования структуры социальных групп, определения показателей, отражающих степень их согласованности, внутренней напряженности, взаимодействия. Аналогичный тип задач применяется при моделировании организационных структур с целью оптимизации существующих внутри них информационных и управляющих связей. Важной отличительной особенностью информации в задачах распределения является аппликативных характер ее распространения, допускающий сохранение данных и состояний в различных узлах сети при движении информационных потоков. В то время как распределение материальных (или финансовых) ресурсов происходит на основе конкурентных правил, предполагающих эксклюзивное владение конкретным количеством ресурса одним из узлов (операцией), что в общем случае соответствует законам сохранения движения в механике.

Дальнейшее повышение уровня абстракции при формализации сетей распределения ресурсов сводится к полному отказу от динамической составляющей моделей. Сети подобного типа принадлежат к классу конечных автоматов, который сужен дополнительным условием, которое предполагает запись модели как функции входных переменных. Собственно динамика в таких задачах распределения сводится к изменению значений входных переменных, в случае фиксации которых выходные параметры модели также становятся константами, что делает используемые формальные постановки статическими.

Начальным этапом формализации динамических систем движения ресурсов в системе управления является определение понятия операции. В общем смысле операция может характеризовать не только действие по перераспределению, но и место или объект накопления ресурсов. Пусть состояние системы (хозяйствующего субъекта, технологической или транспортной сети, проекта и т.п.) обусловлено выполнением $i = 1, \ldots, n$ операций. Множество переменных x_i, задающих состояние отдельных операций, в таком случае образуют фазовое пространство R^n. Для каждой операции задано ее начальное состояние x_{i0}, конечное состояние x_{iT} и зависимость скорости операции от количества ресурсов, выделенных для ее осуществления (в случае операции-действия) или скорости потоков изменения количества используемых ресурсов (для операции-накопителя). Требуется определить распределение $\overline{u}(t)$, удовлетворяющее общему ограничению на ресурсы – b, при котором все операции будут выполняться т.е.:

$$\begin{cases} F(u_i) \to \min, \\ dx_i/dt = f_i(u_i), \\ x_i(t) \in G_i \subset R^n, \\ x_i(0) = x_{i0} \in G_i, \\ x_i(T) \in G_{iT} \subset G_i, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(t) \le b, b \ge 0, \\ i \in [1, n], t \in [0, T]. \end{cases} \tag{1}$$

Для приведенной формальной постановки задачи распределения ресурсов в виде (1) законченная теория существует для случая независимых операций. Для критерия линейной комбинации моментов t_i (минимизация упущенной выгоды) существуют как точные, так и приближенные методы решения, в основном для линейных зависимостей $f_i(u_i)$ [2]. Для случая, когда скорость операции зависит не только от количества ресурсов на ней, но и от состояния операции при условии линейного характера функций, описывающих динамику состояния системы, подобные задачи могут быть решены методами, основанными на аппарате математического программирования [3]. Однако, несомненно, больший практический интерес представляют собой ситуации, когда состояние системы движения ресурсов обусловлено наличием временных, структурных и различных количественных ограничений на возможные в ней операции.

Привлекательным с точки зрения уменьшения размерности решения задач распределения ресурсов можно считать получение оптимального управления в форме вектора независящих от времени входных параметров. При этом размерность такого вектора должна быть соизмерима с размерностью задачи, т.е. количеством фазовых переменных, определяемым множеством ресурсов и/или операций, а также связей между ними. Возможность приведения части динамической задачи к статическим характеристикам в общем случае может рассматриваться как процедура нормирования. Статическая форма параметров в таком случае является наиболее удобной для осуществления как плановых, так и контрольных расчетов.

Рассмотрим вариант формального описания задачи распределения ресурсов в системе управления на основе принципа наименьшего действия Гамильтона и аппарата вариационного исчисления, широко используемого в исследовании динамики механического движения. Введенное в постановке (1) понятие операции связывает состояние исследуемого типа систем с распределением по ним некоторого множества ресурсов $x_i, i=1,...n$. При этом пространство R^{2n} координат $(x_i, \dot{x}_i)$ будет являться фазовым пространством координат системы распределения ресурсов, а движение системы будет полностью задаваться геометрическим местом точек в этом пространстве, т.е. фазовой траекторией. Длина фазовой траектории системы для постановки задачи (1) из начального состояния (t=0) в конечное (t=T) может быть определена в виде функции координат x_i, которые в свою очередь являются функциями времени и задают распределение ресурсов по операциям $(i=1,...n)$:

$$F(x_i) = \int_{t=0}^{T} L(x_i, \dot{x}_i, t)dt, \tag{2}$$

где F – действие системы,

L – функция Лагранжа (лагранжиан) такая, что действие F имеет наименьшее значение из всех возможных. При стремлении системы к минимальному действию на основании экстремальных преобразований значение лагранжиана находят из дифференциального уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \tag{3}$$

Характеристическим свойством систем движения ресурсов является наличие двух полюсов распределения: источников и получателей (с возможными вариантами в виде: производства и потребления, пассивов и активов и т.п.). Динамические свойства этих полюсов описываются соответствующими членами уравнения (3). Формализм Лагранжа дает возможность полностью описать движение системы распределения ресурсов, т.е. получить состояния ее операций (величину сосредоточенных внутри них ресурсов) в любой момент времени. Однако явная зависимость лагранжиана не только от состояния операций, но и от скоростей их изменений приводит к необходимости решения для сети из n операций системы из такого же количества дифференциальных уравнений второго порядка и не соответствует искомой нами форме однозначного описания системы распределения ресурсов с помощью статических значений фазовых переменных.

Введем специальную обобщенную переменную, называемую в механике обобщенным импульсом: $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i$, а также специальную функцию Гамильтона H (гамильтониан), такую что $H = -\partial F / \partial t$.

Физическое смысл импульса, для простейшего случая движения точки в стационарном потенциальном поле, интерпретируется как количество движения, т.е. произведение массы и скорости точки. В экономической системе этому понятию соответствует цена распределения ресурсов на некотором совершенном рынке. «Совершенство» рынка в данном случае соответствует системе с гомогенными связями, то есть сети, где перераспределение ресурсов происходит по каналам с однородными характеристиками, в результате чего все операции, общее число которых достаточно велико, имеют в такой сети (на рынке) равные возможности получения любого вида ресурсов. В общеэкономическом смысле принцип наименьшего действия отражает состояние рыночного равновесия, когда уровень спроса соответствует предложению [5]. Для записи уравнений Лагранжа в форме Гамильтона используется преобразование Лежандра, в результате получают канонические уравнения Гамильтона [4].

В то время как лагранжиан является функцией координат и скоростей, гамильтониан зависит от координат и импульсов (канонических переменных). В рамках гамильтоновой механики оказывается возможным найти общее решение уравнений движения системы распределения ресурсов, удовлетворяющее произвольным начальным условиям и получить по сути не одну траекторию (совокупность состояний системы при фиксированных условиях), а их множество, в котором содержится описание всех возможных состояний. Для нахождения всех возможных состояний сети распределения ресурсов из n операций на базе формализма Гамильтона потребуется 2n начальных условий для фазовых координат (x_i, p_i) и решения 2n дифференциальных уравнений первого порядка, что выгодно отличает эту форму от использования формализма Лагранжа, требующего решения уравнений второго порядка.

Механический смысл импульса связывает его со скоростью движения и некоторой мерой инертности (массой). В рассматриваемых нами условиях сети распределения ее узлы (операции) находятся в рамках порядковой шкалы $(i = 1, \ldots, n)$ и, следовательно, могут считаться равноудаленными друг от друга. Однако возможности по перемещению ресурсов между узлами сети в единицу времени могут быть различны. Таким образом, вместо скорости, являющейся функцией по времени, можно использовать постоянное значение пропускной способности между отдельными узлами сети. В качестве аналога массы в механическом движении следует исходить из определения свойства инертности, т.е. обеспечения постоянной величины скорости, а в случае сети распределения, постоянной (максимально возможной) пропускной способности потоков ресурсов. Считая все потоки направленными связями, подобное свойство должно характеризовать потенциальные возможности одного из узлов передать, а другого принять ресурсы.

Потенциал начального узла потока в текущей момент времени будет определяться как разница количества находящегося в нем ресурса и некоторой величины, характеризующей минимально возможный уровень для передачи в конечный узел. Потенциал же последнего будет аналогично задаваться разницей максимально возможного и текущего уровня. Объем передаваемого в рамках каждого потока в сети ресурса будет минимальным значением одной из трех величин: потенциала начального узла, потенциала конечного узла и пропускной способности самого потока.

Таким образом, в сети движения ресурсов в системе управления для каждого потока может быть поставлен в соответствие вектор (упорядоченное множество) констант, характеризующий динамику импульса данного потока. Данный вектор будет определять статические управляющие воздействия (управления) в сети распределения и может иметь произвольную размерность в зависимости от исследуемых свойств системы (для рассмотренной выше постановки задачи он задавался тремя элементами). Очевидно, что осуществление подобных управляющих воздействий в реальных системах управления будет требовать некоторых затрат, например, на обеспечение пропускной способности потока, поддержание нормативного уровня запаса ресурсов и т.п. Следовательно, может быть задан и некоторый вектор цен на поддержание функционирования сети распределения, соответствующий размерности ранее определенного вектора управлений. В результате можно сформулировать следующую задачу оптимального управления в сети распределения ресурсов по множеству связанных операций:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{ij} \to \min, \\ dx_i/dt = \sum_{j=1}^{n} h_{ij}(x_i, x_j, u_{ij}), \\ x_i(t) = x_T \in G_i \subset R^n, \\ x_i(0) = x_{i0} \in G_i, \\ x_i(T) = x_{iT} \in G_{iT} \subset G_i, \\ i \in [1, n], t \in [0, T]. \end{cases} \tag{4}$$

где u – вектор управлений (нормативных характеристик) потоков ресурсов;

a – вектор цен (затрат) на поддержание нормативного уровня соответствующих управлений;

h – функция, задающая объемы потоков ресурсов между узлами сети в зависимости от характеристик установленных для них управлений.

Исходя из ранее проведенных рассуждений в постановке (4) в явном виде отсутствует зависимость состояний системы распределения ресурсов от координат обобщенного импульса p_i. Вместо нее введены функции объемов потоков h_{ij}, связанные с импульсом через скорость потока и потенциалы соединяемых узлов, определяющих меру инертности движения ресурсов.

Смысл оптимизации управления для случая связанных операций в системах движения ресурсов, таким образом, заключается совсем не в первоначальном распределении ресурсов по операциям, с целью их наиболее эффективного расходования и достижения системой конечного состояния. Ввиду того, что сами начальные и конечные состояния задаются особенностями функционирования системы (плановыми значениями, показателями отчетности и т.д.), их параметры уже входят в условия задачи в виде соответствующих множеств достижимости. В итоге целевая функция задачи определяет сумму дополнительных затрат, необходимых для обеспечения наиболее точного достижения конечного состояния сети распределения (плана), путем задания нормативных значений характеристик отдельных потоков. Причем важна именно точность достижения (выполнения плана), а не скорость или низкие потребности в исходных ресурсах.

Вопросы практического применения рассмотренного подхода могут быть затруднены сложностью формализации вектора управлений и соответствующего ему вектора затрат. Однако то обстоятельство, что оба этих вектора в форме статических параметров определяют уравнения движения динамической системы, является значительным преимуществом в решении задачи распределения ресурсов, которая в исходной формулировке может быть сведена к системе дифференциальных уравнений второго порядка.

Прикладное значение полученных результатов в общем контексте методов динамического моделирования заключается в разработке подхода, который можно определить как управление потоками с помощью потенциалов в виде некоторого накопленного количества ресурсов (материальных, финансовых, трудовых и др.). Накопленные ресурсы в таком контексте будут представлять собой резервы для устранения нежелательных процессов и состояний в процессе функционирования экономической системы.

Список литературы

1. Бурков, В.Н. Как управлять организациями. / В.Н. Бурков. М.: Синтег, 2004. 400 с.
2. Воронин, А.А. Математические модели организаций / А.А. Воронин, М.В. Губко, Д.А. Новиков. М.: ЛЕНАНД, 2008. 360 с
3. Заложнев, А.Ю. Модели и методы внутрифирменного управления / А.Ю. Заложнев. М.: Сторм Медиа, 2004. 320 с.
4. Могилевский, В.Д. Формализация динамических систем / В.Д. Могилевский. М.: Вузовская книга, 2005. 216 с.
5. Царев, И.Г. Физико-математические аналогии в экономике / И.Г. Царев. М.: ФГУП ЦПП, 2005. 215 с.

OPTIMIZATION INSTRUMENTS OF RESOURCES MOVEMENT IN INTERNAL MANAGEMENT SYSTEM

A.N. Borodulin

Tver State Technical University, Tver

The article analyses theoretical problemsconcerning theformalization of dynamic systems of resource allocation. The author considers applied models and optimization methods on the basis of mathematical instruments adaptation for mechanic movement principles. The models can become an analytic base for economic entities in different sectors.
Keywords*: mathematical modeling, networks of resources distribution.*

Об авторе

БОРОДУЛИН Алексей Николаевич – кандидат технических наук, доцент, Тверской государственный технический университет, кафедра «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», e-mail: bor74@mail.ru

About the author

BORODULIN Aleksej Nikolaevich – Philosophy Doctor in Engineering, Associate Professor, Tver State Technical University, Tver, Department of Accounting, Analysis and Auditing. e-mail: bor74@mail.ru

References

1. Burkov, V.N. Kak upravljat' organizacijami. / V.N. Burkov. M.: Sinteg, 2004. 400 s.
2. Voronin, A. A. Matematicheskie modeli organizacij / A.A. Voronin, M.V. Gubko, D.A. Novikov. M.: LENAND, 2008. 360 s
3. Zalozhnev, A.Ju. Modeli i metody vnutrifirmennogo upravlenija / A.Ju. Zalozhnev. M.: Storm Media, 2004. 320 s.
4. Mogilevskij, V.D. Formalizacija dinamicheskih sistem / V.D. Mogilevskij. M.: Vuzovskaja kniga, 2005. 216 s.
5. Carev, I.G. Fiziko-matematicheskie analogii v jekonomike / I.G. Carev. M.: FGUP CPP, 2005. 215 s.
6.