УДК 519.7

# НЕОДНОРОДНАЯ ИГРА «НАПАДЕНИЕ-ОБОРОНА» НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО ПРИНЦИПА УРАВНИВАНИЯ

**Перевозчиков А.Г.**[*], **Решетов В.Ю.**[**], **Лесик А.И.**[***]
[*] НПО «РусБИТех», г. Тверь
[**] МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
[***] Тверской государственный университет, г. Тверь

*Поступила в редакцию 13.09.2017, после переработки 09.01.2018.*

Работа обобщает игру «нападение-оборона» Ю.Б. Гермейера в части учета неоднородности ресурсов сторон и основана на обобщенном принципе уравнивания П.С. Краснощекова, что приводит в общем случае к выпуклым задачам на связный минимакс, которые могут быть решены методом субградиентного спуска. Классическая модель «нападение-оборона» Ю.Б. Гермейера является модификацией модели О. Гросса. В работе В.Ф. Огарышева исследована игровая модель, обобщающая модели Гросса и Гермейера. В работе Д.А. Молодцова изучалась модель Гросса с непротивоположными интересами сторон, в работах Т.Н. Данильченко, К.К. Масевич и Б.П. Крутова — динамические расширения модели. В военных моделях пункты интерпретируются обычно как направления и характеризуют пространственное распределение ресурсов защиты по ширине. Однако реально имеет место также пространственное распределение ресурсов обороны по глубине, характеризующейся количеством уровней обороны на данном направлении.

Дальнейшее обобщение модели «нападение-оборона» может состоять в учете неоднородности средств сторон через соответствующее изменение вероятности воздействия на каждом уровне обороны, которое в свою очередь есть результат решения соответствующей задачи целераспределения. Это приводит, в общем случае, к задачам на минимакс со связанными ограничениями для определения гарантированного результата обороны, пример которого дает игра «нападение-оборона» с неоднородными ресурсами сторон, основанная на обобщенном принципе уравнивания, поставленная и изученная в настоящей работе.

**Ключевые слова:** игра Гермейера «нападение-оборона», обобщенный принцип уравнивания, неоднородные ресурсы сторон, целераспределение на основе обобщенного принципа уравнивания, неоднородная игра «нападение-оборона», наилучший гарантированный результат обороны, минимаксная стратегия обороны, смешанная стратегия нападения.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 1. С. 89–106.*
https://doi.org/10.26456/vtpmk495

**Введение**

Работа основана на результатах из [10] и является дальнейшим развитием построений в [11,12]. Классическая модель «нападение-оборона» Ю.Б. Гермейера была определена и изученная в работе [2]. Она является модификацией модели О. Гросса [1], в которой функция выигрыша нападения имеет вид:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} k_i \max{[x_i - y_i; 0]},$$

где $x_i$ и $y_i$ — количество средств нападения и обороны на $i$-м пункте, $i = 1, ..., n$, а $k_i$ — интерпретируются, как важность пунктов. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором

$$y = (y_1, ..., y_n) \in Y = \{ y| \sum_{i=1}^{n} y_i = B, y_i \geqslant 0, i = 1, ..., n\} .$$

Стратегия нападения состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$x = (x_1, ..., x_n) \in X = \{ x| \sum_{t=1}^{n} x_i = A, X_i \geqslant 0, i = 1, ..., n\} .$$

Здесь $A, B$ — общее количество средств нападения и обороны.

В работе [18] исследована игровая модель, обобщающая модели Гросса и Гермейера. В работе [3] изучалась модель Гросса с непротивоположными интересами сторон, в работах [4,5] — гарантированный результат обороны с произвольными выпуклыми аддитивными функциями выигрыша в условиях целочисленности переменных, в работах [6,7] — динамические расширения модели. В военных моделях пункты интерпретируются обычно как направления и характеризуют пространственное распределение ресурсов защиты по ширине. Однако реально имеет место также пространственное распределение ресурсов обороны по глубине, характеризующейся количеством уровней обороны на данном направлении.

В работе [10] изучалась простейшая модель многоуровневой системы обороны на заданном направлении. Эта модель представляет собой частный случай задачи дискретного оптимального управления (ОПУ) терминального типа и может быть решена методом градиентного спуска. Главной проблемой является недифференцируемость функций в правых частях уравнения движения по совокупности переменных, что делает некорректным использование классических результатов о дифференцируемости терминального критерия и построения его градиента на основе сопряженной системы.

Для решения этой проблемы было предложено использовать процедуру осреднения функций в правых частях уравнения движения по схеме [9] с рандомизацией, основанной на дифференциальных свойствах функции связанного максимума [8]. По вычислительной сложности полученный метод стохастического градиентного спуска будет эквивалентен методу градиентного спуска, но в отличие от него корректен.

В работе [11] дополнительно учитываются вероятности воздействия на каждом уровне обороны, определяемые формулой Эрланга, которая может быть аппроксимирована отношением двух нормальных функции распределения. В результате критерий становится дифференцируемой функцией, что позволяет вернуться к общей минимаксиминной задаче распределения ресурсов защиты по направлениям и уровням защиты. В работе [12] эти результаты получают дальнейшее развитие в части учета предварительного подавления средств обороны нападением. В работе [19] исследована игра обобщение игры «нападение-оборона» на случай многорубежной обороны на каждом направлении. В работе [20] изучалась игра Гермейера с общими ограничениями, позволяющими учесть возможность действия средств обороны на тех или иных рубежах.

Дальнейшее обобщение модели «нападение-оборона» может состоять в учете неоднородности средств сторон через соответствующее изменение вероятности воздействия на каждом уровне обороны, которое в свою очередь есть результат решения соответствующей задачи целераспределения. Это приводит, в общем случае, к задачам на минимакс со связанными ограничениями для определения гарантированного результата обороны, пример которого дает игра «нападение-оборона» с неоднородными ресурсами сторон, основанная на обобщенном принципе уравнивания, поставленная и изученная в настоящей работе.

Актуальность исследования определяется тем, что применение игры «оборона-нападение» на практике ограничено предположением об однородности средств нападения обороны и нападения, что представляется мало реалистичным.

Идейно работа опирается на модель целераспределения П.С.Краснощекова, предложенную в [14]. Основные результаты работы состоят в обобщении классических результатов [2] на неоднородный случай. Поскольку функция выигрыша в построенной двусторонне неоднородной модели не является выпуклой, то схема, использованная в работе [2], не проходит и для доказательства того, что нападению выгодно сосредоточить свои силы на одном направлении, и приходится использовать схему, предложенную Д.А. Молодцовым в работе [21].

## 1. Односторонне неоднородная игра «нападение-оборона»

Пусть $R_k^i \geqslant 0$ — количество средства нападения, которое может уничтожить одна единица средств обороны $k$-го типа на $i$-м направлении, $k = 1, ..., m; i = 1, ..., n$. Обозначим через $R_i$ $m$-мерный вектор-столбец с координатами $R_k^i, k = 1, ..., m$. Пусть $U_k^i \geqslant 0$ — количество средств обороны $k$-го типа, назначенных на $i$-е направление, $k = 1, ..., m; i = 1, ..., n$. Обозначим через $U_i$ $m$-мерный вектор-столбец с координатами $U_k^i, k = 1, ..., m$. Требуется решить антагонистическую игру с функцией выигрыша нападения, представляющей собой общее количество прорвавшихся средств нападения:

$$f(X, U) = \sum_{i=1}^{n} \max\{0, X_i - \langle R_i, U_i \rangle\}, \tag{1}$$

где $X_i$ — количество однородных средств нападения на $i$-м направлении.

Пусть $Y$ и $V_k$ — количество средств нападения и обороны по типам $k = 1, 2, ..., m$. Обозначим через $V$ $m$-мерный вектор-столбец с координатами $V_k$,

$k = 1, ..., m$. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором

$$U = (U_1, ..., U_n) \in B(V) = \{ U | \sum_{i=1}^{n} U_i = V, U_i \geqslant 0, i = 1, ..., n \} . \tag{2}$$

Стратегия нападения состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$X = (X_1, ..., X_n) \in A(Y) = \{ X | \sum_{t=1}^{n} X_i = Y, X_i \geqslant 0, i = 1, ..., n \} . \tag{3}$$

Используя выпуклость функции $f(X, U)$ по $X, U$, для этой антагонистической игры можно утверждать (см., теорему 5.4 в [15, стр. 54]), что наилучший гарантированный результат обороны

$$\bar{v} = \min_{U \in B(V)} \max_{X \in A(Y)} f(X, U) = \min_{U \in B(V)} \max_{i=1,...,n} f\left(X^{(i)}, U\right) \tag{4}$$

будет совпадать со значением $v$ игры и минимаксная стратегия обороны оптимальна. Здесь $X^{(i)} = (0, ..., Y, ...0)$, где $Y$ стоит на $i$-м месте, а остальные координаты равны нулю. Займемся исследованием этой игры в чистых и смешанных стратегиях, следуя схеме [15].

## 2. Исследование односторонне неоднородной игровой модели

### *2.1 Минимаксная стратегия обороны*

**Лемма 1.** *Наилучший гарантированный результат обороны определяется формулой*

$$\bar{v} = \max(0; Y - \max_{U \in B(V)} \min_{i=1,2,...,n} \langle R_i, U_i \rangle).$$

*Доказательство.* В силу (4) справедливо равенство:

$$\bar{v} = \min_{U \in B(V)} \max_{i=1,2,...,n} F(X^{(i)}, U) = \min_{U \in B(V)} \max_{i=1,2,...,n} \max(0; Y - \langle R_i, U_i \rangle).$$

Переставляя местами два последних оператора максимума, что возможно в силу независимости соответствующих дискретных переменных, получим:

$$\min_{U \in B(V)} \max_{i=1,2,...,n} \max(0; Y - \langle R_i, U_i \rangle) = \min_{U \in B(V)} \max(0; Y - \min_{i=1,2,...,n} \langle R_i, U_i \rangle).$$

Первое выражение под знаком максимума не зависит от $U$, поэтому минимум по $U$ достигается при минимуме второго выражения и мы приходим к выражению:

$$\min_{U \in B(V)} \max(0; Y - \min_{i=1,2,...,n} \langle R_i, U_i \rangle) = \max(0; Y - \max_{U \in B(V)} \min_{i=1,2,...,n} \langle R_i, U_i \rangle).$$

Лемма доказана. □

*Замечание* 1. Согласно принципу уравнивания П.С. Краснощекова (см. [14], стр. 356) обобщающему принцип уравнивания Ю.Б. Гермейера (см. [13], стр. 312) на неоднородные ресурсы обороны в линейном случае, существуют такие $U \in \tilde{B}(V) = Arg \max\limits_{U \in B(V)} \min\limits_{i=1,2,...,n} \langle R_i, U_i \rangle$, что верно равенство:$\langle R_i, U_i \rangle = \lambda = const$. Если же $R_{ik} > 0$, то любые $U \in \tilde{B}(V)$ удовлетворяют этому условию.

*2.2 Смешанная стратегия нападения*

Рассмотрим смешанную стратегию вида:

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 I_{X^{(i)}}, \sum_{i=1}^{n} p_i^0 = 1, p_i^0 \geqslant 0, i = 1, 2, ..., n,$$

где $I_{X_{(i)}}$ — вероятностная мера, сосредоточенная в точке $X^{(i)}$. Чтобы стратегия $\phi_0$ являлась оптимальной достаточно проверить неравенство $F(\phi_0, U) \geqslant v = \bar{v}$ для любого $U \in B$, поскольку второе неравенство, определяющее седловую точку, вытекает из того, что оптимальной является минимаксная стратегия $U*$:

$$F(X, U*) \leqslant \max_{X \in A} F(X, U*) = \min_{U \in B} \max_{X \in A} F(X, U) = \bar{v} = v.$$

**Лемма 2.** *Для того чтобы стратегия $\phi_0$ была оптимальной смешанной стратегией нападения достаточно, чтобы*

$$p^0 \in Arg \min_{p \in \Lambda_n} \max_{U \in B(V)} \sum_{i=1}^{n} p_i \langle R_i, U_i \rangle ; \Lambda_n = \left\{ p \in E^n \middle| \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \geqslant 0 \right\}.$$

*Доказательство.* Справедлива цепочка равенств и неравенств:

$$\begin{gathered} F(\phi_0, U) = \int\limits_A F(X, U) d\phi_0(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(X^{(i)}, U) = \\ = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \max(0, Y - \langle R_i, U_i \rangle) \geqslant \max\left(0, Y - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \langle R_i, U_i \rangle\right). \end{gathered}$$

Поскольку билинейная функция $W(p, U) = \sum_i p_i \langle R_i, U_i \rangle$ под знаком максимума имеет седловую точку, то справедлива цепочка равенств и неравенств:

$$\begin{gathered} W(p^0, U) \leqslant \max_{U \in B(V)} W(p^0, U) = \min_{p \in \Lambda_n} \max_{U \in B(V)} W(p, U) = \\ = \max_{U \in B(V)} \min_{p \in \Lambda_n} W(p, U) = \max_{U \in B(V)} \min_{i=1,2,...,n} \langle R_i, U_i \rangle = \lambda, \end{gathered}$$

откуда и следует оптимальность $\phi_0$:

$$\max\left(0, Y - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \langle R_i, U_i \rangle\right) \geqslant \max(0, Y - \lambda) = \bar{v}.$$

Лемма доказана. □

## 3. Двусторонне неоднородная игра «нападение-оборона» на основе обобщенного принципа уравнивания

### *3.1 Целераспределение на основе обобщенного принципа уравнивания*

Предположим, что $j = 1, 2, ..., l$ — означает тип средств нападения на одном направлении, а $X_j > 0$ — их количество. Тогда вероятность поражения средств нападения любого типа на данном направлении можно найти по формуле $P_0 = \min(1, \bar{\lambda})$, где

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(Y, V) = \max_{U \in B(V)} \min_{j=1,2,...,l} \langle R_j, U_j \rangle / X_j.$$

Нам удобнее будет считать далее, что ограничения в определении множества $B(V)$ в (2) заданы в виде неравенства

$$U = (U_1, ..., U_l) \in B(V) = \{U | \sum_{j=1}^{l} U_j \leqslant V, U_j \geqslant 0, i = 1, ..., n\},$$

что эквивалентно (2) в силу неубывания функции минимума в определении функции $\bar{\lambda}(Y, V)$.

Пусть $\rho_j(Y) = X_j/|Y|$, где $Y$ — $l$-мерный вектор-столбец с координатами $X_j, j = 1, 2, ..., l$, а $|Y| = \sum_j X_j$ — общее количество средств нападения на данном направлении.

Предположим, что оборона выбирает целераспределение, удовлетворяющее обобщенному принципу уравнивания:

$$\langle R_j, U_j \rangle / X_j = \bar{\lambda}(Y, V) = const,$$

которое означает, что вероятности поражения не зависят от типа цели. В этом случае количество целей, не получивших воздействие на данном направлении, можно определить по формуле:

$$X'_j = X_j(1 - P_0) = X_j \max(0, 1 - 1/Y \cdot \max_{U \in B(V)} \min_{j=1,2,..,l} \langle R_j, U_j \rangle / \rho_j).$$

Тогда общее количество целей, прорвавшихся на данном направлении, находится по формуле:

$$Y' = \sum_{i=1}^{l} X_i \max(0, 1 - \tfrac{1}{Y} \max_{U \in B(V)} \min_{j=1,2,...,l} \langle R_j, U_j)/\rho_j \rangle =$$
$$= |Y| \max(0, 1 - \tfrac{1}{|Y|} \max_{U \in B(V)} \min_{j=1,2,,...l} \langle R_j, U_j \rangle / \rho_j = \max(0, |Y| - \hat{\lambda}(Y, V)),$$

где

$$\hat{\lambda}(Y, V) = \max_{U \in B(V)} \min_{j=1,2,...,l} \langle R_j, U_j \rangle / \rho_j(Y). \quad (5)$$

Функция $\hat{\lambda}(Y, V)$ — будет вогнутой по $V$ согласно утверждению леммы 1.8 в [16].

*3.2 Оценка сверху количества прорвавшихся средств*

Предположим, как и прежде, что имеется $n$ направлений $i = 1, ., ..., n$. Пусть $Z_j > 0$ — общее количество средств нападения $j$-го типа по всем направлениям, $j = 1, 2, ..., l$, $S$ — $l$-мерный вектор-столбец с координатами $Z_j$, а $|S| = \sum\limits_{j=1}^{l} Z_j$.

Положим

$$C_i(Y_i, V_i) = \begin{cases} \max(0, |Y_i| - \hat{\lambda}_i(Y_i, V_i)), |Y_i| > 0, \\ 0, |Y_i| = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} &\hat{\lambda}_i(Y_i, V_i) = \max_{U^i \in B(V_i)} \min_{j : Y_j^i > 0} \left\langle R_j^i, U_j^i \right\rangle / \rho_j(Y_i) = \\ &= |Y_i| \max_{U^i \in B(V_i)} \min_{j : Y_j^i > 0} \left\langle R_j^i, U_j^i \right\rangle / Y_j^i = |Y_i| \, P_i(Y_i, V_i). \end{aligned} \tag{7}$$

*Замечание* 2. Таким образом, функции $\hat{\lambda}_i(Y_i, V_i), P_i(Y_i, V_i)$ определены для любых $Y_i \neq 0$.

**Лемма 3.** *Для любых $Y_i \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$C_i(Y_i, V_i) \leqslant |Y_i| \max(0, 1 - P_i(S, V_i)). \tag{8}$$

*Доказательство.* Если $Y_i = 0$, то в силу (6) $C_i(Y_i, V_i) = 0$ и неравенство (8) справедливо как равенство. Предположим теперь, что $Y_i \neq 0$. Заменим все ненулевые компоненты $Y_j^i > 0$ в (7) соответствующими $Z_j \geqslant Y_j^i$, то внутренний минимум в (7) уменьшится, а если заменить нулевые компоненты $Y_j^i = 0$ соответствующими $Z_j \geqslant 0$, то увеличится число выражений под знаком минимума в (7), что приведет к уменьшению минимума. Таким образом, в при замене $Y^i$ на $S$ внутренний минимум в (7) уменьшится для любых $U^i \in B(V_i)$, что влечет неравенство $P_i(Y_i, V_i) \geqslant P_i(S, V_i)$, из которого следует (8) в силу неравенств

$$\begin{aligned} C_i(Y_i, V_i) &= \max(0, |Y_i| - \hat{\lambda}_i(Y_i, V_i)) = \\ = |Y_i| \max(0, 1 - P_i(Y_i, V_i)) &\leqslant |Y_i| \max(0, 1 - P_i(S, V_i)). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

*3.3 Модель «нападение-оборона» с неоднородными ресурсами сторон*

Требуется решить антагонистическую игру с функцией выигрыша нападения, представляющей собой общее количество прорвавшихся средств нападения:

$$F(Y, V) = \sum_{i=1}^{n} C_i(Y_i, V_i).$$

Пусть $W$ — $m$-мерный вектор-столбец ресурсов обороны по типам на ТВД. Обозначим через $V^i$ $m$-мерный вектор-столбец ресурсов выделенных на направление

$i = 1, ..., n$. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$V = (V^1, ..., V^n) \in \mathrm{B}(W) = \{\, V | \sum_{i=1}^{n} V^i = W, V^i \geqslant 0, i = 1, ..., n\} \,.$$

Стратегия нападения состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$Y = (Y_1, ..., Y_n) \in \mathrm{A}(S) = \{\, Y | \sum_{i=1}^{n} Y_i = S, Y_i \geqslant 0, i = 1, ..., n\} \,. \tag{9}$$

*3.3.1 Минимаксная стратегия обороны*

Из ограничений (9) следует, что справедливы агрегированные ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} |Y_i| = |S|, |Y_i| \geqslant 0, i = 1, ..., n. \tag{10}$$

Из леммы 3 и условия (10) следует, что выполняется следующая лемма.

**Лемма 4.** *Для любого $V \in \mathrm{B}(W)$ справедливо представление*

$$\max_{Y \in \mathrm{A}(S)} F(Y, V) = \max_{Y \in \mathrm{A}(S)} F(Y^{(i)}, V) = \max_{i=1,\dots,n} C_i(S, V_i).$$

*Доказательство.* Доказательство воспроизводит схему, предложенную Д.А. Молодцовым в работе [21], и следует из цепочки

$$\begin{aligned} \sup_{Y \in \mathrm{A}(S)} F(Y, V) = \sup_{Y \in \mathrm{A}(S)} \sum_{i=1}^{n} C_i(Y_i, V_i) \leqslant \max_{Y \in \mathrm{A}(S)} \sum_{i=1}^{n} |Y_i| \max(0, 1 - P_i(S, V_i)) = \\ = \max_{i=1,\dots,n} |S| \max(0, 1 - P_i(S, V_i)) = |S| \max(0, 1 - P_i(S, V_i)) = \\ = C_i(S, V_i) \leqslant \max_{i=1,\dots,n} C_i(S, V_i). \end{aligned}$$

Обратное неравенство тривиально, откуда следует требуемое равенство. Лемма доказана. □

В силу леммы 4 определенная игра также допускает исследование в чистых и смешанных стратегиях по схеме [15]. В частности, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Наилучший гарантированный результат обороны равен:*

$$\bar{V} = \max\Big(0, S - \tilde{\lambda}(S, W)\Big) \,,$$

*где*

$$\tilde{\lambda}(S, W) = \max_{V \in \mathrm{B}(W)} \min_{i=1,2,\dots,n} \hat{\lambda}_i(S, V^i). \tag{11}$$

*Замечание* 3. Определение $\tilde{\lambda}(S,W)$ сводится к вычислению двукратного максимина с учетом того, что функции $\tilde{\lambda}_i(S,V^i)$ определяются в результате нахождения максимина (5) на каждом направлении:

$$\hat{\lambda}_i(S,V^i) = \max_{U\in B(V^i)} \min_{j=1,2,\ldots,l} \langle R_j, U_j\rangle / \rho_j(S).$$

Для решения этой задачи на каждом шаге можно использовать метод субградиентного подъема из [17]. Аналогичный метод можно сконструировать и для решения задачи (11). Для нахождения субградиентов функции$\hat{\lambda}_i(S,V^i)$ следует записать задачу (5) в виде задачи линейного программирования и перейти к двойственной форме задачи.

### *3.3.2 Смешанная стратегия нападения*

Пусть

$$\begin{aligned} &p^0 \in Arg \min_{p\in\Lambda_n} \max_{V\in \mathrm{B}(W)} \sum_{i=1}^{n} p_i \hat{\lambda}_i(S,V^i); \\ &\Lambda_n = \left\{ p \in E^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, p_i \geqslant 0 \right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Напомним, что компоненты $p_i$ вектора $p^0$ означают вероятность, с какой нападение будет действовать всеми имеющимися силами типа $j = 1,...,l$ с направления $i = 1,...,n$.

Функции $\hat{\lambda}_i(\big(S^{(i)},V\big))$ вогнуты по $V$. Отсюда, как в п. 2.2 можно доказать, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Для любого $p^0$ удовлетворяющего (12) смешанная стратегия*

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^{n} p^0_{i(.)} I_{S^{(i)}}$$

*является оптимальной стратегией нападения.*

### *3.4 Непрерывность функции выигрыша*

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 5.** *Функции $\hat{\lambda}(Y,V)$ непрерывны по $(Y,V)$ в области $Y \geqslant 0, V \geqslant 0, Y \neq 0$.*

*Доказательство.* Достаточно доказать утверждение леммы для любой компактной подобласти, выделенной условиями

$$0 < \delta \leqslant \|Y\| \leqslant A, \|V\| \leqslant C, \tag{13}$$

что и предполагается далее. В силу (7) достаточно установить непрерывность вспомогательной функции $P(Y,V)$ определенной в указанной подобласти. Из обобщенного принципа уравнивания вытекает, что функция $P(Y,V)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &P(Y,V) = \max \lambda, \\ &\langle R_j, U_j\rangle / Y_j = \lambda, j : Y_j > 0, \\ &\sum_{j=1}^{l} U_j \leqslant V, U_j \geqslant 0. \end{aligned} \tag{14}$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} &P(Y,V) = \max \lambda, \\ &\langle R_j, U_j \rangle = \lambda Y_j, j = 1,..,l, \\ &\sum_{j=1}^{l} U_j \leqslant V, U_j \geqslant 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Обозначим через $\bar{B}(Y,V) \subseteq B(V)$ множество допустимых значений $(\lambda, U)$ задачи (15) и ее оптимальных решений соответственно. В силу леммы 1.3 в [16] многозначное отображение $\bar{B}(Y,V)$ полунепрерывно сверху по $(Y,V)$ в области $Y \geqslant 0, V \geqslant 0$ с дополнительным условием (13). В этой подобласти ограниченность $U$ следует из ограниченности $V$, а ограниченность $\lambda$ — из ограниченности величин $Y_j$ и $1/Y_j$ в силу (13) и представления (14). Таким образом, можно считать, что множества $\bar{B}(Y,V)$ принадлежат некоторому компакту. Кроме того множества $\bar{B}(Y,V)$ замкнуты, что проверяется непосредственно.

Докажем полунепрерывность снизу многозначного отображения $\bar{B}(Y,V)$ и тем самым непрерывность по Хаусдорфу (см. [16], с.27). Пусть точка $(Y,V)$ — любая точка в подобласти области $Y \geqslant 0, V \geqslant 0$, выделенной условием (13), и $(\lambda, U) \in \bar{B}(Y,V)$. Предположим, что $Y(k) \to Y \neq 0$ и $V(k) \to V$ при $k \to \infty$. Требуется построить такую последовательность $(\lambda(k), U(k)) \in \bar{B}(Y(k), V(k))$, что $\lambda(k) \to \lambda$ и $U(k) \to U$ при $k \to \infty$.

Из (15) следует, что $Y_j = 0$ влечет $U_j = 0$. Положим для остальных $Y_j > 0$

$$U_j(k) = \frac{Y_j(k)}{Y_j a(k)} U_j, \quad \lambda(k) = \frac{\lambda}{a(k)}, \tag{16}$$

где

$$a(k) = \max_{s=1,\ldots,m} \frac{V_s}{V_s(k)} \cdot \max_{j:Y_j>0} \frac{Y_j}{Y_j(k)} > 0 \tag{17}$$

для всех достаточно больших $k$, при которых $Y_j(k) > 0$.

Тогда $(\lambda(k), U(k)) \in \bar{B}(Y(k), V(k))$, что проверяется непосредственной подстановкой в (15), и при этом

$$a(k) \to 1, k \to \infty,$$

откуда следует, что

$$U_j(k) \to U_j, \lambda(k) \to \lambda, k \to \infty,$$

что и доказывает полунепрерывность снизу отображения $\bar{B}(Y,V)$.

Непрерывность функции $P(Y,V)$ в подобласти области $Y \geqslant 0, V \geqslant 0$, выделенной условием (13), следует теперь из леммы 1.1 в [16] в силу непрерывности по Хаусдорфу многозначного отображений $\bar{B}(Y,V)$. Лемма доказана. $\square$

Простейшие примеры показывают, что функции $\hat{\lambda}_i(Y_i, V_i)$ разрывны по $Y_i$ в нуле. Это следует из однородности функции $\hat{\lambda}_i(Y_i, V_i)$ по $Y_i$, из которой вытекает, что она зависит только от направления вектора $Y_i$, что означает, что предел $\hat{\lambda}_i(Y_i, V_i)$ при $Y_i \to 0$ может зависеть от выбранного направления. Тем не менее, из леммы 3 следует, что функции $C_i(Y_i, V_i)$ непрерывны по $Y_i$ в нуле и, следовательно, в силу леммы 5 непрерывны по $(Y_i, V_i)$ при любых $Y_i \geqslant 0, V_i \geqslant 0$. Таким образом, оптимальность минимаксной стратегии обороны и существование оптимальной смешанной стратегии вытекает из теоремы 5.4 в [15] о выпуклых непрерывных играх двух лиц с противоположными интересами.

## 4. Обобщенные функции целераспределения П.С. Краснощекова

Введем обозначения

$$L(Y) = \{j \in L \,|Y_j > 0\}, Y^\omega = \{Y_j, j \in \omega\}, \omega \subseteq L(Y), \rho_\omega(Y) = |Y^\omega| \,/\, |Y| \qquad (18)$$

и положим для любых $Y_i \neq 0$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_i^{\max}(Y_i, V_i) = \max_{\omega \subseteq L(Y_i)} \max_{U^i \in B(V_i)} \min_{j \in \omega} \left\langle R_j^i, U_j^i \right\rangle / \rho_j(Y_i^\omega) = \\ = \max_{\omega \subseteq L(Y_i)} |Y^\omega| \max_{U^i \in B(V_i)} \min_{j \in \omega} \left\langle R_j^i, U_j^i \right\rangle / Y_j^i = \\ = |Y_i| \max_{\omega \subseteq L(Y_i)} \rho_\omega(Y) \max_{U^i \in B(V_i)} \min_{j \in \omega} \left\langle R_j^i, U_j^i \right\rangle / Y_j^i = |Y_i| \, P_i^{\max}(Y_i, V_i). \end{aligned} \qquad (19)$$

Замена функций $\hat{\lambda}_i(Y_i, V_i)$ на функции $\hat{\lambda}_i^{\max}(Y_i, V_i)$ увеличивает потенциал обороны, однако, такое целераспределение нельзя признать удовлетворительным содержательно в отличии от целераспределения предложенного в [14, с.362]), которое в наших обозначениях может быть выражено формулой

$$\Lambda_i^{\max}(Y_i, V_i) = \max_{j \in L} \max_{U^i \in B(V_i)} \min_{j \in L/\{j\}} \left\langle R_j^i, U_j^i \right\rangle / \rho_j(Y_i^\omega). \qquad (20)$$

Доказательство леммы 3 не проходит, поскольку неравенство $P_i^{\max}(Y_i, V_i) \geqslant P_i^{\max}(S, V_i)$ не выполняется. Отсюда следует, что теорема 1 не верна. Кроме того, не сохраняется свойство вогнутости обобщенных функций целераспределения $\hat{\lambda}_i(Y_i, V_i)$ по $V_i$, что влечет невыпуклость функций

$$C_i^{\min}(Y_i, V_i) = \begin{cases} \max(0, |Y_i| - \hat{\lambda}_i^{\max}(Y_i, V_i)), |Y_i| > 0, \\ 0, |Y_i| = 0, \end{cases}$$

по $V_i$ и теорема 2 не верна.

Более удовлетворительным содержательно было бы определить обобщенную функцию целераспределения П.С. Краснощекова $C_i^{\min}(Y_i, V_i)$ равенством

$$\begin{aligned} C_i^{\min}(Y_i, V_i) = \min_{\omega \subseteq L(Y_i)} (\left| Y_i^{L(Y_i)/\omega} \right| + C_i(Y_i^\omega, V_i)) = \\ = |Y_i| \min_{\omega \subseteq L(Y_i)} (\rho_{L(Y_i)/\omega}(Y_i) + \rho_\omega(Y_i) \max(0, 1 - P_i(Y_i^\omega, V_i)) = \\ = |Y_i| \, (1 - P_i^{\max}(Y_i, V_i)) \end{aligned} \qquad (21)$$

с той же проблемой невыпуклости по $V_i$ и неубывания функции $P_i^{\max}(Y_i, V_i)$ по $Y_i$, не обеспечивающим неравенство $P_i^{\max}(Y_i, V_i) \geqslant P_i^{\max}(S, V_i)$, что не позволяет получить из нее соответствующее обобщение теорем 1 и 2. Сказанное выше относится и к функции (20). Это не умаляет ценности функции (20) и ее обобщения (21) для решения задачи целераспределения самой по себе. Для решения задачи (21) можно использовать методы субмодулярного программирования, обзор которых приведен в работе [22]. При этом возникает проблема субмодулярности функции $\Phi_i(\omega) = C_i(Y_i^\omega, V_i))$, которая выходит за рамки настоящей работы и требует отдельного изучения.

### Заключение

В статье рассмотрено обобщение модели «нападение-оборона» на случай неоднородности ресурсов, используемых каждой стороной, описываемых через соответствующее изменение вероятностей воздействия на каждом уровне обороны. Исследованы односторонне и двусторонне неоднородные игровые модели. Определен наилучший гарантированный результат обороны и оптимальная смешанная стратегия нападения.

## Список литературы


[1] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

[2] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

[3] Молодцов Д.А. Модель Гросса в случае непротивоположных интересов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 309–320.

[4] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / Под ред. Е.В. Золотова. М.: Радио и связь, 1974.

[5] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и теория игр / Под ред. Е.В. Золотова. М.: Радио и связь, 1983.

[6] Данильченко Т.Н., Масевич К.К. Многошаговая игра двух лиц при «осторожном» втором игроке и последовательной передаче информации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 19, № 5. С. 1323–1327.

[7] Крутов Б.П. Динамические квазиинформационные расширения игр с расширяемой коалиционной структурой. М.: ВЦ РАН, 1986.

[8] Минченко Л.И. Дифференциальные свойства функции максимума при связанных ограничениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24, № 2. С. 210–217.

[9] Завриев С.К., Перевозчиков А.Г. Стохастический конечно-разностный алгоритм минимизации функции максимина // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 30, № 4. С. 629–633.

[10] Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Простейшая модель системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 3 (30). С. 83–95.

[11] Перевозчиков А.Г., Лесик И.А., Яночкин И.Е. Модель массового обслуживания для системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 65–83.

[12] Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.И.Ломоносова / Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2015. № 49. С. 80–96.

[13] Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. М.: Издательский центр «Академия», 2008.

[14] Краснощеков П.С., Петров А.А. Принцип построения моделей. М.: Фазис. 2000.

[15] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.

[16] Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

[17] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

[18] Огарышев В.Ф. Смешанные стратегии в одном обобщении задачи Гросса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. Т. 13, № 1. С. 59–70.

[19] Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Шаповалов Т.Г. Многоуровневое обобщение модели «нападение-оборона» // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 57–69.

[20] Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением с несколькими фазовыми ограничениями // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2017. № 1. С. 26–32.

[21] Молодцов Д.А. Принцип уравнивания в одной задаче о распределении ресурсов в случае непротивоположных интересов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. Т. 13, № 2. С. 318–325.

[22] Хачатуров В.Р., Хачатуров Р.В., Хачатуров Р.В. Оптимизация супермодулярных функций (супермодулярное программирование) // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 6. С. 999–1000.

### Образец цитирования

Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Лесик А.И. Неоднородная игра «нападение-оборона» на основе обобщенного принципа уравнивания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 1. С. 89–106. https://doi.org/10.26456/vtpmk495

### Сведения об авторах

1. **Перевозчиков Александр Геннадьевич**
старший научный сотрудник отдела проектирования Центра моделирования сложных систем НПО «РусБИТех».

*Россия, 170001, г. Тверь, пр. Калинина, д. 17, НПО «РусБИТех».*
*E-mail: pere501@yandex.ru*

2. **Решетов Валерий Юрьевич**
доцент кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

*Россия, 119991 г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы,1, стр. 52, факультет ВМК.*
*E-mail:* *kadry@cs.msu.ru*

3. **Лесик Александра Ильинична**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа факультета ПМиК ТвГУ.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, ф-т ПМиК.*
*E-mail:* *lesik56@mail.ru*

# UNHOMOGENEOUS «ATTACK-DEFENSE» GAME ON THE BASIS OF THE GENERALIZED EQUALIZATION PRINCIPLE

**Perevozchikov Aleksandr Gennadyevich**
Senior Researcher at the Design Department of Complex Systems Modeling Center, NPO «RusBITTech»
*Russia, 170001, Tver, 17 Kalinina str., NPO «RusBITTech».*
*E-mail:* pere501@yandex.ru

**Reshetov Valerii Yurievich**
Associate professor at Operations Research department, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University
*Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1 Leninskie gory, building 1, CMC, MSU.*
*E-mail:* kadry@cs.msu.ru

**Lesik Aleksandra Ilyinichna**
Associate Professor at Mathematical Statistics and Systems Analysis department, Tver State University
*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail:* lesik56@mail.ru

*Received 13.09.2017, revised 09.01.2018.*

The work generalizes Germeyer's «attack-defense» game in terms of accounting for heterogeneity of resources of the parties and is based on Krasnovshchekov's generalized principle of the equalization which leads in general case to convex problems on connected minimax that can be solved by the subgradient descent method.

The classic Germeyer's «attack-defense» model is a modification of Gross's model. In Ogaryshev's work the game model which generalizes Gross's and Germeyer's models was studied. In Molodtsov's work Gross's model with the nonantagonistic interests of the parties was studied, in the works of Danilchenko, Masevich and Krutov dynamic extensions of the model were studied. In military models the points are usually interpreted as directions and characterize the spatial width distribution of defense's resources. However, in reality there is also a spatial distribution of defense's resources through depth, characterized by the number of defense levels in this direction.

Further generalization of the «attack-defense» model can consist in taking into account the heterogeneity of parties' means through a corresponding change in the probability of impact at each level of defense, which in turn is the result of solving the corresponding target distribution problem. This leads, in general, to minimax problems with bound constraints to determine the guaranteed defense's result, an example of which is given by the game «attack-defense» with heterogeneous resources of the parties, based on the generalized equalization principle, posed and studied in this paper.

**Keywords:** Germeyer's «attack-defense» game, generalized principle of equalization, heterogeneous resources of the parties, target distribution based on the generalized principle of equalization, heterogeneous «attack-defense» game, the best guaranteed defense result, minimax defense strategy, mixed attack strategy.

### Citation

Perevozchikov A.G., Reshetov V.Y., Lesik A.I. Unhomogeneous «attack-defense» game on the basis of the generalized equalization principle. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 1, pp. 89–106. (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk495

### References

[1] Karlin S. *Matematicheskie Metody v Teorii Igr, Programmirovanii i Ekonomike* [Mathematical Methods in the Theory of Games, Programming and Economics]. Mir Publ., Moscow, 1964. (in Russian)

[2] Germeyer Y.B. *Vvedenie v Teoriyu Issledovaniya Operatsii* [Introduction to the Theory of Operations Research]. Nauka Publ., Moscow, 1971. (in Russian)

[3] Molodtsov D.A. Gross's Model in the case of non-npposite interests. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1972, vol. 12(2), pp. 309–320. (in Russian)

[4] Berzin E.A. *Optimal'noe Raspredelenie Resursov i Elementy Sinteza Sistem* [Optimal Resource Allocation and Elements of System Synthesis]. Ed. by E.V. Zolotov. Radio and Communication Publ., Moscow, 1974. (in Russian)

[5] Berzin E.A. *Optimal'noe Raspredelenie Resursov i Teoriya Igr* [Optimal Resource Allocation and Game Theory]. Ed. by E.V. Zolotov. Radio and Communication Publ., Moscow, 1983. (in Russian)

[6] Danilchenko T.N., Masevich K.K. Multistep game of two persons with a «cautious» second player and sequential transfer of information. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1974, vol. 19(5), pp. 1323–1327. (in Russian)

[7] Krutov B.P. *Dinamicheskie Kvaziinformatsionnye Rasshireniya Igr s Rasshiryaemoi Koalitsionnoi Strukturoi* [Dynamic Quasi-Informational Extensions of Games with an Expandable Coalition Structure]. Computing Center of RAS Publ., Moscow, 1986. (in Russian)

[8] Minchenko L.I. Differential properties of the maximum function under bound constraints. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1984, vol. 24(2), pp. 210–217.

[9] Zavriev S.K., Perevozchikov A.G. Stochastic finite-difference algorithm for minimizing the maximin function. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1991, vol. 30(4), pp. 629–633.

[10] Perevozchikov A.G., Lesik I.A. On a simplest model of the echeloned air defense system. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2013, no. 3 (30), pp. 83–95. (in Russian)

[11] Perevozchikov A.G., Lesik I.A., Yanochkin I.Ye. Model of the echeloned Air Defense queuing system. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 4, pp. 65–83. (in Russian)

[12] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.A. Model of overcoming the multilevel defense system by attack. *Applied Mathematics and Computer Science: Proceedings of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University*. Ed. by V.I. Dmitrieva. MAX Press, Moscow, 2015. No. 49. Pp. 80–96. (in Russian)

[13] Vasin A.A., Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V. *Issledovanie Operatsii* [Operations Research]. Publishing Center «Academy», Moscow, 2008. (in Russian)

[14] Krasnoshchekov P.S., Petrov A.A. *The principle of constructing models.* Phasis Publ., Moscow, 2000.

[15] Vasin A.A., Morozov V.V. *Teoriya Igr i Modeli Matematicheskoi Ekonomiki* [Game Theory and Models of Mathematical Economics]. MAX Press, Moscow, 2005. (in Russian)

[16] Fedorov V.V. *Chislennye Metody Maksimina* [Numerical Methods of Maximin]. Nauka Publ., Moscow, 1979. (in Russian)

[17] Polyak B.T. *Vvedenie v Optimizatsiyu* [Introduction to Optimization]. Nauka Publ., Moscow, 1983. (in Russian)

[18] Ogaryshev V.F. Mixed strategies in a generalization of the Gross's problem. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1973, vol. 13(1), pp. 59–70. (in Russian)

[19] Perevozchikov A.G., Reshetov V.Yu., Shapovalov T.G. Multi-level expansion of the model «attack-defense». *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 1, pp. 57–69. (in Russian)

[20] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.A. Model of violation of layered defense system by attack with several constraints on the state. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 15. Vychislitel'naya Matematika i Kibernetika* [Bulletin of Moscow University. Series 15: Computational Mathematics and Cybernetics], 2017, no. 1, pp. 26–32. (in Russian)

[21] Molodtsov D.A. The principle of equalization in one problem about the distribution of resources in the case of non-opposing interests. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1973, vol. 13(2), pp. 318–325. (in Russian)

[22] Khachaturov V.R., Khachaturov Roman V., Khachaturov Ruben V. Optimization of supermodular functions (supermodular programming). *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2012, vol. 52(6), pp. 999–1000. (in Russian)