

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ
В ЭКОНОМИКЕ**

УДК 338.27

**ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ БРАУНА С ВЕСОВЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВЕЙДА ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ
КОРОТКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

А.А. Васильев

Тверской государственный университет, г. Тверь

В статье приведены результаты исследования точности модели Брауна с весовыми коэффициентами Вейда при прогнозировании коротких временных рядов. В качестве таких рядов были использованы показатели производства важнейших видов продукции в Тверской области. Результаты исследования показали, что применение весовых коэффициентов Вейда при малых значениях постоянной сглаживания в большинстве случаев приводит к повышению точности прогноза.

***Ключевые слова:** весовые коэффициенты Вейда; короткий временной ряд; краткосрочный прогноз; модель Брауна; показатели производства важнейших видов продукции Тверской области; точность прогноза.*

1. Введение. Прогнозирование стационарных временных рядов с использованием модели Брауна на один интервал времени вперед производится по формуле $\hat{y}_{t+1} = S_t$, $S_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1}$, $t = 1, 2, \dots$, где \hat{y}_{t+1} - прогнозное значение уровня временного ряда показателя y на момент времени $(t+1)$; S_t - экспоненциальная средняя на момент времени t ; α - постоянная сглаживания; y_t - фактическое значение уровня ряда показателя y в момент времени t .

К проблемам применения модели Брауна относятся выбор оптимального значения постоянной сглаживания α и выбор начального значения экспоненциальной средней S_0 . Выбор этих величин наиболее сложен на начальных этапах прогнозирования по следующим причинам: 1) неудачный выбор S_0 может привести к большим ошибкам прогнозирования на основе малой выборки данных (особенно при малых значениях α , так как в этом случае S_0 имеет чрезмерный вес в течение длительного времени) [1, с. 22]; 2) обоснованный выбор оптимального значения α на первых шагах прогнозирования с использованием большинства методов решения этой задачи невозможен [2, с. 194] (возможна только оптимизация величины α на множестве ее значений).

2. Методы определения начального значения экспоненциальной средней. К количественным методам определения S_0 относятся [3, с. 31-34]: 1) использование первого фактического значения; 2) вычисление простой средней арифметической первых трех-пяти уровней ряда; 3) вычисление взвешенной арифметической средней первых двух уровней ряда и использование ее в качестве S_2 ; 4) вычисление взвешенной арифметической средней нескольких первых

уровней ряда с учетом поправочных коэффициентов. Первый метод позволяет вычислять первое прогнозное значение для $t = 2$, второй метод – для $t = 4$ (при вычислении S_0 по первым трем уровням), третий и четвертый методы – для $t = 3$.

3. Методы уменьшения веса начального значения экспоненциальной средней. Для уменьшения избыточного веса, придаваемого S_0 при малых значениях α на начальных этапах прогнозирования, применяются: 1) модифицированная процедура сглаживания Вейда; 2) процедура сглаживания на основе поправочных коэффициентов. Модифицированная экспоненциальная средняя Вейда вычисляется по формуле [1, с. 22]

$$\tilde{S}_t = S'_t \cdot \alpha'_t, \tilde{S}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) S'_{t-1}, \alpha'_t = 1 / \sum_{i=0}^t \alpha (1 - \alpha)^i, S'_0 = \alpha S_0.$$

Прогнозирование значения уровня временного ряда показателя y на момент времени $(t+1)$ в этом случае производится по формуле $\hat{y}_{t+1} = \tilde{S}_t$. Процедура сглаживания Вейда позволяет получать первое прогнозное значение для $t = 2$. В [4, с. 119] на примере временного ряда курса акций ПАО "Газпром" для $\alpha = 0,3$ показано, что даже при заниженном значении S_0 прогнозные уровни этого ряда, рассчитанные с использованием модифицированной средней Вейда, расположены ближе к фактическим уровням, чем уровни, рассчитанные с использованием экспоненциальной средней Брауна.

Поправочные коэффициенты, обеспечивающие равенство весовых коэффициентов в модели Брауна единице, вычисляются по формуле [3, с. 34]: $\alpha'_t = 1 / [1 - (1 - \alpha)^t]$. Эти коэффициенты используются в четвертом методе определения S_0 . В [3, с. 38-39] показано, что применение третьего и четвертого методов определения S_0 автоматически обеспечивает равенство суммы весов единице, на основании чего сделан вывод о нецелесообразности применения модифицированной экспоненциальной средней Вейда. Однако сравнение точности прогноза с использованием этих методов с точностью прогноза на основе модифицированной экспоненциальной средней Вейда не приведено.

В [3, с. 35-37] представлены результаты исследования на условном примере точности прогноза модели Брауна для второго-четвертого методов определения начального значения экспоненциальной средней. Сравнение полученных с использованием этих методов прогнозных уровней ряда с фактическими уровнями позволило авторам сформулировать следующие выводы: 1) наиболее точный прогноз при разных значениях α обеспечивала модель, использующая четвертый метод определения начального значения экспоненциальной средней; 2) по мере увеличения значения α в классическом диапазоне значений ($0 < \alpha < 1$) разница между прогнозами по этим трем моделям уменьшается; 3) при $\alpha = 1$ прогнозы моделей совпадают, начиная с четвертого наблюдения; 4) при увеличении значения α в запредельном диапазоне ($1 \leq \alpha < 2$) разница между прогнозами начинает увеличиваться; 5) при значениях α , близких к 0 или 2, точность прогноза существенно зависит от метода выбора начального значения экспоненциальной средней.

4. Объект, предмет и цель исследования. Приведенные в [3,4] результаты исследований для одного реального ряда и одного условного примера свидетельствуют о целесообразности применения на начальных этапах

прогнозирования модифицированной экспоненциальной средней Вейда или третьего либо четвертого методов определения начального значения S_0 . Однако для формулировки рекомендаций по использованию того или иного метода на практике также представляют интерес следующие исследования на множестве реальных временных рядов (с использованием показателей точности прогноза): 1) сравнение точности прогноза модели Брауна с обычными весами и модели Брауна с весами Вейда; 2) сравнение точности моделей Брауна, использующих разные методы определения начального значения экспоненциальной средней, друг с другом и с моделью Брауна с весами Вейда.

Объектом данного исследования является модель Брауна с весовыми коэффициентами Вейда при использовании в качестве начального значения экспоненциальной средней первого фактического значения уровня ряда ($S_0 = y_1$). Предмет исследования заключается в анализе точности данной модели в классическом диапазоне значений постоянной сглаживания при одношаговом прогнозировании реальных временных рядов с использованием показателей точности прогноза. Цель исследования состоит в выработке рекомендаций по использованию модели Брауна с весовыми коэффициентами Вейда при прогнозировании реальных временных рядов экономических показателей.

5. Временные ряды для оценки точности прогнозов. Для оценки точности прогнозов использовались 23 временных ряда производства важнейших видов продукции в Тверской области за 12 месяцев 2015 г. по данным Федеральной службы государственной статистики [5]. Фрагмент ряда помесечного производства цельномолочной продукция в пересчете на молоко (в тыс. тонн), использованный для детального исследования, имеет вид: 9,5; 10,9; 11,2; 11,7; 11,7; 11,4; 10,9; 11,0; 11,0; 11,6; 11,0; 10,3.

6. Методика исследования. В качестве показателей точности прогноза использовались средняя квадратическая ошибка прогноза (RMSE) и средняя абсолютная ошибка прогноза (MAPE). Данные показатели были рассчитаны для каждого временного ряда при прогнозировании на основе модели Брауна с обычными весами и с весами Вейда для дискретного множества значений α в классическом диапазоне значений с шагом 0,1. Вычисление RMSE и MAPE производилось для двух интервалов значений времени: $t = 3 - 7$ ($n = 5$) и $t = 8 - 12$ ($n = 10$), где t - номер месяца, n - количество моментов времени, для которых вычислялись показатели точности. Так как на начальных этапах прогнозирования определение оптимального значения α проблематично, то для сравнения точности прогноза моделей для каждого временного ряда использовались следующие обобщенные показатели, характеризующие точность прогноза на множестве значений α : 1) среднее значение RMSE, равное $\overline{RMSE}(B) = \sum_{i=1}^k RMSE_i(B) / k$, где

$RMSE_i(B)$ - RMSE для модели Брауна с обычными весами для i -го значения α ; $k = 9$ - количество значений α (для модели Брауна с весами Вейда рассчитывался аналогичный показатель $\overline{RMSE}(W)$); 2) среднее значение относительной разности RMSE моделей Брауна с обычными весами и с весами Вейда, равное $\overline{\delta}_{RMSE} = \sum_{i=1}^k \delta_{RMSE_i} / k$, где

$\delta_{\text{RMSE}_i} = (\text{RMSE}_i(\text{B}) - \text{RMSE}_i(\text{W})) / \text{RMSE}_i(\text{W}) \cdot 100\%$; 3) максимальное значение относительной разности RMSE моделей Брауна с обычными весами и с весами Вейда, равное $\delta_{\text{max}}^{\text{RMSE}} = \max_{i=1, \dots, k} \delta_{\text{RMSE}_i}$; 4) среднее значение MAPE, равное $\overline{\text{MAPE}}(\text{B}) = \sum_{i=1}^k \text{MAPE}_i(\text{B}) / k$, где $\text{MAPE}_i(\text{B})$ - MAPE для модели Брауна с обычными весами для i -го значения α (для модели Брауна с весами Вейда рассчитывался аналогичный показатель $\overline{\text{MAPE}}(\text{W})$); 5) среднее значение абсолютной разности MAPE моделей Брауна с обычными весами и с весами Вейда, равное $\overline{\Delta}_{\text{MAPE}} = \sum_{i=1}^k \Delta_{\text{MAPE}_i} / k$, где $\Delta_{\text{MAPE}_i} = \text{MAPE}_i(\text{B}) - \text{MAPE}_i(\text{W})$; 6) максимальное значение абсолютной разности MAPE моделей Брауна с обычными весами и с весами Вейда, равное $\Delta_{\text{max}}^{\text{MAPE}} = \max_{i=1, \dots, k} \Delta_{\text{MAPE}_i}$; 7) диапазон значений постоянной сглаживания $[\alpha_1, \alpha_2]$, в котором $\delta_{\text{RMSE}_i} \geq 1\%$ (или $\Delta_{\text{MAPE}_i} \geq 1\%$).

7. Обобщенные результаты исследования множества временных рядов. Обобщенные результаты сравнения моделей Брауна с обычными весами и с весами Вейда на множестве временных рядов для $n = 5$ представлены в табл. 1-3.

Т а б л и ц а 1

Сравнение RMSE модели Брауна с обычными весами и с весами Вейда ($n = 5$)

Вид продукции	$\overline{\text{RMSE}}(\text{B})$	$\overline{\text{RMSE}}(\text{W})$	$\delta_{\text{max}}^{\text{RMSE}}$	$[\alpha_1, \alpha_2]$	$\overline{\delta}_{\text{RMSE}}$
Древесина, тыс. плотных куб. м	15,86	15,71	10,49	0,1-0,2	1,04
Мясо убойных животных, тонн	541,26	530,05	9,47	0,1-0,3	1,99
Мясо домашней птицы, тонн	284,44	275,02	14,14	0,1-0,4	2,99
Рыба и продукты рыбные, тонн	34,29	38,03	-55,84	0,1-0,7	-15,43
Молочная продукция, тыс. тонн	0,80	0,67	35,81	0,1-0,7	11,84
Масло сливочное, тонн	29,16	28,27	11,27	0,1-0,4	2,62
Мука, тыс. тонн	0,43	0,43	-2,50	0,1-0,2	-0,30
Хлеб, тыс. тонн	0,33	0,35	17,86	0,1-0,6	-6,07
Ткани готовые – всего, тыс. кв. м	4331,92	4026,38	20,04	0,1-0,5	5,23
Трикотажные изделия, тыс. штук	33,40	28,86	30,92	0,1-0,7	9,75
Спецодежда, тыс. штук	401,20	324,45	39,22	0,1-0,7	13,24
Обувь, тыс. пар	199,46	174,13	36,45	0,1-0,6	10,29
Лесоматериалы, тыс. куб. м	1,12	1,09	10,69	0,1-0,3	1,84
Фанера клееная, тыс. куб. м	1,95	1,73	29,39	0,1-0,7	8,69
Книги, млн. штук	24,09	21,67	26,28	0,1-0,6	7,63
Книги переплетенные, млн. штук	5,04	4,88	12,30	0,1-0,4	2,78
Пластмассы, тонн	804,71	768,18	16,47	0,1-0,5	4,07
Материалы лакокрасочные, тонн	321,17	289,94	25,14	0,1-0,6	7,19
Волокна и нити химические, тонн	19,87	15,53	42,30	0,1-0,7	15,14
Кирпич, млн. шт. усл. кирпича	2,72	2,50	24,55	0,1-0,5	6,48
Конструкции ж/б, тыс. куб. м	4,08	3,60	32,37	0,1-0,6	9,16
Экскаваторы, штук	24,52	22,20	23,60	0,1-0,6	6,79
Электроэнергия, млрд. кВт·ч	0,49	0,51	-7,14	0,1-0,4	-2,48

Таблица 2

Сравнение MAPE модели Брауна с обычными весами и с весами Вейда ($n = 5$)

Вид продукции	МАР $\bar{E}(V)$	МАР $\bar{E}(W)$	$\Delta_{\max}^{\text{MAPE}}$	$[\alpha_1, \alpha_2]$	$\bar{\Delta}_{\text{MAPE}}$
Хлеб	2,86	2,99	-0,38	-	-0,13
Спецодежда	5,64	4,40	5,02	0,1-0,3	1,24
Молочная продукция	6,31	5,17	5,10	0,1-0,3	1,14
Мясо домашней птицы	7,08	6,81	2,30	0,1	0,27
Лесоматериалы	7,10	6,92	0,79	-	0,18
Пластмассы	7,33	7,00	1,42	0,1-0,2	0,42
Мясо убойных животных	7,33	7,23	0,31	-	0,10
Древесина	8,38	8,30	0,82	-	0,08
Рыба и продукты рыбные	8,67	9,53	-2,36	0,1-0,3	-0,86
Фанера клееная	8,82	7,57	5,77	0,1-0,3	1,25
Волокна и нити химические	12,12	8,85	14,01	0,1-0,4	3,27
Электроэнергия	13,37	13,72	-1,14	0,1	-0,35
Ткани готовые	19,86	17,83	7,98	0,1-0,4	2,03
Обувь	20,23	18,04	12,47	0,1-0,4	2,19
Конструкции ж/б	20,54	18,66	9,00	0,1-0,4	1,87
Книги	21,10	18,77	10,81	0,1-0,4	2,33
Масло сливочное	23,13	22,53	4,69	0,1	0,60
Трикотажные изделия	23,32	20,03	13,85	0,1-0,5	3,29
Кирпич	26,99	23,83	13,36	0,1-0,4	3,16
Мука	27,69	25,09	9,35	0,1-0,5	2,60
Экскаваторы	32,55	29,34	12,52	0,1-0,5	3,20
Материалы лакокрасочные	34,54	30,73	15,02	0,1-0,5	3,81
Книги переплетенные	45,49	45,61	-1,69	0,1	-0,11

Таблица 3

Распределение продукции по диапазону оптимального значения α при $n = 5$

Весовые коэффициенты	$0,1 \leq \alpha \leq 0,3$	$0,3 < \alpha \leq 0,5$	$0,5 < \alpha \leq 0,7$	$0,7 < \alpha \leq 0,9$	$\alpha = 1,0$
Обычные	21,7%	4,3%	17,4%	8,7%	47,8%
Вейда	21,7%	13,0%	8,7%	8,7%	47,8%

Анализ табл. 1-3 позволяет сделать следующие выводы: 1) применение на начальных этапах прогнозирования модели Брауна с весами Вейда для 19 исследованных рядов (82,6%) приводит к повышению точности одношагового прогноза; для 4 рядов (17,4%) модель Брауна с обычными весами оказалась точнее; 2) наибольшие значения разницы между показателями точности прогноза моделей Брауна с обычными весами и с весами Вейда имеют место при $\alpha = 0,1$ (от -55,84% до 42,30% для RMSE и от -2,36% до 15,02 для MAPE в зависимости от ряда); 3) по мере увеличения значения α разница между точностью моделей Брауна с обычными весами и с весами Вейда уменьшается; в частности, для MAPE разница более чем в 1% имеет место только в диапазоне значений α , рекомендованном Брауном ($0,1 \leq \alpha \leq 0,3$); для RMSE аналогичный диапазон шире; 4) для более чем половины рядов оптимальное значение α (как при использовании обычных весов, так и при использовании весов Вейда) оказалось либо в запредельном диапазоне ($\alpha = 1$; 47,8%), либо в близком к нему ($0,7 < \alpha \leq 0,9$; 8,7%).

Аналогичные результаты получены для $n = 10$. При этом разница между показателями точности при $n = 10$ меньше, чем при $n = 5$; количество рядов, для которых оптимальное значение равно 1, уменьшилось (39,1% для обычных весов, 34,8% для весов Вейда), количество рядов в близком к запредельному диапазону увеличилось (13,0% для обычных весов, 21,7% для весов Вейда).

8. Результаты исследования точности прогноза производства цельномолочной продукции. Результаты исследований точности прогноза производства цельномолочной продукции представлены на рис. 1-3 и в табл. 4.

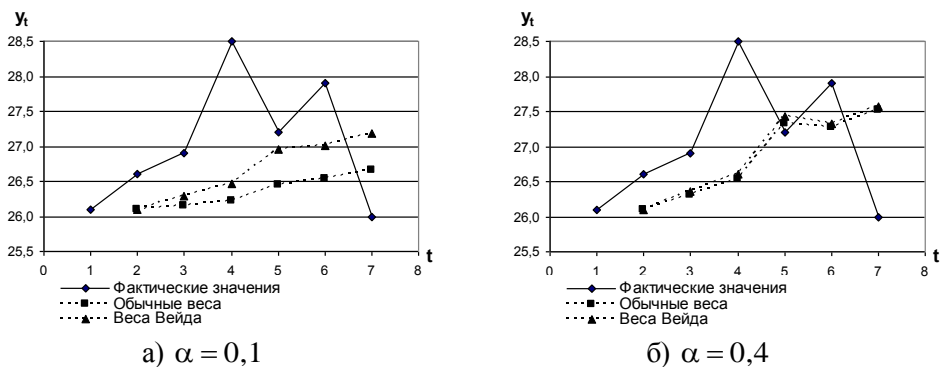


Рис. 1. Зависимость прогнозных значений от значения α при $n = 5$

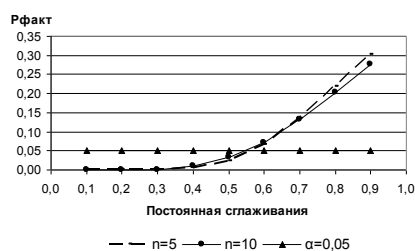


Рис. 2. Зависимость $p_{\text{факт}}$ от n

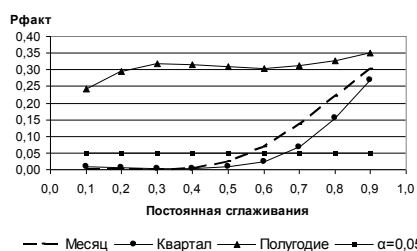


Рис. 3. Зависимость $p_{\text{факт}}$ от Δ_t ($n = 5$)

Таблица 4

Зависимость RMSE от расстояния между уровнями ряда и количества уровней

Расстояние между уровнями ряда	n	$\overline{\text{RMSE}}(B)$	$\overline{\text{RMSE}}(W)$	$\delta_{\text{max}}^{\text{RMSE}}$	$[\alpha_1, \alpha_2]$	$\bar{\delta}_{\text{RMSE}}$
Месяц	5	0,80	0,67	35,81	0,1-0,7	11,84
Квартал	5	1,21	1,18	11,45	0,1-0,4	2,56
Полугодие	5	7,60	7,85	-9,48	0,1-0,6	-3,19
Месяц	10	0,68	0,58	35,65	0,1-0,7	10,31
Квартал	10	2,49	2,40	13,21	0,1-0,3	2,43
Полугодие	10	6,59	6,76	-8,22	0,1-0,5	-2,47

Из рис. 1 видно, что уже при $\alpha = 0,4$ прогнозные значения по моделям Брауна для помесечных данных с обычными весами и с весами Вейда практически совпадают. На рис. 2 показана зависимость фактического уровня значимости ($p_{\text{факт}}$) при проверке гипотезы о совпадении прогнозов на основе

модели Брауна с обычными весами и с весами Вейда для помесячных данных от n . Из рис. 2 можно сделать вывод, что при $\alpha \approx 0,55$ прогнозы по этим моделям совпадают на уровне значимости, равном 0,05. Из рис. 3, на котором показана зависимость $p_{\text{факт}}$ для $n = 5$ от интервала времени между уровнями ряда (Δ_t), следует, что эта зависимость имеет нелинейный характер. Из табл. 4 следует, что увеличение интервала времени между уровнями ряда приводит к снижению точности прогноза и уменьшению разницы между прогнозами по моделям Брауна с обычными весами и весами Вейда.

9. Выводы. Проведенный сравнительный анализ точности моделей Брауна с обычными весами и весами Вейда на множестве реальных временных рядов экономических показателей позволяет сформулировать следующие выводы: 1) применение модели Брауна с весами Вейда на начальных этапах прогнозирования в большинстве случаев позволяет повысить точность прогноза; 2) существенная разница между точностью прогноза по моделям Брауна с обычными весами и с весами Вейда наблюдается в основном при $0,1 \leq \alpha \leq 0,3$; 3) на практике на начальных этапах прогнозирования при использовании весов Вейда можно рекомендовать выбирать значение параметра сглаживания в диапазоне $0,2 \leq \alpha \leq 0,3$ (такой выбор значения α позволит как получить определенный выигрыш в точности по сравнению с моделью Брауна с обычными весами, когда использование весов Вейда приводит к повышению точности (в большинстве случаев), так и приведет к незначительному уменьшению точности, когда применение весов Вейда приводит к снижению точности (в гораздо меньшем числе случаев)).

Список литературы

1. Лукашин, Ю.П. Адаптивные модели краткосрочного прогнозирования временных рядов [Текст]: учеб. пособие / Ю.П. Лукашин. М.: Финансы и статистика, 2003. 416 с.
2. Васильев, А.А. Методы выбора постоянной сглаживания в модели прогнозирования Брауна [Текст] / А.А. Васильев // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Экономика и управление. 2013. №17. С. 183-196.
3. Светульников, С.Г. Методы социально-экономического прогнозирования [Текст]: учеб. для вузов. Т. II. / С.Г. Светульников, И.С. Светульников. Спб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2010. 103 с.
4. Дуброва, Т.А. Статистический анализ и прогнозирование экономической динамики: проблемы и подходы [Текст] / Т.А. Дуброва // Методология статистического исследования социально-экономических процессов: монография / под ред. В.Г. Минашкина. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 110-138.
5. Производство важнейших видов продукции [Электронный ресурс] / Краткосрочные экономические показатели Тверской области. М.: Федеральная служба государственной статистики, 2016. URL: <http://www.gks.ru/region/ind1128/IssWWW.exe/Stg/d080/i010500r.htm> (дата обращения 20.09.2016).

INVESTIGATION OF BROWN'S MODEL WITH WADE'S WEIGHTING FACTORS FOR SHORT-TERM TIME SERIES FORECASTING

A.A. Vasiliev¹

¹Tver State University, Tver

In the issue results of investigation of prediction accuracy of Brown's model with Wade's weighting factors for short-term time series forecasting are presented. Performance indicators of manufacturing of key products in Tver region were used as such series. Results of investigation demonstrated that usage of Wade's weighting factors for small values of smoothing constant leads to increase of prediction accuracy in most of cases.

Keywords: *Wade's weighting factors; short-term time series; short-term forecast; Brown's model; performance indicators of manufacturing in Tver region; prediction accuracy.*

Об авторе:

ВАСИЛЬЕВ Александр Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой математики, статистики и информатики в экономике, Тверской государственный университет, (170000, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33), e-mail: vasiljev-tvgu@yandex.ru

About the authors:

VASIL'EV Aleksandr Anatol'evich – Philosophy Doctor in Engineering Science, Associate Professor, Head of Department of Mathematics, Statistics and Informatics in Economics, Tver State University, (33, Zhelaybova St., Tver, 170000), e-mail: vasiljev-tvgu@yandex.ru

References

1. Lukashin Ju.P. Adaptivnye modeli kratkosrochnogo prognozirovaniya vremennyh rjadov: ucheb. posobie. M.: Finansy i statistika, 2003. 416 s.
2. Vasil'ev A.A. Metody vybora postojannoj sglazhivaniya v modeli prognozirovaniya Brauna. Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Jekonomika i upravlenie. 2013. №17. S. 183-196.
3. Svetun'kov S.G., Svetun'kov I.S. Metody social'no-jekonomicheskogo prognozirovaniya: ucheb. dlja vuzov. T. II. Spb.: Izd-vo SPbGUJeF, 2010. 103 s.
4. Dubrova T.A. Statisticheskij analiz i prognozirovanie jekonomicheskoy dinamiki: problemy i podhody. Metodologija statisticheskogo issledovanija social'no-jekonomicheskikh processov: monografija. Pod red. V.G. Minashkina. M.: JuNITI-DANA, 2012. S. 110-138.
5. Proizvodstvo vazhnejshih vidov produkcii [Jelektronnyj resurs]. Kratkosrochnye jekonomicheskie pokazateli Tverskoj oblasti. M.: Federal'naja sluzhba gosudarstvennoj statistiki, 2016. URL: <http://www.gks.ru/region/ind1128/IssWWW.exe/Stg/d080/i010500r.htm> (data obrashhenija 20.09.2016).