СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 330.322(075), 519.685

МОДЕЛЬ МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Михно В.Н.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 12.01.2017, после переработки 27.02.2017.

В статье рассматривается задача распределения инвестиций на множестве активов при более низких по сравнению с известными подходами требованиях к исходным данным. Необходимость исследования такой задачи связана с ограниченными возможностями получения на практике информации о возможных последствиях инвестиционных решений. В статье полагается, что неопределенность относительно последствий обусловлена вероятностной природой целевого показателя. При этом доступной информацией являются лишь диапазоны возможных значений целевого показателя для каждого рассматриваемого актива. Задача ставится в рамках концепции ожидаемой полезности и решается для предпочтений инвесторов с постоянной несклонностью к риску при допущении о статистической независимости рассматриваемых активов. Результат решения задачи представлен аналитическими выражениями предпочтительного распределения инвестиций на множестве активов. Полученные выражения могут непосредственно применяться для формирования портфелей в практике принятия инвестиционных решений. Приводится иллюстративный пример применения предложенной модели. Формулируются обобщенные выводы по общности и применимости полученных результатов.

Ключевые слова: инвестиционный портфель, предпочтения инвестора, ожидаемая полезность, несклонность к риску, энтропия, центральная предельная теорема.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 45–55.

Введение

Обоснование инвестиционных решений, включая портфельные инвестиции, в настоящее время требует использования специальных математических моделей и методов. Одним из основных актуальных вопросов в задаче распределения инвестиций до настоящего времени остается вопрос обоснованности допущений, используемых при формализации портфельных моделей и их компонент. Можно выделить три существенных проблемных вопроса, связанных с практическим применением известных математических моделей и методов портфельного анализа инвестиций. Во-первых, большинство моделей ориентировано на исходные данные, получение которых на практике вызывает большие сложности или вообще невозможно. К таким моделям, в частности, относится и модель Марковица, работы которого [1, 2] положили начало развитию математического инструментария формирования инвестиционных портфелей. В данной модели предполагается возможность априорного оценивания ожидаемых значений доходностей активов, включаемых в портфель, и их ковариаций. Во-вторых, допущения, положенные в основу моделей описания неопределенности последствий инвестиционных решений, не соответствуют реальным условиям реализации инвестиций. Под последствиями понимают возможные значения целевых показателей выбора решений, таких как доходность ценных бумаг, достигаемый уровень капитализации или прибыль реальных инвестиционных проектов и т.п. Наконец, в большинстве методов нет обоснования соответствия используемых принципов оптимальности индивидуальным предпочтениям инвестора. Последнее обусловлено тем, что практическое применение моделей, ориентированных на учет субъективных предпочтений инвесторов [3, 4], затруднительно из-за сложности задачи формализации их предпочтений.

Изложенные обстоятельства определяют актуальность задачи развития математического инструментария портфельного анализа инвестиций с целью снижения влияния перечисленных недостатков известных моделей на обоснованность выбираемых инвестиционных портфелей и с целью расширения возможностей применения математического инструментария на практике. В настоящей работе данные цели конкретизируются следующим образом: (2) – использовать в качестве исходных данных в задаче формирования инвестиционных портфелей диапазоны возможных значений целевого показателя, информация о которых может быть получена практически для любых реальных активов, на множестве которых формируются портфели; (3) – положить в основу обоснования модели неопределенности последствий реализации инвестиционных портфелей критерий, соответствующий лишь имеющимся исходным данным о возможных последствиях, т.е. лишь информацию о диапазонах возможных значений целевого показателя для рассматриваемых активов; (8) – обеспечить учет субъективных предпочтений инвестора с использованием модели принципа оптимальности, отражающей максимально широкий обобщенный класс характерных для практики предпочтений инвесторов и допускающей легко реализуемую конкретизацию описания предпочтений конкретного инвестора.

Постановка задачи, направленная на достижение перечисленных целей, осуществляется в рамках концепции ожидаемой полезности (см. [4]). В качестве критерия обоснования модели неопределенности используется принцип выбора вероятностной модели с максимальной энтропией [5]. Формализация предпочтений инвесторов задается с помощью функции полезности, стратегически эквивалентной моделям описания предпочтений инвесторов с постоянной несклонностью к риску (см. [3]). Показано, что «настройка» такой модели на конкретного инвестора не вызывает затруднений. Результат решения задачи представлен аналитическими выражениями распределения инвестиций на множестве рассматриваемых активов. Полученные выражения могут непосредственно применяться для формирования портфелей в практике принятия инвестиционных решений. Приводится иллюстративный пример применения рассмотренной модели. Формулируются обобщенные выводы по общности и применимости полученных результатов.

1. Постановки задачи

Дадим обобщенную формулировку задачи формирования инвестиционного портфеля, согласующегося с предпочтениями инвестора. Будем рассматривать обобщенное понятие инвестиций, не привязываясь к типу объектов инвестирования, которые будем далее называть финансовыми титулами.

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество финансовых титулов, на котором формируется инвестиционный портфель; $X = \left\{x \in R^n : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \;\; x_i \geq 0, \;\; i \in I\right\}$ – множество векторов, определяющих возможные структуры портфелей финансовых титулов, где x_i – доля вложений инвестора в финансовый титул i (далее $x \in X$ будем называть просто портфелем); C_i – квантифицируемый (например, денежный) целевой показатель, значения которого характеризуют степень достижения цели инвестора по финансовому титулу $i \in I$.

Полагаем, что C_i является положительно ориентированным показателем, т.е. большее значение показателя является более предпочтительным для инвестора. Формирование (выбор) портфеля осуществляется в условиях неопределенности последствий по показателям C_i, которая имеет вероятностную природу. Следовательно, возможные реализации показателя являются случайными величинами.

Целевой показатель $C(x)$ портфеля $x \in X$ связан с целевыми показателями финансовых титулов соотношением

$$C\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot C_i. \tag{1}$$

Обозначим через $P(z)$ плотность вероятностей случайной величины $C(x)$. Пусть предпочтения инвестора удовлетворяют аксиомам рационального поведения [6] и пусть функция полезности $u : C(x) \to R^1$ отражает предпочтения инвестора на неопределенных последствиях реализации портфеля. Тогда, согласно концепции ожидаемой полезности (см. [6]), задача формирования оптимального для инвестора портфеля финансовых титулов ставится как задача выбора портфеля с максимальной ожидаемой полезностью:

$$\bar{u}\left(C\left(x\right)\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\left(z\right) P(z))dz \to \max_{x \in X}, \tag{2}$$

где $\bar{u}\left(C\left(x\right)\right)$ обозначает ожидаемую полезность (математическое ожидание) целевого показателя портфеля x.

Задачу (3) будем решать в условиях, когда известны лишь возможные диапазоны $\left[C_i^d, \; C_i^h\right]$ значений показателей $C_i, i \in I$. Кроме того, полагаем, что показатели для различных финансовых титулов статистически независимы.

2. Модель экстремальной энтропии формирования инвестиционного портфеля для инвестора с постоянной несклонностью к риску

Для решения задачи (3) при перечисленных исходных положениях и ограничениях требуется провести спецификацию функции полезности, отражающей предпочтения инвестора, и спецификацию плотности вероятностей значений показателя эффективности портфеля.

Конкретизацию функции полезности в (3) проведем для инвесторов, обладающих постоянной несклонностью к риску (см. [3]). Последнее означает, что степень несклонности инвестора к риску не зависит от абсолютного значения показателя $C(x)$ или, по-другому, не зависит от благосостояния инвестора. В качестве функции полезности, отражающей указанный тип отношения инвестора к риску, возьмем функцию вида (см. [3])

$$u\left(C\left(x\right)\right) = -e^{-sC(x)}, \tag{3}$$

где величина $s > 0$ определяет степень несклонности инвестора к риску.

Выбор функции (8) обусловлен двумя обстоятельствами. Во-первых, данная функция стратегически эквивалентна (со своими значениями s) любой функции полезности инвестора с постоянной несклонностью к риску, что обеспечивает общность структуры портфеля, получаемого в результате решения задачи (3) для рассматриваемых типов инвесторов. Во-вторых, функция вида (8) позволяет для большинства распространенных на практике вероятностных распределений аналитически найти интеграл (3), т.е. определить аналитическое выражение для ожидаемой полезности $\overline{u}\left(C\left(x\right)\right)$ портфеля $x \in X$, что существенно упрощает поиск решения задачи (3).

Спецификацию плотности вероятностей $P(z)$ показателя эффективности портфеля $x \in X$ проведем с использованием принципа максимума энтропии (см. [5]), т.е. выберем распределение с максимальной степенью неопределенности. В ситуации, когда относительно случайной величины известен лишь диапазон ее возможных значений, распределением с максимальной энтропией является равномерное на данном интервале распределение (см. [5]). Тогда плотности вероятностей $P_i(z_i)$ показателей C_i, $i \in I$, обладающие максимальной энтропией, имеют следующий вид:

$$P_i\left(z_i\right) = \begin{cases} 0, \ \ z_i < C_i^d, \\ \frac{1}{C_i^h - C_i^d}, \ \ C_i^d \le z_i \le C_i^h, \\ 0, \ \ z_i > C_i^h, \end{cases} \tag{4}$$

$$i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n.$$

Математические ожидания m_i и дисперсии σ_i^2 распределений (10) случайных величин C_i определяются формулами [7]

$$m_i = \frac{C_i^h + C_i^d}{2}, \tag{5}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\left(C_i^h - C_i^d\right)^2}{12}. \tag{6}$$

В силу допущения о независимости случайных величин C_i, $i \in I$, согласно центральной предельной теореме (см. [7]), распределение вероятностей $P(z)$ показателя $C(x)$ эффективности портфеля $x \in X$, определяемого (показателя) соотношением (2), для $n \ge 3$ с достаточной для практики точностью может быть задано моделью нормального распределения с параметрами

$$m\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i, \quad \sigma^2\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2, \tag{7}$$

где $m(x)$, $\sigma^2(x)$ – соответственно, математическое ожидание и дисперсия реализаций показателя $C(x)$.

В результате рассмотренных спецификаций функции полезности $u(C(x))$ инвестора и плотности вероятностей $P(z)$ для целевого показателя портфеля при $n \geq 3$ задача (3) сводится к задаче

$$\bar{u}(C(x)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sz} \cdot N_{m(x),\sigma^2(x)}(z)dz \to \max_{x \in X}, \tag{8}$$

где $N_{m(x),\sigma^2(x)}(z)$ – функция плотности вероятностей нормального распределения с параметрами (15).

Интеграл в (16) представляет собой экспоненциальное преобразование [8] функции $N_{m(x),\sigma^2(x)}(z)$, которое для данной функции приводит к выражению

$$\bar{u}(C(x)) = -e^{-s \cdot m(x) + s^2 \cdot \frac{\sigma^2(x)}{2}}. \tag{9}$$

Теперь с учетом соотношений (15), (16), (17) в развернутом виде рассматриваемая задача будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{u}(C(x)) = -e^{-s \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot m_i + s^2 \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2}{2}} \to \max_{x \in X}. \tag{10}$$

Далее задачу формирования инвестиционного портфеля, лучшего в смысле предпочтений инвестора, будем рассматривать для случая, когда «продажи» финансовых титулов без покрытия допустимы [9]. Тогда в определении множества X возможных портфелей отпадают условия неотрицательности координат векторов $x \in X$. Последнее позволяет решить задачу (11) с использованием метода множителей Лагранжа [10]. Функция Лагранжа будет иметь следующий вид:

$$L(x, \lambda) = \overline{u}(C(x)) - \lambda \cdot (\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)$$

или в развернутом виде

$$L(x, \lambda) = -e^{-s \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot m_i + s^2 \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2}{2}} - \lambda \cdot (\sum_{i=1}^{n} x_i - 1), \tag{11}$$

а задача нахождения предпочтительного инвестиционного портфеля сводится к задаче вида

$$L(x, \lambda) \to \max_{x,\lambda}, \tag{12}$$

где λ – множитель Лагранжа, связанный с ограничением на сумму долей вкладов в финансовые титулы портфеля.

Предпочтительный для инвестора с постоянной несклонностью к риску портфель определяется на основе решения системы уравнений, получаемой путем приравнивания нулю частных производных функции Лагранжа (13) по переменным

λ, x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Запишем данную систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_i} = \left(-s \cdot m_i + x_i s^2 \cdot \sigma_i^2\right) \cdot \bar{u}\left(C\left(x\right)\right) - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - 1\right) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{13}$$

Поделив каждое из n первых уравнений в (14) на λ, после несложных преобразований получим следующие равенства:

$$x_i = \frac{1}{\left(\overline{u}(C(x))/_{\lambda}\right) \cdot s^2 \cdot \sigma_i^2} + \frac{m_i}{s \cdot \sigma_i^2},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Суммируя теперь равенства (15) по i, получим соотношение

$$\sum_{i \in I} x_i = \frac{1}{\left(\overline{u}(C(x))/_{\lambda}\right) \cdot s^2} \cdot \sum_{i \in I} \frac{1}{\sigma_i^2} + \frac{1}{s} \cdot \sum_{i \in I} \frac{m_i}{\sigma_i^2}. \tag{15}$$

Из (16) с учетом того, что в точке экстремума функции Лагранжа выполнено (см. (14)) равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, имеем

$$\frac{\overline{u}(C(x))}{\lambda} = \frac{\frac{1}{s^2} \cdot \sum\limits_{i \in I} \frac{1}{\sigma_i^2}}{1 - \frac{1}{s} \cdot \sum\limits_{i \in I} \frac{m_i}{\sigma_i^2}}. \tag{16}$$

Подставив в (15) вместо отношения $\frac{\overline{u}(C(x))}{\lambda}$ его представление (17), получим после соответствующих преобразований окончательно для оптимального портфеля $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ инвестора с постоянной несклонностью к риску

$$x_j^* = \frac{1 - \frac{1}{s} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sigma_i^2}}{\sigma_j^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}} + \frac{m_j}{s \cdot \sigma_j^2}\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Ситуацию со степенью несклонности инвестора к риску, равной $s = +\infty$, естественно трактовать как полное неприятие инвестором риска. Следовательно, при полном неприятии риска оптимальным для инвестора будет инвестиционный портфель с координатами

$$x_j^{**} = \lim_{s \to \infty} x_j^* = \frac{1}{\sigma_j^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}},\ j = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Для нахождения структуры портфеля x^{**}, который соответствует предпочтениям инвестора, полностью исключающего риск, не требуется никакой дополнительной информации, кроме исходных данных в постановке задачи (16) и формул (13), (19).

Практическое применение формулы (18) для нахождения структуры портфеля x^* при конечной постоянной степени несклонности инвестора к риску требует предварительной оценки величины $s > 0$. Оценка данной величины может быть получена на основе выявления детерминированного эквивалента двузначной лотереи, согласующегося с предпочтениями инвестора (см. [3]). Приближенная оценка детерминированного эквивалента такой лотереи может быть получена одним из методов, предложенных, например, в [3]. Пусть $\Lambda = \{C^{'}C^{''}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ – двузначная лотерея пятьдесят на пятьдесят с равновероятными возможными выигрышами $C^{'} < C^{''}$. Указанные значения выигрышей – это легко интерпретируемые инвестором значения целевого показателя задачи формирования портфеля, выбранные из диапазона возможных значений данного показателя. Положим, что $C \in [C^{'}, C^{''}]$ – выявленный с помощью инвестора детерминированный эквивалент лотереи Λ, т.е. это такое значение целевого показателя, что для инвестора равноценны портфель с данным детерминированным значением показателя и портфель с неопределенным значением показателя, задаваемым лотереей Λ. Тогда, согласно понятию функции полезности инвестора, имеем

$$u\left(C\right) = \frac{1}{2}u\left(C^{'}\right) + \frac{1}{2}u\left(C^{''}\right),$$

что означает равенство полезности детерминированного значения C целевого показателя и ожидаемой полезности лотереи Λ. С учетом (8) получаем уравнение для оценки степени s несклонности инвестора к риску:

$$-e^{-sC} = -\frac{1}{2}e^{-sC^{'}} - \frac{1}{2}e^{-sC^{''}}.$$

После нахождения степени несклонности инвестора к риску непосредственно формируется инвестиционный портфель по формуле (18).

3. Иллюстративный пример

Приведем несколько результатов решения тестовой задачи формирования инвестиционных портфелей. В качестве финансовых титулов рассмотрим три инвестиционных проекта (см. [9]), т.е. $I = \{1, 2, 3\}$. Пусть целевым показателем формирования портфеля инвестиционных проектов является достигаемый уровень капитализации. Возможные последствия реализации проектов зададим следующими гипотетическими диапазонами уровней капитализации $C_1 \in \left[C_1^d,\ C_1^h\right] = [0, 50]$, $C_2 \in \left[C_2^d,\ C_2^h\right] = [10, 60]$, $C_3 \in \left[C_3^d,\ C_3^h\right] = [20, 40]$. Тогда согласно формулам (13), (15) и (19) оптимальным для случая полного неприятия инвестором риска будет портфель $x^{**} = (0.121,\ 0.121,\ 0.758)$. При этом дисперсии капитализации проектов составляют $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 208.33$, $\sigma_3^2 = 33.33$, а дисперсия капитализации портфельной инвестиции составляет $\sigma^2\left(x^{**}\right) = 25.25$.

Далее, используя соотношения (11), (13), (15), (18), получим для инвестора со степенью $s = 4$ постоянной несклонности к риску оптимальный портфель вида $x^* = (0.115,\ 0.127,\ 0.758)$ с дисперсией капитализации портфельной инвестиции $\sigma^2\left(x^*\right) = 25.27$. Для инвестора со степенью $s = 1$ постоянной несклонности к риску получим оптимальный портфель вида $x^* = (0.097,\ 0.145,\ 0.758)$ с дисперсией капитализации портфельной инвестиции $\sigma^2\left(x^*\right) = 25.49$. Для инвестора со степенью $s = 0.2$ постоянной несклонности к риску получим оптимальный портфель вида $x^* = (0.001,\ 0.241,\ 0.758)$ с дисперсией капитализации портфельной инвестиции $\sigma^2\left(x^*\right) = 31.25$.

Если в качестве меры риска отдельных инвестиционных проектов и портфеля в целом принять дисперсии целевого показателя, то приведенные численные результаты допускают естественную интерпретацию. При снижении степени несклонности инвестора к риску в выбираемом портфеле увеличивается доля проекта, наиболее рискованного, но с самой большой ожидаемой капитализацией. Кроме того, увеличивается степень риска выбираемого портфеля.

Заключение

Рассмотренная в статье модель формирования инвестиционных портфелей ориентирована на использование исходных данных, получение которых не должно вызывать затруднений в практике инвестиционного анализа. Такие данные могут быть выявлены либо экспертным путем, либо путем алгоритмической оценки значений целевого показателя для самых неблагоприятных и самых благоприятных условий реализации рассматриваемых финансовых титулов. Полученные результаты легко применимы в реальных задачах инвестиционного анализа и непосредственно переносятся на случай с более детальными и полными исходными данными. Примером последних может служить ситуация, когда удается получить оценки математических ожиданий и дисперсий значений целевых показателей для анализируемых активов. В этом случае принцип экстремальной энтропии приводит к нормальному распределению вероятностей в качестве модели описания неопределенности последствий для отдельных активов и портфеля в целом. Перспективным направлением развития полученных результатов является исследование модели для инвесторов с убывающей несклонностью к риску, которая более характерна для предпочтений инвесторов, чем рассмотренная в работе.

Список литературы

[1] Markowitz H.M. Portfolio Selection // The Journal of Finance. 1952. Vo. 7, № 1. Pp. 77–91.

[2] Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. NY: John Wiley & Sons, 1959.

[3] Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.

[4] Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978. 352 с.

[5] Чисар И., Кернер Я. Теория информации. М.: «Мир», 1985. 400 с.

[6] Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 983 с.

[7] Крамер Гаральд. Математические методы статистики. М.: «Мир», 1975. 648 с.

[8] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832 с.

[9] Крушвиц Л. Инвестиционные расчеты. СПб.: ПИТЕР, 2001. 432 с.

[10] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: «Мир», 1985. 509 с.

Библиографическая ссылка

Михно В.Н. Модель максимальной энтропии для формирования инвестиционного портфеля // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. №1. С. 45–55.

Сведения об авторах

1. **Михно Владимир Николаевич**
заведующий кафедрой математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

MAXIMUM ENTROPY MODEL FOR FORMING AN INVESTMENT PORTFOLIO

Mikhno Vladimir Nikolaevich
Head of Mathematical Statistics and Systems Analysis department,
Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 12.01.2017, revised 27.02.2017.

The article considers the problem of allocating investments across a set of assets while applying lower requirements to the input data compared to common approaches. The need for researching this problem springs from limited abilities for acquiring information regarding possible outcomes of investment decisions in practice. The article assumes the uncertainty regarding the outcomes is premised on the probabilistic nature of the target value. At the same time, the only accessible information includes ranges of possible target values for each considered asset. The problem is framed within the concept of expected utility and is solved for the preferences of investors with constant risk aversion while assuming the considered assets are statistically independent of each other. The result of the problem solution is represented by the analytical expressions of the preferential allocation of the investments across the assets. The resulting expressions can be used directly for forming portfolios in making investment decisions. An illustration of using the proposed model is given. The generalized conclusions are formulated regarding the commonality and usability of the received results.

Keywords: investment portfolio, investor preferences, expected utility, risk aversion, entropy, central limit theorem

Bibliographic citation

Mikhno V.N. Maximum entropy model for forming an investment portfolio. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 1, pp. 45–55. (in Russian)

References

[1] Markowitz H.M. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 1952, vol. 7(1), pp. 77–91.

[2] Markowitz H.M. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.* John Wiley & Sons, New York, 1959.

[3] Keeney R.L., Raiffa H. *Prinyatie Resheniy pri Mnogikh Kriteriyakh: Predpochteniya i Zameshcheniya* [Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs]. «Radio i Svyaz» Publ., Saint-Petersburg, 1981. 560 p. (in Russian).

[4] Fishbern P. *Teoriya Poleznosti dlya Prinyatiya Resheniy* [Utility Theory for Decision Making]. Nauka Publ., Moscow, 1978. 352 p. (in Russian).

[5] Csiszar I., Kerner J. *Teoriya Informacii* [Information Theory]. «Mir» Publ., Moscow, 1985. 400 p. (in Russian).

[6] Von Neumann J., Morgenstern O. *Teriya Igr i Ekonomicheskoe Povedenie* [Game Theory and Economic Behavior]. Nauka Publ., Moscow, 1970. 983 p. (in Russian)

[7] Harald Cramer. *Matematicheskie Metodi Statistiki* [Mathematical Methods of Statistics]. «Mir» Publ., Moscow, 1975. 648 p. (in Russian)

[8] Korn G., Korn T. *Spravochnik po Matematike* [Mathematical Handbook]. Nauka Publ., Moscow, 1978. 832 p. (in Russian)

[9] Kruschwitz L. *Investitsionnie Rascheti* [Investment Calculations]. PITER Publ., Saint-Petersburg, 2001. 432 p. (in Russian)

[10] Gill Ph., Murray W., Wright M. *Prakticheskaya Optimizatsiya* [Practical Optimization]. «Mir» Publ., Moscow, 1985. 509 p. (in Russian)