

**БИФУРКАЦИОННЫЕ КАТАСТРОФЫ МГНОВЕННОГО
СЕРДЕЧНОГО РИТМА В МОДЕЛИ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЙ
ДИНАМИКИ**

**Иванов А.П.¹, Кудинов А.Н.², Лебедев Д.Ю.³, Михеев С.А.³,
Цветков В.П.³, Цветков И.В.⁴**

¹Тверской областной кардиологический центр, г. Тверь

²Кафедра математического моделирования

³Кафедра общей математики и математической физики

⁴Кафедра экономики и управления производством

Поступила в редакцию 24.12.2015, после переработки 12.01.2016.

В работе изучаются скачки мгновенного сердечного ритма в рамках модели мультифрактальной динамики.

Ключевые слова: мгновенный сердечный ритм, бифуркационные катастрофы, модель мультифрактальной динамики, скачки мгновенного сердечного ритма.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 63–73.

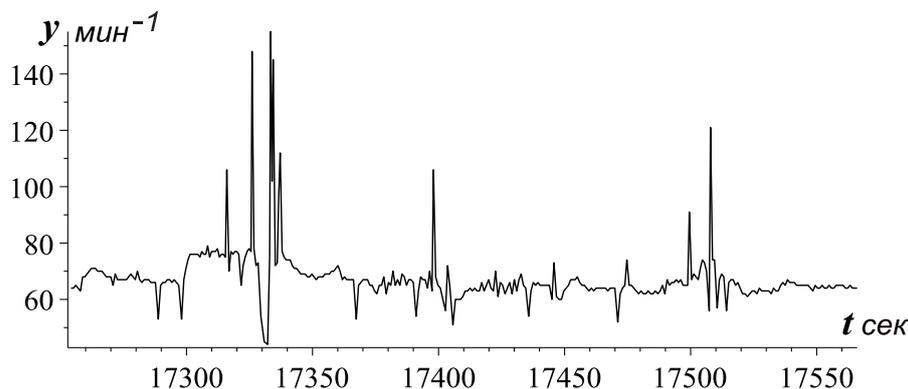
Введение

Актуальность исследования сердечных ритмов тесно связана с необходимостью выявления новых маркеров неблагоприятных сердечно-сосудистых эпизодов. Одним из вариантов решения этой проблемы является создание новых математических и компьютерных методов анализа мгновенного сердечного ритма (МСР) в модели мультифрактальной динамики (МФД) на основе холтеровского мониторинга [1–5]. Данные методы позволяют прогнозировать возможные сердечно-сосудистые катастрофы.

Нами в [2] на основе конкретных данных холтеровского мониторинга показано самоподобие (фрактальность) МСР с погрешностью менее 5%, проведен расчет и анализ параметров МСР в модели МФД. При этом выбирались области МСР, в которых тангенс угла наклона кусочно-линейного тренда МСР не превышал значения порядка $1 \text{ мин}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$.

Проведенный анализ МСР по данным холтеровского мониторинга пациентов Тверского областного кардиологического диспансера показал наличие областей МСР, в которых данный параметр достигает значений порядка $10 \text{ мин}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ и более. Проиллюстрируем пример таких скачков на Рис. 1, на котором представлена зависимость значений МСР y от времени t .

В работе [1] показано, что скачки МСР в МФД имеют бифуркационный характер и имеют место тогда, когда фрактальная размерность МСР D достигает точки бифуркации D_b .

Рис. 1: Зависимость значений МСР y от времени t

1. Определение параметров МФД по опытным данным в области скачков МСР

Согласно модели МФД динамику мультифрактального процесса на интервале T_i (в дальнейшем индекс i мы будем опускать) разделим на две составляющие, используя понятие кусочно-линейного тренда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t) = KX(D)(t - t_0) + \tilde{y}(t), \quad (1)$$

где $\bar{y}(t)$ – кусочно-линейный тренд, $\tilde{y}(t)$ – осцилляции относительно кусочно-линейного тренда, K – размерный коэффициент, который мы возьмем равным 10^3 мин $^{-1}$ ·сек $^{-1}$. Фрактальная размерность МСР D полностью определяется функцией $\tilde{y}(t)$.

В модели МФД $X(D)$ определяется уравнением

$$A(D)X + B_0X^3 = \eta. \quad (2)$$

В этом уравнении считается $X \ll 1$. Параметр η описывает эффективное влияние внешних факторов на МСР.

Для функции $A(D)$ в [3] предложено следующее аналитическое решение

$$A(D) = \begin{cases} (D_0 - D)^{-1}, & 1 \leq D \leq D_0, \\ (D_0 - D_k)^{-1}(D_0 - D)^{-1}(D - D_k), & D_0 \leq D \leq 2. \end{cases} \quad (3)$$

Параметры модели D_0 , D_k , B_0 и η выбираются из наилучшего согласия с опытными данными.

Точка бифуркации D_b для нас является важной и определяется из условия

$$\lambda = \lambda_b = \frac{-A(D_b)}{B_0^{1/3}\eta^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}, \quad D_b = D_b(D_0, D_k, B_0, \eta). \quad (4)$$

В точке D_b уравнение (2) будет иметь не одно, а три решения [1], поэтому вблизи точки D_b поведение $X(D)$ может носить скачкообразный характер, а величина скачка X имеет порядок $\sqrt[3]{\eta/B_0}$. Покажем это более подробно.

Сделав замену $X = \sqrt[3]{\eta/B_0}\xi(\lambda)$, преобразуем (2) к виду

$$\xi^2 - \frac{1}{\xi} = \lambda. \quad (5)$$

График зависимости $\xi(\lambda)$ приведен на Рис. 2.

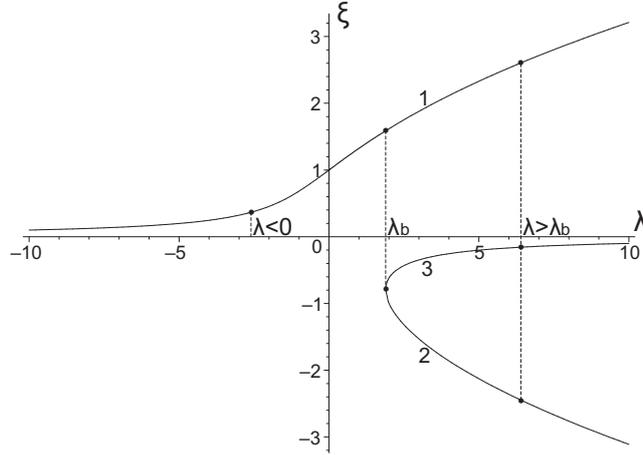


Рис. 2: График функции $\xi(\lambda)$

Из Рис. 2 следует возможность скачков X при $\lambda \geq \lambda_b$ при переходе системы с одной ветви на другую. При этом в точке λ_b : $\xi_1 = 2/\sqrt[3]{2}$, $\xi_{2,3} = -1/\sqrt[3]{2}$ и величина $\Delta\xi = \xi_1 - \xi_{2,3} = 3/\sqrt[3]{2}$. Отсюда следует $\Delta X = X_1 - X_{2,3} = 3\sqrt[3]{\eta/(2B_0)}$, что подтверждает приведенную выше нами оценку. Вблизи λ_b : $\xi_{2,3}(\lambda) = -1/\sqrt[3]{2} \pm \sqrt{\lambda - \lambda_b}$. Вдали от λ_b нелинейным членом X^3 в (2) можно пренебречь:

$$X = A^{-1}(D)\eta. \quad (6)$$

Значение X_p для одиночных скачков МСР будем оценивать согласно соотношению

$$X_p = \frac{y_p - y_0}{\tau_p/2}, \quad (7)$$

где y_p – значение МСР в точке максимума, y_0 – значение МСР в начале пика и τ_p – ширина пика.

Тогда параметры МФД определяются из системы уравнений

$$X_i - A^{-1}(D_i, D_0, D_k)\eta = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$B_0 = 4\eta X_p^{-3}, \quad D_b = D_k + (D_0 - D_k) \left(1 - \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} X_p^3 \eta^{-5/3}\right)^{-1}.$$

Для численного решения системы уравнений (8) приведем ее к более удобному виду. Для этого введем функцию $A_1(D)$ согласно соотношению

$$A_1(D) = \Theta(D - D_0)(D_0 - D_k) + \Theta(D_0 - D)(D - D_k), \quad (9)$$

где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда, равная 1 при $x \geq 0$ и 0 при $x < 0$.

При численном решении мы будем использовать для $\Theta(x)$ ее аппроксимацию аналитическим выражением:

$$\Theta(x) \approx \frac{1}{1 + e^{-x/\varepsilon}}, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (10)$$

Тогда

$$A_1(D, D_0, D_k) = \frac{D_0 - D_k}{1 + e^{-(D-D_0)/\varepsilon}} + \frac{D - D_k}{1 + e^{-(D_0-D)/\varepsilon}}.$$

Преобразуем систему уравнений (8) к виду

$$X_i - A_1^{-1}(D_i, D_0, D_k)(D_0 - D_i)(D_0 - D_k)\eta = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

$$B_0 = 4\eta X_p^{-3}, \quad D_b = D_k + (D_0 - D_k) \left(1 - \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} X_p^3 \eta^{-5/3}\right)^{-1}, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

Реальная изменчивость внешних факторов, влияющих на МСР и определяющих параметр η , не позволяет нам считать его строго постоянным на протяжении всех трех периодов наблюдения. Тем более не всегда при $\eta = const$ система уравнений (11) будет совместной.

Будем считать, что η можно представить в каждом из периодов i в виде большей части η_0 и малой вариативной части $\delta\eta_i$: $\eta = \eta_0 + \delta\eta_i$, то есть считаем, что $|\delta\eta_i| \ll |\eta_0|$.

Поэтому решение задачи проведем в два этапа. Вначале решим систему

$$f_i = X_i - A_1^{-1}(D_i, D_0, D_k)(D_0 - D_i)(D_0 - D_k)\eta = 0. \quad (12)$$

Минимизацией невязки $u = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$ находим приближенное решение (12) для D_0, D_k, η_0 . Используя их, найдем значения $\delta\eta_i$ по формуле

$$\delta\eta_i = \frac{A_1(D_i, D_0, D_k) X_i}{(D_0 - D_i)(D_0 - D_k)} - \eta_0. \quad (13)$$

Для решения (12) введем новые переменные $x_1 = D_0, x_2 = D_k, x_3 = \eta_0$ и будем искать итерационным способом, используя метод градиентного спуска. В результате получим

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - \lambda_n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u(x_j^{(n)}) \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (14)$$

λ_n – шаг итерационного процесса.

Начальное приближение $x_i^{(0)}$ выбирается после анализа величины x_i и функции f_i . Для реализации схемы (14) нами составлена и реализована программа в системе Maple, которая останавливает итерационный процесс при $u^{(n+1)} - u^{(n)} > 0$ и $u^{(n)} - u^{(n+1)} < l$, где $u^{(n)} = u(x_i^{(n)})$, l – требуемая погрешность решения системы уравнений (12). Условие $u^{(n+1)} - u^{(n)} > 0$ обеспечивает монотонное убывание невязки u в рамках итерационного процесса (14).

В рамках данного исследования мы провели обработку данных, полученных в результате холтеровского мониторирования пациентов Тверского кардиологического диспансера. Приведем подробные результаты анализа одного пациента.

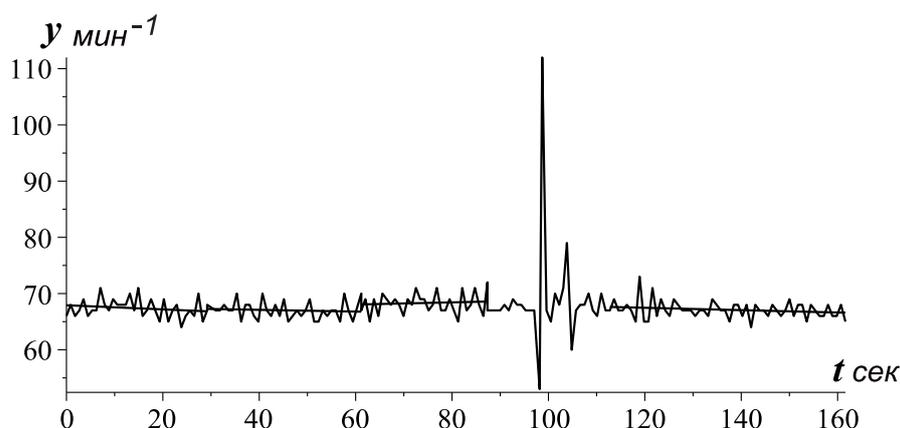


Рис. 3: Кривая МСР $y(t)$, на которой имеет место скачек МСР

График его МСР на временном участке продолжительностью 160 сек., на котором имеет место скачок МСР, приведен на Рис. 3. Методика получения кривой МСР $y(t)$ подробно описана нами в [2].

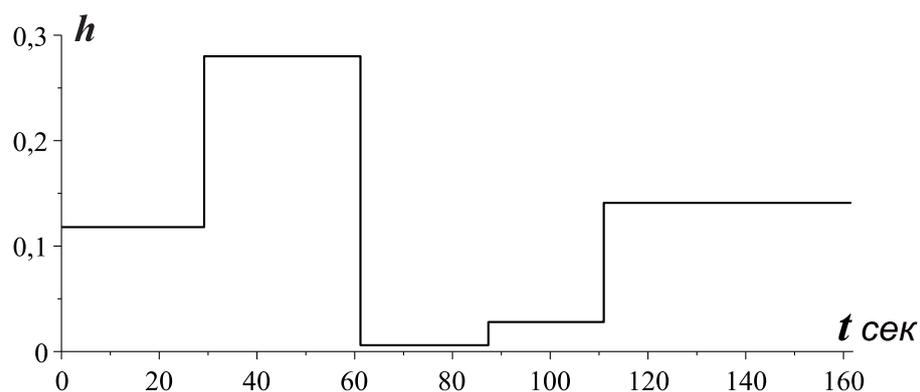
Аппроксимируем МСР вне области скачков кусочно-линейным трендом, содержащим четыре промежутка. Три до скачка и один после скачка.

Значения параметров МСР на исследуемом временном интервале приводятся в Таблице 1. Максимальное уклонение МСР от кусочно-линейного тренда равно 4 мин^{-1} .

Таблица 1: Значения параметров МСР

i	1	2	3	P	4
D_i	1.746	1.908	1.634		1.769
X_i	$-0.034 \cdot 10^{-3}$	$-0.037 \cdot 10^{-3}$	$0.007 \cdot 10^{-3}$		
X_p				$82 \cdot 10^{-3}$	
τ_p				1.42 сек.	
D_0	1.628				
D_k	1.656				
η_0	$-1 \cdot 10^{-3}$				
D_b	1.656				
B_0	-7.255				
$\delta\eta_1$	$0.1 \cdot 10^{-3}$				
$\delta\eta_2$	$0.16 \cdot 10^{-3}$				
$\delta\eta_3$	$0.03 \cdot 10^{-3}$				

Из данных Таблицы 1 видно, что фрактальная размерность МСР изменяется в интервале $1.634 < D < 1.908$. Данные значения D значительно превышают гауссовское значение 1.500, что указывает на высокую степень хаотичности МСР на исследуемом временном промежутке. Причем на втором временном участке фрактальная размерность МСР достигает значения 1.908, что очень близко к предель-

Рис. 4: График функции $h(t)$

но возможному значению, равному 2. Вышеуказанному интервалу принадлежит значение фрактальной размерности в точке бифуркации D_b . Данный факт указывает на то, что фрактальная размерность МСР является флагом катастрофы МСР, в которой возникают скачки мгновенного сердечного ритма. Отметим близость значений параметров модели D_b и D_0 , поскольку их разность составляет 0.0279. Достаточно фрактальной размерности вырасти на эту величину, как возможен переход от равновесного значения, при котором скорость линейного тренда равна нулю, до возникновения скачков. При этом очевидна неустойчивость характера МСР на данном временном интервале относительно возникновения скачков. На наш взгляд, несмотря на то, что значения X_i малы, близость D_b и D_0 как раз и является наиболее существенным фактором возникновения скачков МСР.

На всех трех интервалах знак параметра η оказался отрицательным, что говорит о действии внешних факторов в сторону замедления МСР, то есть отрицательных значений X_i . Действительно, X_1 и $X_2 < 0$, а $X_3 > 0$, но по абсолютной величине оказывается на порядок меньше, чем X_1 и X_2 . Вариативность параметра η на исследуемом промежутке согласно данным Таблицы 1 не превышает 16%.

Коэффициент нелинейности B_0 в уравнении (2) равен -7.255 . Отрицательный знак этого коэффициента приводит к тому, что точка бифуркации имеет меньшее значение фрактальной размерности D_b , чем значение в критической точке D_k . При этом сравнительно небольшое абсолютное значение коэффициента B_0 обуславливает достаточно значительный скачок МСР.

Данные Таблицы 1 позволяют рассмотреть динамику поведения функции $h = D - D_0$, которая описывает вариативность скорости кусочно-линейного тренда МСР. Этот график нами представлен на Рис. 4.

На первой половине временного промежутка функция h имеет осцилляторный характер, то есть вид бегущей в направлении временной оси прямоугольной волны. На второй половине она имеет ступенчатый характер с ростом амплитуды прямоугольной волны. На наш взгляд, такая смена характера поведения функции h тесно связана с возникновением скачков в начале второй половины исследуемого промежутка МСР.

Представляет несомненный интерес провести оценку частоты скачков МСР у исследуемого пациента. Для этого нами была составлена компьютерная програм-

ма, фиксирующая скачки МСР с $X_p > 2 \cdot 10^{-2}$. При этом выявлен временной интервал продолжительностью 1.6 часа на котором частота скачков ν_p максимальна и равна 228.5 час^{-1} , а также интервал продолжительностью 7 часов с минимальным значением ν_p равным 19.7 час^{-1} . Средняя частота скачков на всем интервале наблюдения ν_p оказалась равной 67.5 час^{-1} .

Сопоставим полученные нами параметры МСР модели МФД с параметрами состояния сердечно-сосудистой системы исследуемого пациента, найденными с помощью стандартных кардиологических подходов. Приведем основные характеристики состояния пациента. Возраст исследуемого пациента 65 лет. Основной диагноз: артериальная гипертензия. Клинически проявляется значимым подъемом артериального давления. Мониторирование ЭКГ назначено в связи с жалобами на неритмичность в работе сердца. При исследовании в отсутствии ишемических изменений на ЭКГ выявлены разнообразные нарушения ритма в виде желудочковых и суправентрикулярных экстрасистол, позволивших отнести пациента к группе риска внезапной сердечной смерти 4а по классификации Ryan (риск высокий), что характеризуется большой частотой желудочковых мономорфных экстрасистол (15 в час при норме менее 6 в час) и наджелудочковых экстрасистол (28 в час при норме менее 6 в час), а также с регистрацией парных и групповых эктопических сокращений. Данный факт характеризует возможность развития фатальной желудочковой аритмии. Проведенный анализ variability сердечного ритма выявил существенное преобладание активности симпатической нервной системы, что является дополнительным фактором риска развития неблагоприятных событий. Еще одним фактором риска явилось обнаружение значимого удлинения интервала QT и его дисперсии на ЭКГ, регистрируемого в течение 42% времени мониторинга. Указанные факторы можно трактовать как предвестники фатальных аритмических событий у больного с артериальной гипертензией, причиной чего следует считать увеличение массы (гипертрофию) левого желудочка.

Заключение

В работе на основе данных холтеровского мониторинга исследуются скачки МСР в модели МФД. В ней скачки МСР представляют собой катастрофы, флагом которых служит значение фрактальной размерности МСР. Скачки МСР в модели МФД имеют место быть, когда фрактальная размерность МСР D достигает точки бифуркации D_b , то есть имеют бифуркационную природу.

Актуальность исследования скачков МСР тесно связана с необходимостью выявления новых маркеров неблагоприятных сердечно-сосудистых эпизодов.

Для определения параметров МСР вблизи и в области скачков в модели МФД нами получена система уравнений (8), (11) и на основе метода градиентного спуска сформулирован алгоритм численного решения этой системы. Составленная на его основе и реализованная программа позволила найти параметры МСР в модели МФД. Они представлены в Таблице 1.

Средняя частота скачков на всем интервале наблюдения ν_p оказалась равной 67.5 час^{-1} .

Показано, что фрактальная размерность МСР изменяется в интервале $1.634 < D < 1.908$. Данные значения D значительно превышают гауссовское значение

1.500, что указывает на высокую степень хаотичности МСР на исследуемом временном промежутке. Причем на втором временном участке фрактальная размерность МСР достигает значения 1.908, что очень близко к предельно возможному значению, равному 2. Вышеуказанному интервалу принадлежит значение фрактальной размерности в точке бифуркации D_b . Дано обоснование, что фрактальная размерность МСР является флагом катастрофы МСР, в которой возникают скачки мгновенного сердечного ритма.

Выясняется возможный механизм возникновения скачков МСР. Несмотря на то, что значения X_i малы, близость D_b и D_0 как раз и является наиболее существенным фактором возникновения скачков МСР.

Найдено, что на всех трех интервалах знак параметра η оказался отрицательным, что говорит о действии внешних факторов в сторону замедления МСР, то есть отрицательных значений X_i . Причем вариативность параметра η на исследуемом промежутке согласно данным Таблицы 1 не превышает 16%.

Коэффициент нелинейности B_0 в уравнении (2) оказался равным -7.255 . Отрицательный знак этого коэффициента приводит к тому, что точка бифуркации имеет меньшее значение фрактальной размерности D_b , чем значение в критической точке D_k . При этом сравнительно небольшое абсолютное значение коэффициента B_0 обуславливает достаточно значительный скачок МСР.

На основании данных таблицы построена функция h , которая описывает вариативность скорости кусочно-линейного тренда МСР.

На первой половине временного промежутка функция h имеет осцилляторный характер, то есть вид бегущей в направлении временной оси прямоугольной волны. На второй половине она имеет ступенчатый характер с ростом амплитуды прямоугольной волны. На наш взгляд, такая смена характера поведения функции h тесно связана с возникновением скачков в начале второй половины исследуемого промежутка МСР.

Проведено сравнение полученных нами значений параметров МСР модели МФД с состоянием сердечно-сосудистой системы исследуемого пациента с помощью стандартных кардиологических подходов.

Список литературы

- [1] Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Цветков В.П., Цветков И.В. Математическая модель мультифрактальной динамики и анализ сердечных ритмов // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 10. С. 127–136.
- [2] Иванов А.П., Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Цветков В.П., Цветков И.В. Анализ мгновенного сердечного ритма в модели мультифрактальной динамики на основе холтеровского мониторинга // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 4. С. 16–30.
- [3] Kudinov A.N., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Catastrophes in the multifractal dynamics of socioeconomic systems // Russian Journal of Mathematical Physics. 2011. Vol. 18, no. 2. Pp. 149–155.
- [4] Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Рыжиков В.Н., Цветков В.П., Цветков И.В., Иванов А.П. Самоподобие скаттерограммы мгновенного сердечного ритма // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 105–115.

- [5] Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Рыжиков В.Н., Цветков В.П., Цветков И.В., Иванов А.П. Самоподобие и фрактальная размерность скаттерограммы мгновенного сердечного ритма // Научные технологии. 2015. Т. 16, №5. С. 57–63.

Библиографическая ссылка

Иванов А.П., Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Михеев С.А., Цветков В.П., Цветков И.В. Бифуркационные катастрофы мгновенного сердечного ритма в модели мультифрактальной динамики // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 63–73.

Сведения об авторах

- 1. Иванов Александр Петрович**
научный руководитель Тверского областного кардиологического диспансера.
Россия, 170041, г. Тверь, Комсомольский пр-т, д. 19.
E-mail: ivanovcardio2010@yandex.ru.
- 2. Кудинов Алексей Никифорович**
заведующий кафедрой математического моделирования, директор НОЦ «Математическое моделирование» Тверского государственного университета.
Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: mathlab@yandex.ru.
- 3. Лебедев Дмитрий Юрьевич**
аспирант кафедры общей математики и математической физики Тверского государственного университета.
Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: dmyl@yandex.ru.
- 4. Михеев Сергей Александрович**
доцент кафедры общей математики и математической физики Тверского государственного университета.
Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: sergjan800@rambler.ru.
- 5. Цветков Виктор Павлович**
заведующий кафедрой общей математики и математической физики Тверского государственного университета.
Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: tsvet@tversu.ru.
- 6. Цветков Илья Викторович**
профессор кафедры экономики и управления производством Тверского государственного университета.
Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: tanpsi@mail.ru.

BIFURCATION CATASTROPHES OF AN INSTANT CARDIAC RHYTHM IN MULTIFRACTAL DYNAMICS MODEL

Ivanov Alexander Petrovich

Research Advisor, Tver Cardiologic Dispensary

Russia, 170041, Tver, 19 Komsomolsky avenue. E-mail: ivanovcardio2010@yandex.ru

Kudinov Alexei Nikiforovich

Head of REC Mathematical Modeling, Tver State University

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: mathlab@yandex.ru

Lebedev Dmitry Yurevich

PhD student of General Mathematics and Mathematical Physics department,
Tver State University

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: dmyl@yandex.ru

Mikheev Sergey Alexandrovich

Associate Professor of General Mathematics and Mathematical Physics department,
Tver State University

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: sergjan800@rambler.ru

Tsvetkov Victor Pavlovich

Head of General Mathematics and Mathematical Physics department,
Tver State University

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: tsvet@tversu.ru

Tsvetkov Ilya Viktorovich

Professor of Economics and Company Management department, Tver State University

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: mancu@mail.ru

Received 24.12.2015, revised 12.01.2016.

In this paper we study the instantaneous heart rate jumps within multifractal model dynamics.

Keywords: instantaneous heart rate, bifurcation catastrophes, multifractal dynamics model, instantaneous heart rate jumps.

Bibliographic citation

Ivanov A.P., Kudinov A.N., Lebedev D.Y., Mikheev S.A., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Bifurcation catastrophes of an instant cardiac rhythm in multifractal dynamics model. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 1, pp. 63–73. (in Russian)

References

- [1] Kudinov A.N., Lebedev D.Yu., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Mathematical model of multifractal dynamics and analysis of heart rate. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Modeling], 2014, vol. 26(10), pp. 127–136.
- [2] Ivanov A.P., Kudinov A.N., Lebedev D.Yu., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Analysis of instantaneous heart rate in the multifractal dynamics model based on Holter monitoring. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Modeling], 2015, vol. 27(4), pp. 16–30.
- [3] Kudinov A.N., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Catastrophes in the multifractal dynamics of socioeconomic systems. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2011, vol. 18(2), pp. 149–155.
- [4] Kudinov A.N., Lebedev D.Yu., Ryzikov V.N., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V., Ivanov A.P. Self-similarity of a scatterogram of an instant cardiac rhythm. *Vestnik TsvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 3, pp. 105–115. (in Russian)
- [5] Kudinov A.N., Lebedev D.Yu., Ryzhikov V.N., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V., Ivanov A.P. Self-similarity and fractal dimension of scatterogram of instant heart rate. *Naukoemkie Tekhnologii* [High Tech], 2015, vol. 16(5), pp. 57–63.