

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 314.182, 519.86

ДИНАМИКА НАРОДОНАСЕЛЕНИЯ ТВЕРСКОЙ ОБЛАСТИ*

**Е.В. Беспалько¹, А.Н. Кудинов², С.А. Михеев³, В.П. Редчиц⁴,
В.Н. Рыжиков⁵, В.П. Цветков⁶, И.В. Цветков⁷**

¹⁻⁷Тверской государственный университет, г. Тверь

Исследована динамика народонаселения Тверского региона на основе нового демографического уравнения, содержащего три демографических параметра. Эти параметры найдены из условия минимального отклонения кривой расчетного тренда $y(t)$ в точках t_i от данных Росстата y_i по Тверской области. В результате получено соотношение, определяющее динамику численности народонаселения Тверской области. Дано обоснование процесса асимптотической стабилизации его на уровне 1, 19198 млн человек в течение 40–50 лет с 2017 г.

Ключевые слова: *демографическое уравнение, линия тренда, асимптотическая стабилизация, народонаселение, прогноз.*

В настоящее время (декабрь 2017 г.) численность населения Тверской области по данным Росстата составляет 1 296 799 человек [1]. Народонаселение Тверской области продолжает уменьшаться в силу наличия различных факторов [2]. Однако определенный оптимизм вызывает тот факт, что скорость уменьшения относительной численности народонаселения падает. Так в 1999 г. она была примерно 2 % в год, а в настоящее время составляет всего 0,5 % в год. Скорость роста или уменьшения народонаселения является одним из важнейших количественных показателей характеризующих качество жизни народонаселения в том или ином регионе России.

Многообразие сценариев и математических моделей динамики народонаселения, опирающихся на различные механизмы, влияющие на демографические процессы, ставит вопрос о построении реалистической математической модели динамики народонаселения, которая не зависит от всевозможных допущений и предположений.

В данной работе нами предлагается такая математическая модель, которая основана на использовании дифференциального уравнения для тренда численности народонаселения, содержащего три параметра, вариативность которых позволяет отразить многообразие сценариев демографической динамики.

1. Уравнения демографической динамики.

* Редакционная коллегия не в полной мере разделяет ряд методологических подходов, представленных авторами в статье.

В основе уравнений демографической динамики лежит соотношение между скоростью изменения тренда численности народонаселения $\dot{y}(t)$ и трендом численности народонаселения $y(t)$ (непрерывной и гладкой функции аппроксимирующей данные по численности народонаселения). Приведем некоторые из этих уравнений: $\dot{y} = ky$ (Мальтус [3]), $\dot{y} = ky^2$ (Х. фон Ферстер [4], С. фон Хернер [5], С.П. Капица [6]), $\dot{y} = \alpha y \left(1 - \frac{y}{M}\right)$ (Ферхюльст [7]), уравнения со стабилизацией численности народонаселения (С.П. Капица [8], А.В. Подлазов [9], С.В. Цирель [10], А.В. Коротаев, А.С. Малков, Д.А. Халтурина [11], А.А. Акаев, В.А. Садовничий [12]), уравнения мультифрактальной динамики (А.Н. Кудинов и др. [13]). Приведенные примеры, говорят о многообразии типов уравнений, используемых в демографии.

Для описания демографической динамики в данной работе предлагается использовать новое демографическое уравнение:

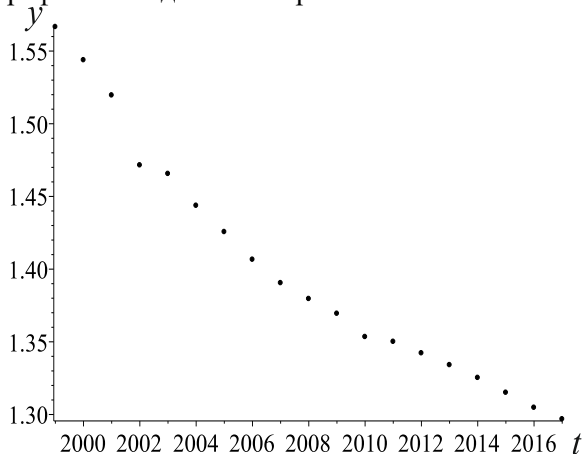
$$\dot{y} = \alpha y(\beta^m - y^m). \quad (1)$$

В отличие от вышеперечисленных уравнений демографической динамики уравнение (1) содержит три независимых параметра α, β, m , выбором которых можно описать гораздо больше демографических сценариев по сравнению с другими уравнениями и поэтому его вполне можно назвать реалистическим демографическим уравнением. Полагая $m = 0, \beta = 0, \alpha = -k$ получаем из (1) уравнение Мальтуса, при $m = 1, \beta = 0, \alpha = k$ – уравнение С. фон Хернера, С.П.Капицы, а при $m = 1, \beta \neq 0$ – уравнение Ферхюльста.

В уравнении (1) параметры α, β, m являются фундаментальными демографическими параметрами, которые являются постоянными для каждого демографического периода и значения которых определяются совокупностью экономических, социальных, политических и других факторов интересующей нас территориальной структуры. На стыке демографических периодов параметры α, β, m естественно меняются скачками. А переход из одного демографического периода в другой можно именовать демографическим фазовым переходом. При этом будем полагать, что численность народонаселения $y(t)$ и скорость его изменения $\dot{y}(t)$ являются в точке демографического фазового перехода $t_{ф.п.}$ непрерывными функциями времени t . Пусть при $t=0$ величина $y = y_0$ и $y_0 < \beta, \alpha > 0$, тогда $\beta = \beta_+ = y(t \rightarrow \infty)$ – предельное значение численности народонаселения при его росте. Если же $y_0 > \beta, \alpha > 0$, тогда $\beta = \beta_- = y(t \rightarrow \infty)$ – предельное значение численности народонаселения при его уменьшении. Величина и знак параметра α определяют, прежде всего, скорость роста или уменьшения численности народонаселения. Параметр m в уравнении (1) является степенным фактором и существенно определяет характер его решения. Поэтому естественно m назвать демографическим индексом, в значительной степени определяющим эволюцию демографического процесса.

Для описания демографической ситуации в Тверской области в последнее время (с 1999 г.) и в будущем после 2017 г. будем использовать предложенное нами уравнение (1), вычисляя параметры α, β, m из условия

наилучшего согласия с данными Росстата по Тверскому региону за это время [1], что принципиально отличает данный метод от других подходов. Таким образом, используя эти статистические данные, мы учитываем все многообразие демографических факторов (миграцию, экономические, политические, социальные, культурные, биологические и др.). Представим демографические данные на рис. 1.



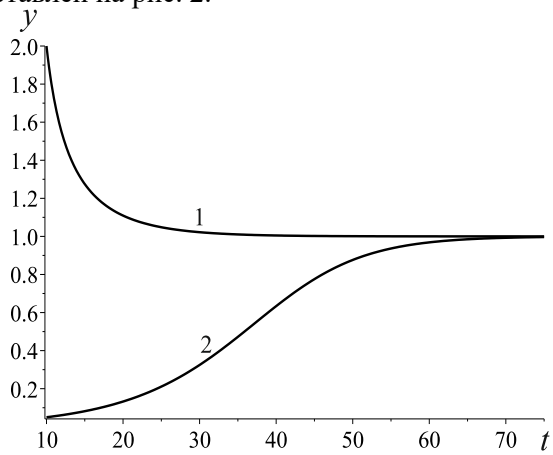
Р и с . 1. Зависимость численности народонаселения Тверской области от времени с 1999 по 2017 гг.

Математическая модель демографической динамики Тверской области

Отличительной особенностью уравнения (1) является возможность его интегрирования в простом виде. Решение уравнения (1) имеет вид:

$$y = \frac{\beta}{\left[1 + \left(\frac{\beta^m}{y_0^m} - 1 \right) e^{-m\alpha\beta^m t} \right]^{\frac{1}{m}}} \quad (2)$$

Чтобы наглядно представить поведение функции $y(t)$ в (2), построим ее график для двух качественно различных случаев $y_0 < \beta, \alpha > 0$ кривая 1 и $y_0 > \beta, \alpha > 0$ кривая 2. Этот график представлен на рис. 2.



Р и с . 2. Графики решения уравнения (1)

Из рис. 2 видно, что два демографических сценария описываются функцией (2). В первом случае при $y_0 > \beta, \alpha = 0,1; m = 1,5$ функция $y(t)$, монотонно убывая, стремится к асимптотически постоянному значению равному $\beta = 1$. Во втором случае $y_0 < \beta, \alpha = 0,1; m = 1,5$ функция $y(t)$, монотонно возрастающая, стремится к асимптотически постоянному значению равному $\beta = 1$.

Поскольку из рис.1 следует, что народонаселение Тверской области убывает со временем, то для математического моделирования этого процесса мы должны выбрать параметр β меньше значения y_0 равному 1566617 человек, которое имела Тверская область в 1999 г. по данным Росстата [1].

Демографические параметры α, β, m в уравнении (1) имеют простой смысл. Как отмечалось ранее параметр β это, в нашем случае, предельное значение населения Тверского региона, к которому оно будет стремиться через несколько десятков лет. Чтобы оценить этот промежуток времени введем параметр τ . Тогда зависимость от времени в формуле (2) будет определяться экспоненциальным фактором $e^{-\frac{t}{\tau}}$. Отсюда следует, что τ – характерный промежуток времени на котором изменяется заметно численность народонаселения Тверской области, оценку которого мы проведем ниже.

Демографические параметры α, β, m в уравнении (1) будем находить из условия минимального отклонения кривой тренда $y(t)$ в точках t_i от данных Росстата y_i по Тверской области, представленных на рис. 1. Для этого введем положительно определенную функцию Λ , определяющую это отклонение:

$$\Lambda = \sum_{i=0}^N \left(y_i - \frac{\beta}{\left[1 + \left(\frac{\beta^m}{y_0^m} - 1 \right) e^{-m\alpha\beta^m(t_i-1999)} \right]^{\frac{1}{m}}} \right)^2 \quad (3)$$

Из (3) видно, что Λ является функцией параметров α, β, m, y_0 , т.е.

$\Lambda = \Lambda(\alpha, \beta, m, y_0)$. Тогда из условия минимизации Λ следуют четыре уравнения для нахождения параметров α, β, m, y_0 :

$$f_1 = \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} = 0, f_2 = \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} = 0, f_3 = \frac{\partial \Lambda}{\partial m} = 0, f_4 = \frac{\partial \Lambda}{\partial y_0} = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) удобно представить в векторной форме;

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha, \beta, m, y_0)$. Тогда система нелинейных алгебраических уравнений (4) может быть записана в векторной форме:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0. \quad (5)$$

Вследствие возможной плохой обусловленности матрицы Якоби $\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \mathbf{f}'$, (i, k=1,2,3,4) для численного решения уравнения (5) будем использовать регуляризованный аналог метода Ньютона [14] с параметром регуляризации $\varepsilon = 10^{-6}$. Согласно этому методу имеем следующую итерационную схему:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \tau_k \left(\alpha \mathbf{f}^2(\mathbf{x}^{(k)}) + \tilde{\mathbf{f}}'(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^{-1} \tilde{\mathbf{f}}'(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (6)$$

где k – номер итерации, $\tau_k (\Theta_0 \leq \tau_k \leq 1)$ – итерационный параметр,

$f'(x^{(k)})$ – матрица Якоби, $\tilde{f}'(x^{(k)})$ – транспонированная матрица Якоби.

Величина $\sqrt{f^2(x^{(k)})} = \delta_k$ представляет собой невязку и определяет точность решения системы уравнений (5).

Большую роль в сходимости итерационной процедуры (6) играет выбор начального приближения $x^{(0)}$ и оптимальный выбор итерационного параметра τ_k . Выбор начального приближения $x^{(0)}$ определяется рельефом функции $\Lambda(x)$ вблизи абсолютного минимума этой функции. Существование абсолютного минимума следует из положительной определенности этой функции.

С этой целью, фиксируя значения β, y_0 построим графики функций $\Lambda = \Lambda(\alpha, \beta)$ и $\Lambda = \Lambda(\alpha, m)$. Приведем их на рис 3,4.

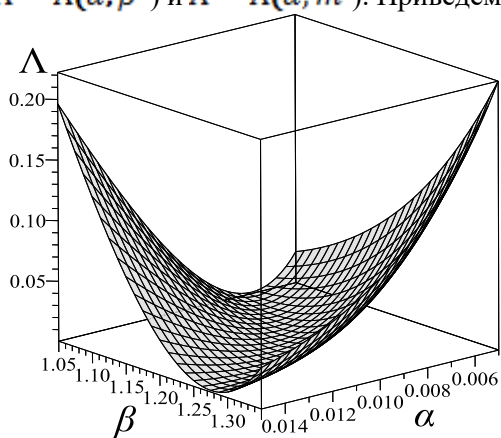


Рис. 3. График функции $\Lambda = \Lambda(\alpha, \beta)$

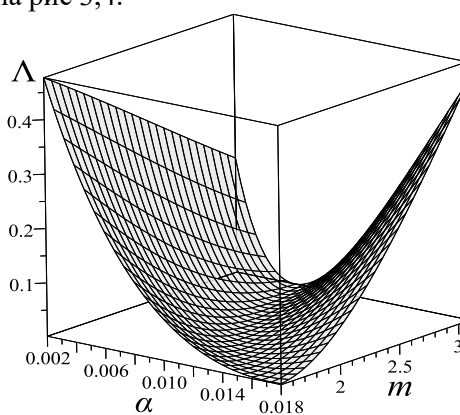


Рис. 4. График функции $\Lambda = \Lambda(\alpha, m)$

Для расчета по схеме (6) была составлена программа в пакете MAPLE. Выбранная схема вычислений оказалась эффективной поскольку число итераций составило несколько десятков при достижении значения $\delta = 10^{-25}$.

В качестве начального приближения возьмем значения $y_0 = 1,570$, $\alpha = 0,03$, $\beta = 1, m = 1,5$. В результате вычислений получаем значения демографических параметров Тверской области: значения $y_0 = 1,5710$, $\alpha = 0,007959$, $\beta = 1,1998$, $m = 3,4174$. При этом максимальное отклонение $\rho = \max |y_i - y(t_i)|$ ($i = \overline{0, N}$) численности населения Тверского региона с 1999 по 2017 гг. от расчетной линии тренда оказалось равным 0,01313 млн. человек.

Результаты проведенных расчетов дают аналитическую зависимость тренда численности народонаселения Тверского региона от времени, начиная с 1999 г.

$$y(t) = \frac{1,1998}{\left[1 - 0,6019e^{-\frac{t-1999}{19,7270}}\right]^{0,2926}} \quad (7)$$

Из (7) следует величина τ характерного времени скорости стабилизации численности народонаселения Тверской области, которое согласно нашим вычислениям прогнозируется на уровне 1,19198 млн. человек. Оно равно $\tau = 19,7270$ лет. Подставляя в (7) $t = 1999 + 19,7270$, получаем, что народонаселение Тверского региона с 1,5710 млн. человек в 1999 г. уменьшилось за период времени τ до 1,2909 млн. человек, что составляет 82 % от численности народонаселения Тверской области в 1999 г.

Из этих оценок следует, что темп уменьшения народонаселения Тверской области за примерно 20 лет составил 18 % от значения в 1999 г. За рассматриваемый период времени народонаселение Тверской области должно составлять по нашим вычислениям 1,2300 млн. человек, что отличается на 2,5% процента от стабилизационного значения численности народонаселения Тверского региона. Проведенные оценки указывают, что за период времени в 40 лет с 1999 г. (23 года с 2017 г.) должен наступить период стабильности численности народонаселения Тверской области.

Для наглядности прогноз динамики населения динамики Тверского региона составленный на основе формулы (7) приведем в табл. 1.

Таблица 1
Прогноз динамики населения динамики Тверского региона

Дата	Расчетная (прогнозная) численность населения Тверской области в млн. человек	Расчетные (прогнозные) темпы убывания численности населения Тверской области в тыс. человек.
2017	1.3010	
2022	1.2750	26,0
2027	1.2563	18,7
2032	1.2426	13,7
2037	1.2325	10,1
2042	1.2248	7,7

Табл. 1 показывает уменьшение темпов убывания прогнозной численности населения Тверской области с 2017 г. Если за первую пятилетку от 2017 г. население должно уменьшиться на 26 тыс., то за пятую – всего лишь на 7,7 тыс. человек.

Визуализация тренда демографической динамики Тверского региона $y(t)$ дает наглядное представление о характере демографических процессов с 1999 года, который представлен на рис. 5. Как видим из рис. 5, прогнозная кривая численности населения Тверской области $y(t)$ асимптотически приближается к своему предельному значению 1 млн 199,8 тыс. человек. Время стремления с 2017 г. к этому значению составляет примерно 40 лет. Это означает, что стабилизация численности населения Тверской области должна произойти в основном до 2057 г. В этом году скорость убывания численности народонаселения будет составлять только 0,4 % в год, а далее еще меньше.

Объективным показателем демографической динамики является функция относительной скорости убывания народонаселения $\left| \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} \right|$, график которой приводится на рис. 6 в процентах.

Из графика, приведенного на рис. 6 видно, что если в начале 2000 г. относительная скорость убывания народонаселения Тверского региона составляла 2 % и выше, в 2017 г. – 0,5 %, то к 2030 г. прогнозируемая ее величина составит 0,2 %. Это говорит о том, что основной период стабилизации народонаселения в Тверском регионе должен завершиться в ближайшем будущем.

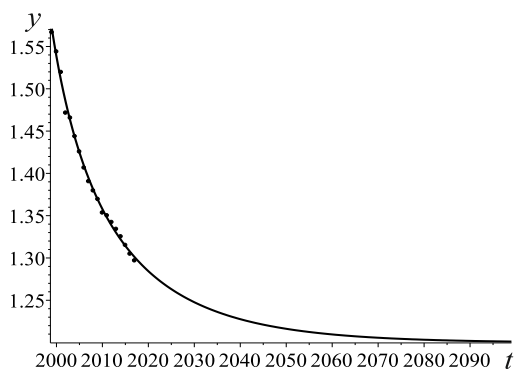


Рис. 5. График тренда численности народонаселения Тверской области

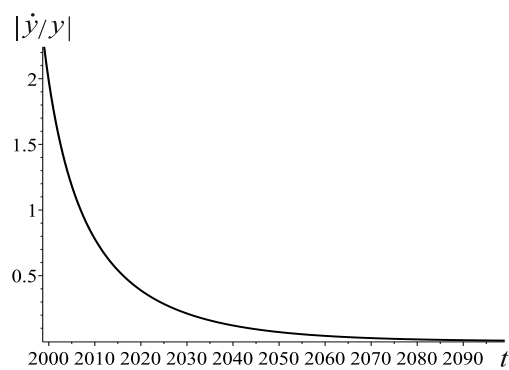


Рис. 6. График относительной скорости убывания народонаселения Тверской области

Критерием точности предлагаемой нами демографической модели будет степень уклонения данных Росстата от расчетных значений данной модели.

Таким образом, для описания демографической динамики предлагается использовать новое реалистическое демографическое уравнение, связывающее скорость убывания (роста) народонаселения с его величиной. В нашем подходе демографические параметры α, β, m вычисляются из условия наилучшего согласия с данными Росстата по Тверскому региону (система уравнений (5)), что принципиально отличает данный метод от других общепринятых подходов. Таким образом, используя имеющиеся статистические данные, мы учитываем через эти данные все многообразие демографических факторов (миграцию, экономические, политические, социальные, культурные, биологические и др.).

Результаты проведенных расчетов дают аналитическую зависимость (7) тренда численности народонаселения Тверского региона от времени, начиная с 1999 г.

Из формулы (7) вытекает, что должна иметь место асимптотическая стабилизация населения Тверского региона на уровне 1, 19198 млн. человек.

Наши оценки указывают, что за период времени в 40 лет с 1999 г. (23 года с 2017 г.) должен наступить период стабильности численности народонаселения Тверской области.

Сделанные нами выводы справедливы только для постоянных значений демографических параметров α, β, m , которые определяются совокупностью

экономических, социальных, политических и других факторов Тверского региона. При более благоприятных условиях, чем в настоящее время, фактор стабилизации народонаселения Тверского региона может вполне смениться фактором роста. Для этого надо чтобы значение демографического параметра β стало равным 1,6.

Список литературы

1. Население Тверской области. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Население_Тверской_области (дата обращения: 02.12.17).
2. Правительство Тверской области. Официальный сайт. URL: <http://www.region.tver.ru/sotsialnaya-sfera/demograficheskaya-politika/obshchie-svedeniya/?print=y> (дата обращения: 10.12.17).
3. Мальтус Т. Опыт о законе народонаселения. Шедевры мировой экономической мысли. Петрозаводск: Петроком, 1993. Т. 4. 139 с.
4. Foerster H. von, Mora P., Amiot L. Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millennia // *Science*, 1960. V. 132. P. 1291–1295.
5. Hoerner S.J. von. Population Explosion and Interstellar Expansion // *Journal of the British Interplanetary Society*, 1975. 28: 691–712.
6. Капица С.П. Математическая модель роста народонаселения мира // *Матем. моделирование*, 1992. Т.4. № 6. С. 65–79.
7. Verhulst P.F. Recherches Mathématiques sur La Loi D'Accroissement de la Population (Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase) // *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, 1845, 18: Art. 1. С. 1–45.
8. Капица С.П. Феноменологическая теория роста населения Земли // *Успехи физ. наук*, 1996, т. 166. № 1. С. 63–80;
9. Капица С.П. Общая теория человечества. Как рос и куда идёт мир человека. Второе издание. М.: Москва, 2009. 120 с.
10. Подлазов А.В. Теоретическая демография как основа математической истории. М.: ИПМ РАН, 2000.
11. Tsirel S.V. On the Possible Reasons for the Hyperexponential Growth of the Earth Population // *Mathematical Modeling of Social and Economic Dynamics*. 2004. P. 367–369.
12. Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А. Компактная математическая модель технико-экономического и демографического развития Мир-Системы (1-1973 гг.) // *История и синергетика: Математическое моделирование социальной динамики / Ред. С.Ю. Малков и А.В. Коротаев. М.: КомКнига/URSS, 2005. С. 6–48.*
13. Акаев А.А., Садовничий В.А.. Математическая модель демографической динамики со стабилизацией численности населения мира вокруг стационарного уровня // *Доклады Академии Наук*, 2010, Т. 435. № 3. С. 320–324.
14. Кудинов А.Н., Круглов К.В., Рыжиков В.Н., Цветков В.П., Цветков И.В. Тенденции и прогнозирование роста народонаселения России и Тверской области в модели мультифрактальной динамики // *Вестник ТвГУ. Серия "Экономика и управление"*, 2015. № 1. Т. 2. С. 145–153.
15. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н.. Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // *Журн. вычисл. матем. и мат. физ.* 1981, Т. 21. № 2. С. 419–497.

POPULATION DYNAMICS IN TVER REGION

**E.V. Bepalko¹, A.N. Kudinov², S.A. Mikheev³, V.P. Redchitch⁴, V.N. Ryzikov⁵,
V.P. Tsvetkov⁶, I.V. Tsvetkov⁷**

¹⁻⁷Tver state University

The paper studies the dynamics of the population of the Tver region on the basis of a new demographic equation containing three demographic parameters. These parameters are found from the condition of minimum deviation of the calculated trend curve $y(t)$ at points t_i from the Rosstat data y_i in the Tver region. As a result, a correlation was obtained that determines the dynamics of the population of the Tver region. The justification of the process of its asymptotic stabilization at the level of 1, 19198 million people for 40-50 years from 2017 is given.

Key words: *demographic equation, trend line, asymptotic stabilization, population, forecast.*

Об авторах:

БЕСПАЛЬКО Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, Тверской государственный университет, доцент кафедры общей математики и математической физики ТвГУ, 8-4822-341684, be80@list.ru;

КУДИНОВ Алексей Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственный университет, директор Научного образовательного центра «Математическое моделирование» ТвГУ, 8-4822-341684, mathlab@mail.ru;

МИХЕЕВ Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, Тверской государственный университет, доцент кафедры общей математики и математической физики ТвГУ, 8-4822-341684, sergjan800@rambler.ru;

РЕДЧИЦ Валерий Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Тверской государственный университет, доцент кафедры общей математики и математической физики ТвГУ, 8-4822-341684, Redchits.VP@tversu.ru

РЫЖИКОВ Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Тверской государственный университет, доцент кафедры общей математики и математической физики ТвГУ, 8-4822-341684, vlnr@mail.ru,

ЦВЕТКОВ Виктор Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственный университет, заведующий кафедрой общей математики и математической физики ТвГУ, 8-4822-341684, tsvet@tvesu.ru;

ЦВЕТКОВ Илья Викторович – доктор технических наук, Тверской государственный университет, профессор кафедры экономики предприятий и менеджмента ТвГУ, 8-4822-341684, mancu@mail.ru

About the authors:

BESPAL'KO Evgenij Valer'evich – candidate of Physical and Mathematical Sciences, Tver State University, Associate Professor of the Department of General Mathematics and Mathematical Physics, Tver State University, 8-4822-341684, be80@list.ru;

KUDINOV Aleksej Nikiforovich – Doctor in Physics and Mathematics Sciences, Professor, Tver State University, Head of Research and Educational Centre of Mathematically Modelling, 8-4822-341684, mathlab@mail.ru;

MIHEEV Sergej Aleksandrovich – candidate of Physical and Mathematical Sciences, Tver State University, Associate Professor of the Department of General Mathematics and Mathematical Physics, Tver State University, 8-4822-341684, sergjan800@rambler.ru;

REDChIC Valerij Petrovich – candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Tver State University, Associate Professor of the Department of General Mathematics and Mathematical Physics, Tver State University, 8-4822-341684, Redchits.VP@tversu.ru;

RYZHIKOV Vladimir Nikolaevich – candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Tver State University, Associate Professor of the Department of General Mathematics and Mathematical Physics, Tver State University, 8-4822-341684, vlnr@mail.ru;

CVETKOV Viktor Pavlovich – Doctor in Physics and Mathematics Sciences, Professor, Tver State University, Head of Department of General Mathematics and Mathematical Physics, 8-4822-341684, tsvet@tvesu.ru;

CVETKOV Il'ja Viktorovich – Doctor in Engineering, Tver State University, Professor of the Department of Economics of Enterprises and Management of Tver State University, 8-4822-341684, mancu@mail.ru,

References

1. Naselenie Tverskoj oblasti. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Naselenie_Tverskoj_oblasti (data obrashhenija: 02.12.17).
2. Pravitel'stvo Tverskoj oblasti. Oficial'nyj sajt. URL: <http://www.region.tver.ru/sotsialnaya-sfera/demograficheskaya-politika/obshchie-svedeniya/?print=y> (data obrashhenija: 10.12.17).
3. Mal'tus T. Opyt o zakone narodonaselenija. Shedevry mirovoj jekonomicheskoy mysli. Petrozaovodsk: Petrokom, 1993. T. 4. 139 s.
4. Foerster H. von, Mora P., Amiot L. Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millennia // Science, 1960. V. 132. P. 1291–1295.
5. Hoerner S.J. von. Population Explosion and Interstellar Expansion // Journal of the British Interplanetary Society, 1975. 28: 691–712.
6. Kapica S.P. Matematicheskaja model' rosta narodonaselenija mira // Matem. modelirovanie, 1992. T.4. № 6. S. 65–79.
7. Verhulst P.F. Recherches Mathématiques sur La Loi D'Accroissement de la Population (Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase) // Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 1845, 18: Art. 1. S. 1–45.
8. Kapica S.P. Fenomenologicheskaja teorija rosta naselenija Zemli // Uspehi fiz. nauk, 1996, t. 166, № 1, S. 63–80;

9. Капца S.P. Obshhaja teorija chelovechestva. Kak ros i kuda idjot mir cheloveka. Vtoroe izdanie. M.: Moskva, 2009. 120 s.
10. Podlazov A.V. Teoreticheskaja demografija kak osnova matematicheskaj istorii. M.: IPM RAN, 2000.
11. Tsirel S.V. On the Possible Reasons for the Hyperexponential Growth of the Earth Population // *Mathematical Modeling of Social and Economic Dynamics*. 2004. P. 367–369.
12. Korotaev A.V., Malkov A.S., Halturina D.A. Kompaktnaja matematicheskaja model' tehniko-jekonomicheskogo i demograficheskogo razvitija Mir-Sistemy (1-1973 gg.) // *Istorija i sinergetika: Matematicheskoe modelirovanie social'noj dinamiki* / Red. S.Ju. Malkov i A.V. Korotaev. M.: KomKniga/URSS, 2005. S. 6–48.
13. Akaev A.A., Sadovnichij V.A.. Matematicheskaja model' demograficheskaj dinamiki so stabilizaciej chislennosti naselenija mira vokrug stacionarnogo urovnja // *Doklady Akademii Nauk*, 2010. T. 435. № 3. S. 320–324.
14. Kudinov A.N., Kruglov K.V., Ryzhikov V.N., Cvetkov V.P., Cvetkov I.V. Tendencii i prognozirovanie rosta narodonaselenija Rossii i Tverskoj oblasti v modeli mul'tifraktal'noj dinamiki // *Vestnik TvGU. Serija "Jekonomika i upravlenie"*, 2015. № 1. T. 2. S. 145–153.
15. Ermakov V.V., Kalitkin N.N.. Optimal'nyj shag i reguljarizacija metoda N'jutona // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiz.* 1981, T. 21. № 2. S. 419–497.