

МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ ДЛЯ ОПЦИОНОВ НА ОСНОВЕ ПОЛУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК

Малиновский С.В., Назаров Л.В.

лаборатория статистического анализа, кафедра математической статистики,
факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, Москва
(s_malinovsk@mail.ru, nazarov@cs.msu.su)

Поступила в редакцию 21.01.2009, после переработки 25.01.2009.

В работе предложена методология получения полупараметрических оценок стохастического времени для опционов. На основе полученных оценок предлагаются две новые модели стохастического времени, описывающие динамику уровня деловой активности при помощи неоднородного негауссовского процесса Орнштейна-Уленбека и «экспоненциально-пуассоновского» процесса соответственно. На основе нескольких информационных критериев устанавливается, что предложенные модели лучше отвечают эмпирическим опционным структурам, что ряд известных аналогов.

In the paper a new semiparametric methodology of estimation of stochastic time for options is proposed. Based on the estimates produced, two new models of stochastic time for options are introduced. Inhomogeneous non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process and «exponential Poisson» process are used to model the business rate activity. Using several information criteria it is established that the proposed models are more adequate to the empirical options structures than some of well-known competitors.

Ключевые слова: стохастическая замена времени, процессы Орнштейна-Уленбека, оценивание опционов.

Keywords: stochastic time change, Ornstein-Uhlenbeck processes, option pricing.

1. Введение

Метод стохастической замены времени получил широкое распространение в современной финансовой математике. Суть данного метода применительно к оценке опционов состоит в следующем. Рассматривается некий процесс Леви $X(t)$ (такой, что $E \exp(X(t)) < \infty$), который подчиняется (по Бохнеру) некоторому неубывающему (п.н.) семимартингалу $T(t)$. Процесс $T(t)$ выбирается стартовым из нуля (п.н.) и имеет смысл стохастического, или операционного времени (данные термины в дальнейшем будут использоваться нами как эквивалентные). Дисконтированный процесс цены $Z(t)$ определяется в виде

$$Z(t) = M(T(t)),$$

где $M(t)$ - экспоненциальный мартингал вида $\exp[X(t) + \mu t]$ (где μt - соответствующая «поправка на выпуклость»). Процесс $T(t)$, как правило, задается в виде

$$T(t) = \int_0^t v(u) du, \quad (1)$$

где $v(u)$ - неотрицательный (п.н.) случайный процесс, имеющий смысл уровня деловой активности в момент времени u .

Как правило, однако, конкретная спецификация процесса $T(t)$ постулируется из общих соображений реалистичности свойств порождаемых ей траекторий и возможности получить аналитическое выражение для преобразования Лапласа данного процесса ([8], [4], [2], [11]). В части 4 данной работы мы предлагаем методологию извлечения информации об операционном времени из эмпирических цен опционов на основе полупараметрических оценок. На основе полученных результатов в частях 5 и 6 мы предлагаем две новые модели операционного времени для опционов.

2. Общие сведения и предпосылки

Мы предполагаем, что рыночная неопределенность представляется в виде фильтрованного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T^*]}, \mathbb{P})$, удовлетворяющего обычным условиям. Мы предполагаем также, что существует хотя бы одна эквивалентная мере \mathbb{P} мартингальная мера \mathbb{Q} , т.е. мера, по которой процесс дисконтированной цены базового актива (индекса S&P500) является мартингалом.

Мы рассматриваем модель рынка с возможностью торговли в непрерывном времени и без операционных издержек. Непрерывно начисляемая безрисковая ставка $r \geq 0$ предполагается нами постоянной.

Обозначим процесс цены рассматриваемого актива $S(t)$, $t \in [0, T^*]$. При сделанных предположениях цена $P(T, f; t)$ в момент времени t условного требования, обеспечивающего своему держателю выплату в размере $f(S_T)$ в момент времени T , определяется в виде ([10]):

$$P(T, f; t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} f(S_T),$$

где математическое ожидание берется по мере \mathbb{Q} .

Для вычисления теоретических цен европейских опционов мы пользуемся методом, использующим обобщенные преобразования Фурье функции выплат $f(x)$ и процесса логарифмической доходности $\ln \frac{S(T)}{S(0)}$ ([5], [12]). Более конкретно, после нормировки (приведения цены в нулевой момент времени к единице) мы вычисляем цену европейского опциона «колл» по следующим формулам (основанным на формуле (5) из [5]):

$$c(k, T) = \frac{\exp(-\beta k)}{\pi} \int_0^\infty e^{-ivk} \psi_T(v) dv, \quad (2)$$

$$\psi_T(v) = \frac{e^{-rT} \varphi_T(v - (\beta + 1)i)}{\beta^2 + \beta - v^2 + i(2\beta + 1)v},$$

где $c(k, T)$ - цена европейского опциона «колл» с ценой исполнения $K = e^k$ и сроком до исполнения T , $\varphi_T(v)$ - обобщенное преобразование Фурье распределения логарифмической доходности базового актива в момент времени T , а β - произвольная положительная константа, такая, что $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T^{\beta+1}] < \infty$. К сожалению, мы не имеем возможности более подробно изложить детали нашей реализации алгоритма вычисления цен опционов.

3. Описание используемых данных

Для дальнейшего опишем используемый нами набор данных. Мы используем данные о ценах закрытия торгуемых на Chicago Board of Options Exchange (СВОЕ) европейских опционов на индекс S&P500 со сроками до исполнения от девяти дней до трех лет на следующие даты: 11.10.2007 г., 08.11.2007 г., 13.12.2007 г., 10.01.2008 г., 07.02.2008 г., 13.03.2008 г., 10.04.2008 г., 08.05.2008 г., 12.06.2008 г., 10.07.2008 г., 07.08.2008 г., 11.09.2008 г. (обозначим их t_1, t_2, \dots, t_{12} соответственно). Помимо стремления к новизне используемых данных, выбор именно этих дат был обусловлен соображениями полноты их информационного содержания. Именно, мы были заинтересованы в исследовании опционных структур с как можно более широким диапазоном сроков до исполнения (в том числе и в особенности, с как можно более короткими), поэтому для каждого месяца с октября 2007 г. по сентябрь 2008 г. включительно мы выбрали дату, предшествующую дате исполнения опционов в этом месяце и отстоящую от нее на девять календарных дней. Ценообразование опционов с более короткими сроками до исполнения подвержено сильному влиянию специфических «факторов последней недели», в связи с чем исключение их из рассмотрения стало стандартной практикой (см., напр., [11]), поэтому есть основания считать вышеперечисленный набор дат оптимальным с точки зрения диапазона соответствующих им сроков до исполнения, а следовательно, и полноты информационного содержания соответствующих им данных.

Для отсева данных о неликвидных опционах мы применили к имеющимся у нас «сырым» данным несколько «фильтров» и в результате для каждой из дат t_i мы получили «очищенный» набор из, как минимум, 275 пар цен спроса и предложения европейских опционов «колл» и «пут» с девятью различными сроками до исполнения. Обозначим «торгуемые» в день t_k сроки до исполнения $T_j(t_k)$, $j = \overline{1, 9}$. В качестве единой цены опциона мы используем среднее арифметическое цен спроса и предложения данного опциона.

4. Полупараметрическая оценка операционного времени

В своей работе мы задались целью извлечь содержащуюся в эмпирических ценах опционов информацию об операционном времени, минимизировав зависимость получаемых оценок от каких-либо конкретных спецификаций операционного времени и базового процесса. Поскольку операционное время является величиной ненаблюдаемой, решение этой задачи требует специальной методологии. В общем виде предлагаемый нами метод выглядит следующим образом.

Рассмотрим произвольный процесс Леви $X(t) \equiv X(t; \Theta)$, такой, что $\mathbb{E}e^{X(t)} < \infty$ при любых Θ из допустимого множества (в дальнейшем мы будем называть

Θ также *структурными* параметрами процесса). На основании любого такого процесса можно определить экспоненциальный мартингал вида

$$Z(t) = e^{X(t)+\mu t}, \mu - const, \quad (3)$$

который может быть использован в качестве модели дисконтированного процесса цены. Такой подход к моделированию динамики цен активов получил широкое распространение в литературе (см., напр., [3], [13]). Калибровка модели такого рода является первым шагом нашей методологии. На втором шаге мы фиксируем полученную на первом шаге оценку структурных параметров $\hat{\Theta}$ и, принимая ее в качестве истинного значения Θ , для каждого срока исполнения опционов на рассматриваемую дату, находим «операционный эквивалент» данного срока до исполнения - величину, оптимально отвечающую ему в смысле близости порождаемых ей, взятой в качестве срока исполнения, теоретических цен ценам, наблюдаемым на практике. Иными словами, оценив и зафиксировав «структурные» параметры модели, мы делаем свободными параметрами сроки до исполнения и изучаем получающиеся в результате калибровки по ним наборы величин. Результаты второго шага калибровки естественно назвать *полупараметрическими* оценками операционного времени, т.к. они зависят от постулируемой спецификации базового процесса, но не зависят от какой-либо конкретной спецификации операционного времени. Изучение этих оценок (как будет видно ниже) позволяет предлагать новые обоснованные модели стохастической замены времени.

Формализуем вышесказанное. В качестве базовых процессов Леви мы рассматриваем три процесса, лежащие в основе известных моделей цен финансовых активов: процесс Мертона [14]

$$X^M(t; \sigma, \lambda, \omega, \eta) = \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N(t)} \chi_k,$$

где B_t - стандартное броуновское движение относительно фильтрации \mathcal{F}_t , χ_k имеют нормальное распределение с параметрами ω и η^2 , $N(t)$ - пуассоновский процесс с интенсивностью λ , при этом все входящие в определение случайные элементы независимы, $\sigma > 0$, $\lambda > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$; процесс VG (от 'Variance Gamma' - «гамма-дисперсионный» процесс) [13]

$$X^{VG}(t; \sigma, \theta, \nu) = b(\gamma(t; 1, \nu); \theta, \sigma),$$

где $\gamma(t; 1, \nu)$ - гамма-процесс с параметрами 1 и ν , а $b(t; \theta, \sigma) = \theta t + \sigma B_t$, B_t - стандартное броуновское движение относительно фильтрации \mathcal{F}_t , при этом процессы $\gamma(t; 1, \nu)$ и $B(t)$ независимы, $\sigma > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$; и процесс вида

$$X^S(t; \sigma, \alpha) = \sigma L_t^{\alpha, -1}, \quad (4)$$

где $L_t^{\alpha, \beta}(t)$ есть стандартизированное устойчивое движение Леви с индексом устойчивости α и показателем скошенности $\beta \in [-1, 1]$; при этом полагается $\alpha \in [1, 2]$, т.к. при $\alpha < 1$ распределение $L_t^{\alpha, -1}$ сосредоточено на отрицательной полуоси и значения индекса оказываются ограниченными сверху. В дальнейшем модели для цен, основанные на этих процессах (по принципу (3)), мы будем называть моделями Мертона, VG и LS соответственно (последнее обозначение есть сокращение

от «log-stable» и отражает тот факт, что $\ln Z(t)$ имеет устойчивое распределение). Область допустимых значений параметров каждой из моделей мы будем обозначать D (при этом всегда будет по смыслу ясно, о какой модели идет речь).

Изложение теории данных процессов мы ограничим приведением выражений для характеристических функций соответствующих им процессов

$$s^m(t) \equiv \ln S^m(t) = (r - d + \mu^m)t + X^m(t)$$

(где d - непрерывно начисляемая ставка дивидендов по базовому активу, μ^m - константа, обращающая процесс $\exp[X^m(t) + \mu^m t]$ в мартингал, а m - универсальное обозначение идентификатора модели). Данные характеристические функции имеют вид ([6], [13]):

$$\begin{aligned} \varphi_{s(t)}^M(u; \sigma, \lambda, \omega, \eta) &= \exp \left[t \left(iu (r - d + \mu^M) - \frac{u^2 \sigma^2}{2} + \lambda \left(\exp \left[iu \omega - \frac{u^2 \eta^2}{2} \right] - 1 \right) \right) \right], \\ \mu^M &= -\lambda \left[\exp \left(\omega + \frac{\eta^2}{2} \right) - 1 \right] - \frac{\sigma^2}{2}; \\ \varphi_{s(t)}^{VG}(u; \sigma, \theta, \nu) &= \exp [iu (r - d + \mu^{VG}) t] \left[1 - i\theta \nu u + \frac{(\sigma u)^{2\nu}}{2} \right]^{-\frac{t}{\nu}}, \\ \mu^{VG} &= \frac{1}{\nu} \ln \left[1 - \theta \nu - \frac{\sigma^2 \nu}{2} \right]; \\ \varphi_{s(t)}^S(u; \sigma, \alpha) &= \exp \left[t \left(iu (r - d + \mu^S) - \frac{(iu \sigma)^\alpha}{\cos \frac{\pi \alpha}{2}} \right) \right], \\ \mu^S &= \frac{\sigma^\alpha}{\cos \frac{\pi \alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

4.1 Первый этап оценки операционного времени

Обозначим $c_{mar}(K, T; t)$ и $p_{mar}(K, T; t)$ соответственно эмпирические цены опционов «колл» и «пут» с ценой исполнения K и сроком до исполнения T в момент времени t . Обозначим $c^M(K, T; \sigma, \lambda, \omega, \eta)$, $c^{VG}(K, T; \sigma, \theta, \nu)$, $c^{LS}(K, T; \sigma, \alpha)$ теоретические цены опционов «колл» с ценой исполнения K и сроком до исполнения T согласно моделям Мертона, VG и LS соответственно, а $p^M(K, T; \sigma, \lambda, \omega, \eta)$, $p^{VG}(K, T; \sigma, \theta, \nu)$, $p^{LS}(K, T; \sigma, \alpha)$ - цены аналогичных им опционов «пут».

На первом шаге оценки стохастического времени мы калибруем каждую из трех вышеописанных моделей для каждой из рассматриваемых дат, а именно, мы находим оценки структурных параметров каждой из рассматриваемых моделей как решение следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta}^m(t_k) &= \arg \min_{\Theta \in D} \sum_{j=1}^9 \left[\sum_{\{K > F_j(t_k)\}} (c_{mar}(K, T_j(t_k); t_k) - c^m(K, T_j(t_k); \Theta^m))^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\{K \leq F_j(t_k)\}} (p_{mar}(K, T_j(t_k); t_k) - p^m(K, T_j(t_k); \Theta^m))^2 \right], \end{aligned}$$

где внутреннее суммирование производится по всем удовлетворяющим указанным условиям опционам, при этом $F_j(t_k)$ есть форвардная цена базового актива с датой поставки $t_k + T_j(t_k)$ в момент времени t_k . В процедуре калибровки используются только опционы, находящиеся «не в деньгах» по причине их большей ликвидности и большей чувствительности к изменению параметров модели (более подробное обсуждение данного вопроса см., напр., в [6]).

4.2 Второй этап оценки операционного времени

На втором шаге нашей методологии для каждой из дат t_i и каждой из рассматриваемых моделей мы решаем оптимизационную задачу вида

$$\begin{aligned} \widehat{T}^m(t_k) = \arg \min_{0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_9} \sum_{j=1}^9 \left[\sum_{\{K > F_j(t_k)\}} (c_{mar}(K, T_j(t_k); t_k) - \right. \\ \left. - c^m(K, T_j; \widehat{\Theta}^m(t_k)))^2 + \sum_{\{K \leq F_j(t_k)\}} (p_{mar}(K, T_j(t_k); t_k) - \right. \\ \left. - p^m(K, T_j; \widehat{\Theta}^m(t_k)))^2 \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем $\widehat{T}^m(t_k)$ - вектор «детерминированных эквивалентов» значений операционного времени (случайных величин) в моменты времени $T_1(t_k), T_2(t_k), \dots, T_9(t_k)$ (относительно t_k).

Наглядным оказывается рассмотрение полученных таким образом величин $\widehat{T}^m(t_k)$ в терминах оценок уровня деловой активности (см. (1)). А именно, для каждой из дат t_i мы вычисляем оценку ожидаемого в будущем уровня деловой активности в виде

$$\widehat{v}^m(t; t_k) = \frac{\widehat{T}_{j+1}^m(t_k) - \widehat{T}_j^m(t_k)}{T_{j+1}(t_k) - T_j(t_k)}, j = \overline{0, 8}, k = \overline{1, 12},$$

где $\widehat{T}_j^m(t_k)$ есть j -ый компонент вектора $\widehat{T}^m(t_k)$, а $T_0^k \equiv \widehat{T}_0^m(t_k) \equiv 0, \forall k, m$.

На рис. 1 приведены графики функций $\widehat{v}^M(t; t_{12}), \widehat{v}^{VG}(t; t_{12}), \widehat{v}^{LS}(t; t_{12})$ (результаты для остальных дат имеют аналогичный вид и мы не приводим их из соображений краткости). Из рисунка очевидна общая закономерность: ожидаемая скорость операционного времени в ближайшее время существенно (до двух раз) выше, чем в отдаленном будущем, при этом сходимость к «долгосрочному среднему» ориентировочно наступает в интервале 3-6 месяцев. Примечательной является схожесть поведения всех трех рассматриваемых оценок, что позволяет говорить об обнаруженной закономерности как об относительно универсальной (не зависящей от спецификации базового процесса).



Рис. 1

Полученные результаты свидетельствуют о переоцененности рынком краткосрочных опционов по сравнению с долгосрочными. Данный результат является весьма неожиданным, нам неизвестны аналогичные ему свидетельства в литературе. Чем же можно объяснить данное явление? На наш взгляд, одно из возможных объяснений состоит в следующем. Участники рынка оценивают опционы, исходя из своих представлений об ожидаемом в будущем «потоке новостей», являющийся основным источником рыночной волатильности. Однако инвесторы уделяют больше внимания и придают больший вес новостям, ожидаемым в ближайшее время, нежели в отдаленном будущем (хотя бы по причине того, что новости некоторых типов приходят в заранее известные моменты времени, что, однако, не позволяет точно предсказать ни их содержание, ни производимый ими эффект), поэтому инвесторы воспринимают ближайшие промежутки времени как более насыщенные новостями, а следовательно, и рыночную неопределенность «в единицу времени» в ближайшие периоды времени как более высокую, чем за более продолжительные промежутки времени в будущем.

Полученные нами результаты мотивировали нас на разработку новых моделей операционного времени для опционов. Две такие модели описываются в следующих двух частях этой статьи.

5. Модель операционного времени на основе неоднородного негауссовского процесса Орнштейна-Уленбека

В поиске «подходящего» процесса мы обратили наше внимание на негауссовские процессы Орнштейна-Уленбека. Использование их для моделирования уровня деловой активности было предложено О. Барндорфф-Нильсенем и Н. Шепардом в работе [2]. В общем виде *однородные* негауссовские процессы Орнштейна-Уленбека задаются как решение $y(t)$ стохастического дифференциального уравнения

$$dy(t) = -\lambda y(t)dt + dz(t),$$

где $\lambda > 0$, а $z(t)$ - процесс Леви.

Мы решили обобщить данный класс моделей уровня деловой активности путем рассмотрения в качестве $z(t)$ процесса с нестационарными приращениями. А именно, рассмотрим процесс деловой активности $v^{IOU}(t)$ по мере \mathbb{Q} в виде

$$v^{IOU}(t) = p + \xi_0 e^{-\gamma t} + \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k e^{-\gamma(t-t_k)},$$

где p, γ - положительные константы, $N(t)$ - пуассоновский процесс с интенсивностью λ , t_k - точки скачков $N(t)$, а ξ_k имеют показательное распределение с параметром $e^{\theta t_k}$, т.е.

$$f_{\xi_k}(x|t_k = t) = \begin{cases} b \exp[\theta t - b e^{\theta t} x], & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

ξ_0 положим имеющей гамма-распределение с параметрами $\frac{\lambda}{\gamma}$ и b , т.е.

$$f_{\xi_0}(x) = \begin{cases} \frac{b^{\frac{\lambda}{\gamma}} x^{\frac{\lambda}{\gamma}-1} e^{-bx}}{\Gamma(\frac{\lambda}{\gamma})}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Процесс $N(t)$ и случайные величины ξ_0, ξ_1, \dots полагаются независимыми. Обозначение «IOU» является сокращением от «inhomogeneous Ornstein-Uhlenbeck» [process] («неоднородный [процесс] Орнштейна-Уленбека»). Нетрудно заметить, что процесс $y(t) = v^{IOU}(t) - \xi_0 e^{-\gamma t} - p$ является решением *неоднородного* уравнения Орнштейна-Уленбека

$$dy(t) = -\gamma y(t)dt + dz(t),$$

где $z(t)$ - неоднородный сложный пуассоновский процесс с интенсивностью λ и с экспоненциальным распределением скачка в момент времени t с параметром $b e^{\theta t}$. При этом, т.к. уровень деловой активности является ненаблюдаемой величиной, мы полагаем, что участники рынка не знают его текущего значения, и поэтому выбираем ξ_0 из стационарного распределения соответствующего *однородного* уравнения Орнштейна-Уленбека (при $\theta = 0$).

Данный выбор процесса деловой активности по риск-нейтральной мере имеет реалистичные траектории и отвечает полученным в части 4 результатам. Особый интерес представляет параметр θ , который можно рассматривать как меру той премии, которую участники рынка готовы платить за краткосрочные опционы по сравнению с долгосрочными.

В качестве базового процесса нашей модели мы используем процесс $X_S(t)$. Наиболее важным свойством данного процесса для нас является сильная «скошенность» его одномерных распределений влево (где под «скошенностью» понимается более медленное убывание левого «хвоста» распределения по сравнению с правым [6], классический же третий момент любого устойчивого распределения не существует). Это свойство позволяет учитывать хорошо известное явление отрицательной скошенности риск-нейтральных распределений логарифмических доходностей индексов без необходимости введения зависимости между базовым процессом и процессом стохастического времени. Следует отметить, что технические

сложности, связанные с этим, были, во многом, решены в работе [7] путем применения аппарата комплекснозначных мер. Однако существенным преимуществом подхода, основанного на независимости процессов, остается предоставляемая им гибкость в выборе сочетаемых процессов. В случае же коррелированных процессов, если, к примеру, в качестве базового выбран чисто скачкообразный процесс бесконечной активности, то и процесс стохастического времени также должен содержать скачкообразный компонент с бесконечной активностью [7], что является весьма ограничительным.

Определим процесс $M^{LS}(t)$ в виде

$$M^{LS}(t) = \exp[\mu^S t + X^S(t)]$$

и зададим процесс цены $S^{IOU}(t)$ по мере \mathbb{Q} следующим образом:

$$S^{IOU}(t) \equiv e^{(r-d)t} Z^{IOU}(t) = e^{(r-d)t} M^{LS}(T^{IOU}(t)),$$

где $T^{IOU}(t)$ определен согласно (1). Заметим (нетрудно проверить), что процесс $T^{IOU}(t)$ является случайной заменой времени [17] и имеет непрерывные траектории. Процесс $Z^{IOU}(t)$ является мартингалом по мере \mathbb{Q} (доказательство этого факта является техническим и доступно по запросу).

Для вычисления цены опциона в рамках данной модели найдем преобразование Фурье процесса $s^{IOU}(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi_s^{IOU}(u) &\equiv \mathbb{E} \exp[ius^{IOU}(t)] = e^{iu(r-d)t} \mathbb{E} \exp[iu[X^S(T^{IOU}(t)) + \mu^S T^{IOU}(t)]] = \\ &= e^{iu(r-d)t} \mathbb{E} \mathbb{E}(\exp[iu[X^S(T^{IOU}(t)) + \mu^S T^{IOU}(t)]] | T^{IOU}(t) = T) = \quad (6) \\ &= e^{iu(r-d)t} \mathbb{E} \mathbb{E}[e^{-T\Psi_S^\mu(u)} | T^{IOU}(t) = T] = e^{iu(r-d)t} L_{T^{IOU}(t)}(\Psi_S^\mu(u)), \end{aligned}$$

где $\Psi_S^\mu(u)$ есть характеристическая экспонента процесса $X_S(t) + \mu^S(t)$, а $L_{T^{IOU}(t)}(s)$ есть преобразование Лапласа процесса $T^{IOU}(t)$. Таким образом, задача нахождения характеристической функции процесса $s(t)$ сводится к вычисления преобразования функции $L_{T^{IOU}(t)}(s)$. Техническим является доказательство того, что данная функция представима в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_{T^{IOU}}(s) &= \exp[-spt] \left[1 + \frac{s(1 - e^{-\gamma t})}{\gamma b} \right]^{-\frac{\lambda}{\gamma}} \exp[\lambda t (h(s, t) - 1)], \\ h(s, t) &= \int_0^1 \frac{dx}{1 + \frac{s}{\gamma b} e^{\theta t(x-1)} (1 - e^{-\gamma t x})}. \end{aligned}$$

Как видно, мы получили выражение, содержащее только элементарные функции и однократное собственное интегрирование, что позволяет быстро вычислять значения $L_{T^{IOU}}(s)$ численно.

Калибровка вышеописанной модели выявила высокую степень «взаимозаменяемости» двух из ее параметров, λ и γ . Данный факт не является неожиданным. Действительно, рассмотрим величину

$$T^{IOU}(t, t+p) = \int_t^{t+p} v^{IOU}(u) du$$

при $\theta = 0$ (т.е. для случая однородного уравнения Орнштейна-Уленбека). Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} L_1(p; b, \lambda, \gamma) &\equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} L_{TOU}(t, t+p)(s; b, \lambda, \gamma) = \\ &= \left[1 + \frac{s}{b\gamma} (1 - e^{-\gamma p}) \right]^{-\frac{\lambda s}{\gamma(s+b\gamma)}} \exp \left[-\frac{s\lambda p}{s+b\gamma} \right]. \end{aligned}$$

Сделаем замену λ на $\omega \equiv \frac{\lambda}{\gamma}$ и устремим γ к бесконечности:

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} L_1(p; b, \lambda, \gamma) = \exp \left[-\frac{\omega sp}{b} \right].$$

Как и следовало ожидать, мы получили вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $\frac{\lambda p}{\gamma b}$. Более важным, однако, является зависимость его от λ и γ лишь через $\frac{\lambda}{\gamma} \equiv \omega$. На практике как количество новостей в год, так и скорость «угасания» («отыгрывания») каждой новости (выражаемая параметром γ), как правило, очень велики. Полученный выше предельный результат показывает, что при этом затруднительным оказывается извлечение информации о параметрах λ и γ в отдельности, поэтому, стремясь описать опционную структуру как можно меньшим числом свободных параметров, мы заменяем эти два свободных параметра одним, параметром ω . Мы вполне произвольно фиксируем $\lambda = 150$ (что соответствует примерно трем новостям в неделю) и полагаем $\gamma = \frac{150}{\omega}$. Результаты калибровки подтверждают, что такое сокращение числа свободных параметров практически не ухудшает качества приближения эмпирических опционных структур и существенно повышает устойчивость получаемых оценок параметров.

Таким образом, количество свободных параметров в нашей модели равно пяти $(\alpha, p, b, \omega, \theta)$. Мы откалибровали вышеизложенную модель для каждой из дат t_i и представляем результаты в виде величин среднеквадратических ошибок приближения для нашей модели и ее аналогов на рис. 2. Как можно видеть, по качеству приближения эмпирических опционных структур наша модель существенно превосходит ряд известных аналогов, а именно, модели Блэка-Шоулса [3], Мертона [14], VG [13] и LS [6]. Однако от модели с большим числом свободных параметров естественно ожидать лучшего приближения реальных временных структур. Поэтому для корректного сравнения нашей модели с альтернативными мы вычисляем статистики, основанные на тесте сравнительной «близости» моделей Вуонга [16] и нескольких информационных критериях.

Рассмотрим следующую модель эксперимента. Пусть количество опционов в рассматриваемый момент времени равно N . Предположим, что «ошибки измерения», допускаемые i -ой моделью, являются независимыми и распределены нормально с нулевым м.о. и дисперсией σ_i^2 . Известно, что в таком случае оценки параметров модели, полученные методом наименьших квадратов, совпадают с оценками максимального правдоподобия. Обозначим функцию правдоподобия для модели i

$$LR_i(e_i; \Theta^i) = \prod_{k=1}^N f_i(e_{i,k}; \Theta^i),$$

где $f_i(x; \Theta^i)$ - плотность распределения ошибок i -ой модели, а $e_i = (e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,N})$ - вектор ошибок, допускаемых данной моделью. Обозначим также

$$LLR_i(e_i, \Theta^i) \equiv \ln LR_i(e_i, \Theta^i).$$

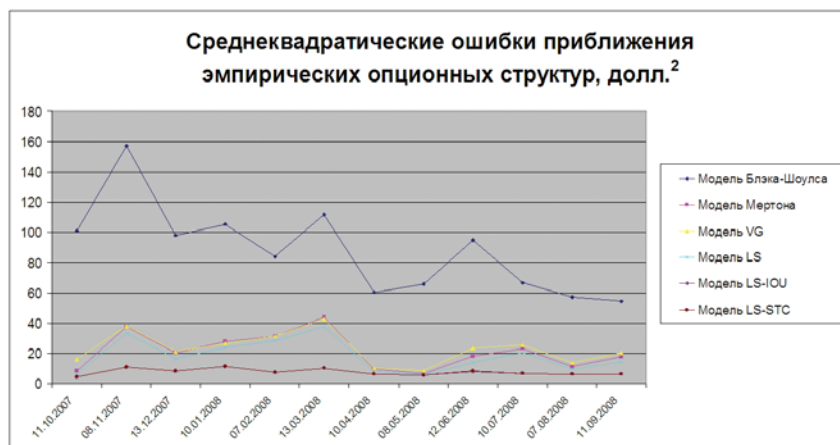


Рис. 2

В работе [16] построен критерий сравнительной «близости» двух моделей к результатам эксперимента в виде

$$\hat{I}_0 = \frac{LLR_i(e_i, \Theta^i) - LLR_j(e_j, \Theta^j)}{\sqrt{N\hat{\varepsilon}_{ij}}},$$

где $\hat{\varepsilon}_{ij}$ - оценка дисперсии $[f_i(e_{i,k}; \Theta^i) - f_j(e_{j,k}; \Theta^j)]$. При справедливости основной гипотезы об эквивалентности моделей i и j в смысле правдоподобия данная статистика имеет асимптотически стандартное нормальное распределение [16].

Помимо \hat{I}_0 , мы строим статистики $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$, основанные на информационных критериях Акаике [1], Шварца [15] и Хэннана-Куинна [9] соответственно:

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_0 - (p - q),$$

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_0 - \frac{(p - q)}{2} \ln N,$$

$$\hat{I}_3 = \hat{I}_0 - (p - q) \ln \ln N,$$

где p и q - число свободных параметров сравниваемых моделей. Результаты вычисления вышеописанных статистик показывают, что при предположении справедливости основной гипотезы модели Блэка-Шоулса, Мертона и VG отвергаются в пользу предложенной нами модели при 1%-ном уровне значимости в десяти и более из рассмотренных дат любым из критериев $\hat{I}_0, \hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$, при этом наша модель не отвергается ни разу (против любой из моделей, в любой рассматриваемый день и любым из критериев). Для сравнения с моделью LS мы приведем результаты

сравнения по статистике \widehat{I}_2 , т.к. в рассматриваемом эксперименте именно эта статистика «назначает» наибольший «штраф» за дополнительные свободные параметры. Итак, при справедливости основной гипотезы об эквивалентности моделей в смысле правдоподобия при 1%-ном уровне значимости модель LS отвергается в пользу нашей модели семь раз из двенадцати, а наша модель в пользу модели LS - только один раз. Основываясь на вышеприведенных результатах, можно сделать заключение, что наша модель является с информационной точки зрения является адекватной и превосходит ряд известных аналогов по относительному качеству приближения реальных опционных структур.

6. Модель операционного времени на основе «экспоненциально-пуассоновского» процесса

Одним из положительных аспектов представленной нами в предыдущей части модели является разделение набора параметров на описывающие процесс прихода новостей на рынок (b, ω) и восприятия участниками рынка будущей неопределенности на разных временных горизонтах (θ). Однако с точки зрения количества свободных параметров (крайне важной с практической точки зрения характеристики модели) это преимущество модели является и ее скрытым недостатком. Стремясь описать опционную структуру как можно меньшим числом параметров, мы задались целью построить модель цены рыночного индекса со стохастической заменой времени по риск-нейтральной мере, которая имела бы только четыре свободных параметра. В этой части мы представляем результат решения этой задачи.

Сохранив вид операционного времени как интеграла от процесса, отвечающего уровню деловой активности, мы рассмотрели последний в виде

$$v(t) = p + qb^{N(t)},$$

где p, q - положительные константы, $b \in (0, 1)$, $N(t)$ - пуассоновский процесс с интенсивностью λ . Критическим с практической точки зрения свойством данного процесса, побудившим нас выбрать в качестве процесса деловой активности именно его, является представимость преобразования Лапласа $L_{TSTC(t)}(s)$ соответствующего ему процесса операционного времени в виде

$$L_{TSTC(t)}(s) = e^{-(sp+\lambda)t} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^l}{l!} L_l(s), \quad (7)$$

$$L_l(s) = \begin{cases} \exp[-qst], & l = 0, \\ \exp[-qstb^l] \prod_{k=1}^l \frac{1 - \exp[-qst(1-b)b^{k-1}]}{qst(1-b)b^{k-1}}, & l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Мы намеренно не стали упрощать выражение для $L_l(s)$ до конца, чтобы сделать более наглядной сходимость последовательности сомножителей в произведении к единице.

Справедлива следующая оценка остатка ряда в (7). $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{l=l^*}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^l}{l!} L_l(s) \right| \leq \varepsilon,$$

если

$$\begin{cases} \Gamma(l^*, C\lambda t) \frac{|L_{l^*}(s)|}{C l^*} \leq \varepsilon e^{-C\lambda t}, \\ l^* \geq -\log_b (qt(1-b)|s|). \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma(a, x) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt, \\ C &= \sqrt{6}e. \end{aligned}$$

Такая оценка, хоть и не дает явного выражения для l^* , является, тем не менее, удобной в практическом применении, т.к. выражение в левой части (8) является монотонно убывающей функцией l^* и, следовательно, вычисляя его последовательно для возрастающих по определенному закону l , можно найти значение l^* , обеспечивающее заданную точность ε . Доказательства вышеприведенных утверждений доступны по запросу.

Мы обозначаем новую модель LS-STC (от «simple time change» - «простая замена времени»), т.к. процесс $v(t)$ имеет весьма простой вид. Так же, как в случае с предыдущей моделью, мы отмечаем существенную «взаимозаменяемость» двух параметров, b и λ , и фиксируем $\lambda = 150$. Свободными параметрами данной модели являются α , p , q и b . Результаты калибровки данной модели приведены на рис. 2 (в масштабе рисунка график модели LS-STC практически неотличим от графика модели LS-IOU). Как видно, сокращение количества параметров практически не повлияло на общий объем их «информационного содержания», т.е. на качество приближения реальных опционных структур, в сравнении с предыдущей моделью. Однако практический смысл параметров новой модели уже не столь прозрачен, как это было в случае модели LS-IOU.

Мы вычисляем статистики \hat{I}_0 , \hat{I}_1 , \hat{I}_2 , \hat{I}_3 для модели LS-STC в сравнении ее с моделями Блэка-Шоулса, Мертона, VG, LS и предыдущей нашей моделью. Результаты показывают, что при 1%-ном уровне значимости первые три модели отвергаются в пользу нашей модели для каждой из рассмотренных дат и каждым из критериев. Сравнение нашей модели с моделью LS, основанное на статистике \hat{I}_2 , показывает, что альтернативная модель отвергается в пользу нашей при 1%-ном уровне значимости десять раз из двенадцати, при наша модель не отвергается в пользу модели LS ни в одну из оставшихся двух дат. Наконец, сравнение предложенных нами моделей между собой демонстрирует небольшое преимущество модели LS-STC.

Таким образом, мы достигли цели, сведя количество свободных параметров модели к четырем без существенного ухудшения качества приближения наблюдающихся на практике опционных структур.

Заключение

Нами была предложена новая методология полупараметрического оценивания операционного времени на основе эмпирических цен опционов и две модели стохастического времени на ее основе. Обе представленные модели позволяют эффективно вычислять цены европейских опционов, используя характеристические

функции процесса доходности, полученные в полуаналитическом виде. Тесты, основанные на информационных критериях Акаике, Шварца и Хэннана-Куинна свидетельствуют о превосходстве построенных моделей над рядом известных аналогов, даже с учетом большего числа свободных параметров. Отличительным преимуществом модели LS-IOU является реалистичность порождаемых ей траекторий процесса цены (в частности, учет эффекта «кластеризации» волатильности), а также прозрачность информационного содержания параметров модели. Основным же преимуществом модели LS-STC является меньшее число свободных параметров, что является важным с точки зрения скорости и устойчивости калибровки модели и устойчивости ее параметров во времени.

Список литературы

- [1] Akaike H. Information Theory and an Extension to the Likelihood Ratio Principle, in B. N. Petrov and F. Csaki, eds.,: Proceedings of the Second International Symposium of Information Theory, 1973, Akademiai Kiado, Budapest.
- [2] Barndorff-Nielsen Ole, Shepard N. Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-Based Models and Some of Their Uses in Financial Economics // Journal of the Royal Statistical Society B, **63**, Part 2 (2001), pp. 167-241.
- [3] Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy 81 (1973), pp. 637-654.
- [4] Carr P., Geman H., Madan D., Yor M. Stochastic Volatility for Levy Processes // Mathematical Finance, Vol. 13, No. 3 (2003), pp. 345-382.
- [5] Carr P., Madan D. Option Valuation Using the Fast Fourier Transform // Journal of Computational Finance, 2 (1999), pp. 61-73.
- [6] Carr P., Wu L. The Finite Moment Log Stable Process and Option Pricing // The Journal of Finance, Vol. 58, No. 2 (April 2003), pp. 753-777.
- [7] Carr P., Wu L. Time-changed Levy Processes and Option Pricing // Journal of Financial Economics, Vol. 71 (2004), pp. 113-141.
- [8] Geman H., Madan D., Yor M. Time Changes for Levy Processes // Mathematical Finance, Vol. 11, No. 1 (January 2001), pp. 79-96.
- [9] Hannan E. J., Quinn B. G. The Determination of the Order of an Autoregression // Journal of the Royal Statistical Society B, **41**, 2 (1979), pp. 190-195.
- [10] Harrison J. M., Pliska S. R. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading // Stochastic Processes and their Applications, 11 (1981), pp. 215-260.
- [11] Huang J.-Z., Wu L. Specification Analysis of Option Pricing Models Based on Time-Changed Levy Processes // The Journal of Finance, Vol. 59, No. 3 (2004), pp. 1405-1440.

- [12] Lewis A. A Simple Option Formula for General Jump-Diffusion and Other Exponential Levy Processes. Manuscript, Envision Financial Systems and OptionCity.net (2001), Newport Beach, California, USA.
- [13] Madan D., Carr P., Chang E. The Variance Gamma Process and Option Pricing // *European Finance Review* 2 (1998), pp. 79-105.
- [14] Merton R. C. Option Pricing When Underlying Asset Returns are Discontinuous // *Journal of Financial Economics* 3 (1976), pp. 125-144.
- [15] Schwartz G. Estimating the Dimension of a Model // *Annals of Statistics* 6 (1978), pp. 461-464.
- [16] Vuong Q. Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-Nested Hypotheses // *Econometrica*, Vol. 57, No. 2 (Mar. 1989), pp. 307-333.
- [17] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.