УДК 519.95, 336.763

ЭФФЕКТИВНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ПОРТФЕЛИ

Аль-Натор М.С.*, **Керимов А.К.****
*Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва
**Российский университет дружбы народов, г. Москва

Поступила в редакцию 11.12.2014, после переработки 28.12.2014.

Рассматриваются неоднородные портфели, содержащие, помимо базовых активов, срочные контракты на них. Для такого рода портфелей определяются его характеристики и методы их оценки по статистическим данным. В качестве приложения рассматривается задача динамического страхования портфеля акций посредством добавления в него срочных контрактов. При постановке задачи страхования, кроме дисперсии портфеля учитываются ограничения на ожидаемый доход и количество фьючерсных контрактов. Кроме того, рассмотрены неоднородные эффективные портфели и методы их построения. Все теоретические выводы иллюстрируются на конкретных примерах.

Ключевые слова: фьючерсные контракты, неоднородные портфели, доход и риск портфеля, эффективные портфели.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 115–126.

Введение

В работе рассматривается формализация портфелей, содержащих помимо базовых активов фьючерсные контракты на них. Для такого рода портфелей определяются его основные характеристики – прогнозы дохода и дисперсии – на основе экспоненциального сглаживания. Этот подход учитывает неоднородность изменений цен спот и фьючерс на базовые активы. Рассмотрение такого рода портфелей обусловлено тем, что классические эффективные однородные портфели, составленные из акций российских компаний, недостаточно эффективны с точки зрения страхования и получения дополнительных прибылей. Это связано с тем обстоятельством, что изменения цен акций «голубых фишек» на российских фондовых биржах сильно положительно коррелированны. С другой стороны, открытие коротких позиций сопряжено с жесткими ограничениями.

В качестве приложения рассматривается динамическое страхование или хеджирование инвестиционного портфеля на основе фьючерсных контрактов, когда базовая часть портфеля фиксирована. Классический метод страхования на основе фьючерсных контрактов основан на сильной положительной корреляции между изменениями цены спот и фьючерсной цены на заданный актив. Основным вопросом страхования является оценка необходимого числа фьючерсных контрактов для страхования позиции. Традиционный метод основан на регрессии изменения цены спот на изменения фьючерсной цены [1], [2], [5]. Коэффициент при изменении фьючерсной цены в этой регрессии определяет необходимое число фьючерсных контрактов, реализующих минимум дисперсии смешанного портфеля. В случае портфеля акций рекомендуется использовать технику страхования по каждому активу по приведенной выше схеме. При таком подходе не учитывается степень коррелированности изменений цен активов, составляющих портфель. Далее временные ряды изменений цен спот и фьючерс, как правило, не обладают необходимой однородностью по среднему уровню и дисперсии (см. Рис. 1–3). Неустойчивость среднего уровня ведет к неадекватному прогнозу ожидаемого дохода, неустойчивость по дисперсии ведет к искажениям коэффициента хеджирования. Кроме того, предлагаемые подходы для определения необходимого числа фьючерсных контрактов учитывают только один параметр – дисперсию, характеризующую ценовую изменчивость портфеля. При этом такие важнейшие параметры портфеля как ожидаемый доход (или доходность) или возможные ограничения на число фьючерсных контрактов не принимаются во внимание. Тем самым не учитывается возможность получения дополнительных прибылей за счет использования деривативов. В связи с этим отметим, что в условиях отсутствия роста российского фондового рынка, использование деривативов для хеджирования инвестиций и получения дополнительных прибылей является актуальной задачей. Фьючерсные контракты на акции крупных российских корпораций широко представлены на фондовой бирже РТС. При этом все контракты имеют одинаковую структуру (см. [7]).

В настоящей работе рассматривается динамическое страхование заданного инвестиционного портфеля фьючерсными контрактами с учетом ограничений на ожидаемый доход и число контрактов с учетом корреляции изменений цен базовых активов. Кроме того, рассматриваются эффективные портфели с фьючерсными контрактами и техника их оценки.

1. Смешанные портфели

Ниже рассматриваются смешанный портфель, содержащий n различных активов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и фьючерсные контракты на них. При этом используются следующие обозначения: Q_{si} – число единиц базового актива номера i, k_i – число фьючерсных контрактов на i-й актив ($i = 1, 2, \ldots, n$). Таким образом, портфель определяется набором целых чисел

$$(Q_{s1}, Q_{s2}, \ldots, Q_{sn}, k_1, k_2, \ldots, k_n). \tag{1}$$

Знак целого k_i определяет позицию по контракту: $k_i > 0$ означает , что портфель содержит k_i контрактов на покупку актива (или k_i длинных позиций), $k_i < 0$ – портфель содержит $|k_i|$ контрактов на продажу актива (или $|k_i|$ коротких позиций). То же самое замечание справедливо и для Q_i, однако, для определенности в дальнейшем, считается, что по базовым активам портфель содержит только длинные позиции, то есть все $Q_{si} > 0$.

Далее используются следующие обозначения: $S_i(t)$ и $F_i(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) – цена спот и фьючерсная цена (в денежном выражении) на момент времени t, q_{fi} – число единиц базового актива в одном фьючерсном контракте номера i. Тогда изменение стоимости портфеля (1) за единицу времени представляется в виде (см. [1], [5])

$$\nabla P(t) = \sum_{i=1}^{n} \nabla S_i(t) Q_{si} + \sum_{i=1}^{n} \nabla F_i(t) k_i q_{fi}, \qquad (2)$$

где через $\nabla P(t)$, $\nabla S_i(t)$, $\nabla F_i(t)$ – обозначают изменения соответствующих величин за единицу времени:

$$\begin{aligned}\nabla P(t) &= P(t) - P(t-1),\\ \nabla S_i(t) &= S_i(t) - S_i(t-1),\\ \nabla F_i(t) &= F_i(t) - F_i(t-1).\end{aligned}$$

Обычно, если не оговорено противное, в качестве единицы измерения времени выбираются сутки. В этом случае цены относятся к моменту закрытия торговой сессии, а формула (2) определяет выигрыш/проигрыш по портфелю за торговую сессию. Формула (2) принимает более компактный вид, если использовать векторные обозначения:

$$\nabla P(t) = (\nabla S(t), Q_s) + (\nabla F(t), Q_f), \qquad (3)$$

где

$$\nabla S(t) = \{\nabla S_i(t)\}, \quad \nabla F(t) = \{\nabla F_i(t)\},$$

$$Q_s = \{Q_{si}\}, \quad Q_f = \{Q_{fi} = k_i q_{fi}\},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ – вектора, $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение. В дальнейшем всегда предполагается, что все рассматриваемые векторы записаны в виде столбцов.

Вероятностные характеристики изменений рассматриваемых величин *меняются во времени.* Для любого заданного (текущего) момента времени t цены на следующий момент времени $t+1$ рассматриваются как условные случайные величины, то есть как случайные величины *при условии, что история изменения цен до этого момента включительно известна.* Все характеристики изменений цен на следующий момент времени рассматриваются как условные. Например, ожидаемое значение изменения цены актива $M = M_t$ на момент $t+1$ рассматривается при условии, что история цен до этого момента включительно известна. Так определенное условное ожидаемое изменение интерпретируется как *прогноз* изменений цены на один шаг вперед. Точно также дисперсия отклонений фактических изменений от прогноза определяется при условии, что информация по ценам доступна вплоть до текущего момента. По мере появления новых данных прогнозы изменений и их характеристики корректируются, то есть адаптируются к новым данным. То же самое замечание справедливо и для уровня корреляционной связи между изменениями цен различных активов – корреляция (соответственно, ковариация) изменяется во времени и эти изменения следует корректировать по мере поступления ценовых данных. Простые способы такой коррекции будут рассмотрены ниже. В дальнейшем все рассматриваемые характеристики – ожидаемое значение, дисперсия и ковариация – относятся к текущему моменту времени и трактуются в вышеприведенном смысле. В следующей ниже теореме текущий момент времени t зафиксирован и явно не указывается.

Теорема 1. *Ожидаемое изменение стоимости портфеля и его дисперсия на данный момент времени t определяются равенствами*

$$M(\nabla P) = (M, Q_s) + (F_f, Q_f), \tag{4}$$

$$D(\nabla P) = (C_{ss}Q_s, Q_s) + 2(C_{sf}Q_f, Q_s) + (C_{ff}Q_f, Q_f), \tag{5}$$

где: $M_s = (M_{s1}, M_{s2}, \ldots, M_{sn})$, $M_f = (M_{f1}, M_{f2}, \ldots, M_{fn})$ – вектора ожидаемых изменений на текущий момент времени;

$$C_{ss} = \{Cov(\nabla S_i, \nabla S_j)\}, \quad C_{sf} = \{Cov(\nabla S_i, \nabla F_j)\}, \quad C_{ff} = \{Cov(\nabla F_i, \nabla F_j)\}$$

– ковариационные матрицы размера $n \times n$ на текущий момент времени.

Доказательство. Имеем (см. (2) и (3))

$$\begin{aligned} D(\nabla P) &= D\left(\sum_{i=1}^{n} \nabla S_i Q_{si} + \sum_{i=1}^{n} \nabla F_i Q_{fi}\right) = \\ &= D\left(\sum_{i=1}^{n} \nabla S_i Q_{si}\right) + D\left(\sum_{i=1}^{n} \nabla F_i Q_{fi}\right) + 2Cov\left(\sum_{i=1}^{n} \nabla S_i Q_{si}, \sum_{j=1}^{n} \nabla F_j Q_{fj}\right) = \\ &= (C_{ss}Q_s, Q_s) + (C_{ff}Q_f, Q_f) + 2Cov\left(\sum_{i=1}^{n} \nabla S_i Q_{si}, \sum_{j=1}^{n} \nabla F_j Q_{fj}\right). \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\begin{aligned} Cov\left(\sum_{i=1}^{n} \nabla S_i Q_{si}, \sum_{i=1}^{n} \nabla F_j Q_{fj}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(\nabla S_i, \nabla F_j) Q_{si} Q_{fj} = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} Cov(\nabla S_i, \nabla F_j) Q_{fj}\right) Q_{si} = (C_{sf}Q_f, Q_s). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Формуле (5) можно придать более симметричный вид. Для этого введем блочную матрицу C и вектор-столбец Q, определяемые равенствами:

$$C = \begin{pmatrix} C_{ss} & C_{sf} \\ C_{fs} & C_{ff} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_s \\ Q_f \end{pmatrix}, \quad C_{fs} = C_{sf}^* = \{Cov\,(\nabla F_i, \nabla S_j)\}. \tag{6}$$

Тогда дисперсия портфеля представится в виде

$$D(\nabla P) = (CQ, Q). \tag{7}$$

2. Адаптивное прогнозирование на основе экспоненциального сглаживания

Ниже приводится простая схема оценки ожидаемой доходности и стандартного отклонения на основе экспоненциального сглаживания (см. [2], [4]). Пусть временной ряд $x(t)$, $2 \leqslant t \leqslant T$, представляет абсолютные или относительные изменения цены определенного актива, время T ассоциируется с текущим моментом времени. Ряд $x(t)$ строится по ряду цен, которые предполагаются определенными для $1 \leqslant t \leqslant T$. Вначале оцениваются стандартные отклонения $x(t)$ для каждого согласно следующему алгоритму.

1. Вычислить квадраты отклонения доходности от его среднего уровня

$$e^2(t) = (x(t) - EMA(t; x, w_1))^2,$$

где $EMA(t; x, w_1)$ – это оценка ожидаемого значения $x(t)$ на момент времени t.

2. В качестве оценки дисперсии (квадрата стандартного отклонения) доходностей принимается экспоненциальное среднее отклонений e^2 с параметром сглаживания w_2, то есть полагается

$$\sigma^2(t) = EMA(t; e^2, w_2).$$

Полученный ряд $\sigma(t)$ – это оценка стандартного отклонения на момент времени t. Прогнозы ожидаемого значения ряда x и его стандартного отклонения на один шаг вперед, сделанные в момент t, определяются равенствами

$$x_f(t+1) = EMA(t; x, w_1), \qquad \sigma_f(t+1) = \sqrt{EMA(t; e^2, w_2)}.$$

Полагая $t = T + 1$, получим прогнозы на момент $T + 1$

Прогнозирование на основе экспоненциального сглаживания – простая и достаточно эффективная процедура, особенно в случае, когда неоднородности по среднему или дисперсии не слишком резкие. Значения прогнозов на шаг вперед зависят от выбора окон сглаживания. Окна сглаживания можно выбирать из условия минимума суммы квадратов

$$\sum_{t=1}^{T-1} \left(e^2(t+1) - EMA(t; w_2, e^2)\right)^2$$

по всем целым w_1, w_2 таким, что все значения $x(t)$ лежат в коридоре

$$\left[x_f(t+1) - 3\sigma_f(t+1), x_f(t+1) + 3\sigma_f(t+1)\right], \quad t = 1, 2, \ldots, T-1.$$

По мере поступления новых данных прогнозы корректируются. Параметры w_1, w_2 периодически переоцениваются. Результаты прогнозирования, полученные этим способом, представлены на Рис. 1–3, на которых вместе с прогнозами ожидаемых изменений приведены также и коридоры $x_f(t+1) \pm 2\sigma_f(t+1)$.

3. Страхование инвестиционного портфеля

Классическая задача оптимального страхования фьючерсными контрактами ставится следующим образом.

Задача 1. Портфель содержит акции известных компаний $A_1, A_2, \ldots, A_n$, в количествах $Q_{s1}, Q_{s2}, \ldots, Q_{sn}$. Найти количества фьючерсных контрактов $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ по рассматриваемым акциям, минимизирующих дисперсию портфеля после добавления в в него этих контрактов. Математически задача сводится к минимизации дисперсии портфеля по вектору k. Таким образом, оптимальное число фьючерсных контрактов опредляется как решение задачи минимизации дисперсии

$$D(\nabla P) = (C_{ss}Q_s, Q_s) + 2(C_{sf}Q_f, Q_s) + (C_{ff}Q_f, Q_f)$$

при ограничениях: $Q_s = \{Q_{si}\}$ – задано, $Q_f = \{k_i q_{fi}\}$, k_i – целое $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Если ковариационная матрица C_{ff} невырождена, то решение представляется в виде:

$$Q_f = -C_{ff}^{-1}C_{sf}^{*}Q_s, \qquad k_i = \frac{Q_{fi}}{q_{fi}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Поскольку k_i должны быть целыми числами, то найденные по формуле (8) значения округляются до целых чисел. В случае независимости изменений цен базовых активов, оптимальное число фьючерсных контрактов по i-му активу сводится к стандартной формуле $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$k_i = \frac{Q_{si}Cov(\nabla S_i, \nabla F_i)}{q_{fi}D(\nabla F_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В данной постановке задачи страхования ограничения на ожидаемый доход и на число контрактов отсутствуют, что ограничивает возможность получения дополнительного дохода при использовании срочных контрактов. Общую задачу оптимизации страхования портфеля активов можно сформулировать следующим образом.

Задача 2 (портфель минимальной дисперсии при заданных ограничениях на доход и количество контрактов). Найти минимум дисперсии

$$D(\nabla P) = (C_{ss}Q_s, Q_s) + 2(C_{sf}Q_f, Q_s) + (C_{ff}Q_f, Q_f)$$

по вектору $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ при ограничениях:

$$Q_f = \{k_i q_{fi}\}, \quad k_i \leqslant k_{gi}, \quad k_i \text{ – целое}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$M(\nabla P) = (M_s, Q_s) + (M_f Q_f, Q_f) \geqslant M_g, \quad \text{вектор } \; Q_s \; \text{ – задан}.$$

Здесь k_{gi} – ограничения на количество фьючерсных контрактов, M_g – ограничение на ожидаемый доход смешанного портфеля. Эти параметры задаются исходя из ситуации, сложившейся на рынке. Если ожидается повышение цены по i-му активу, но сохраняется значимая вероятность ее падения, то используются ограничения на количество контрактов по этому активу.

Пример 1. На момент времени $t = 14.04.2014$ портфель инвестора содержит акции Газпрома, Роснефти и Лукойла по 1000 акций каждой компании. Фьючерсные контракты на акции Газпрома и Роснефти содержат по 100 акций на контракт, а на акции Лукойла – 10 акций на контракт. Таким образом, в данном случае:

$$Q_s - (1000, 1000, 1000), \quad q_f = (100, 100, 10).$$

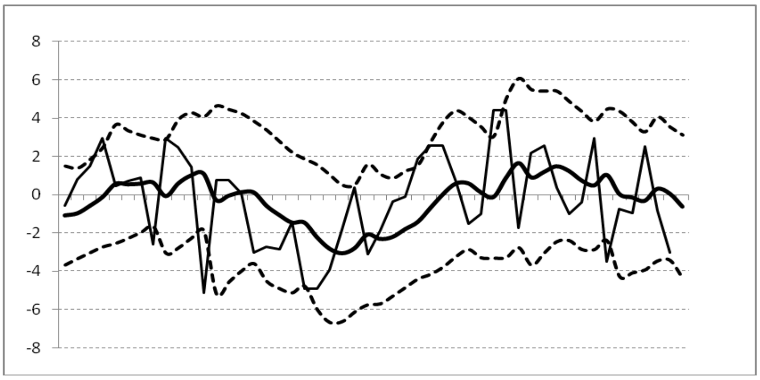

Рис. 1: Динамика изменений цен Газпрома с прогнозными доверительными границами

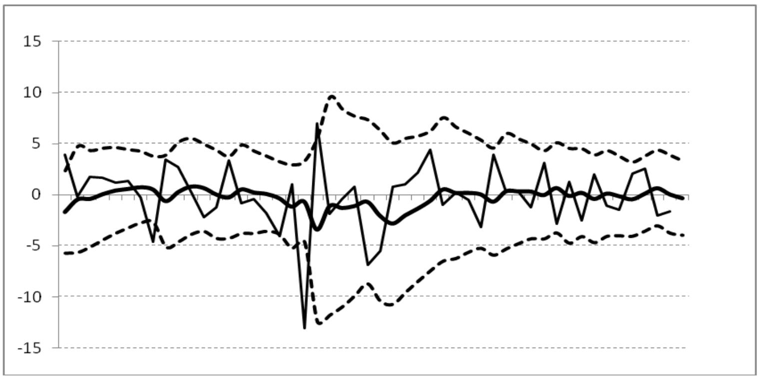

Рис. 2: Динамика изменений цен Роснефти с прогнозными доверительными границами

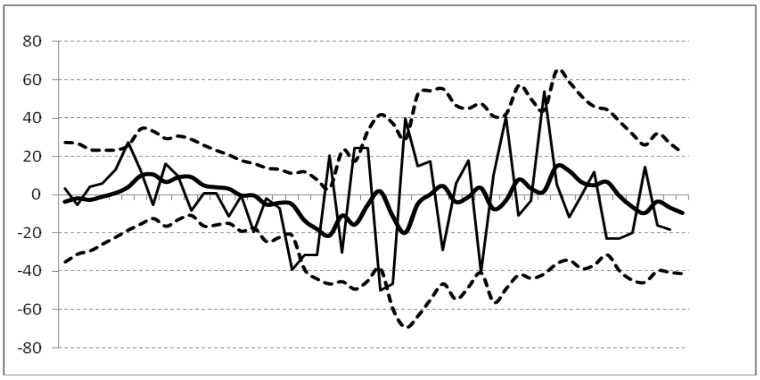

Рис. 3: Динамика изменений цен Лукойла с прогнозными доверительными границами

На рисунках 1–3 наряду с фактическими изменениями цен изображены прогнозные прогнозные доверительные границы $x_f(t+1) \pm 2\sigma_f(t+1)$. Из этих рисунков видно, что по акциям рассматриваемых компаний ожидается падение изменений цен (дохода). Прогнозы (M_s) и их стандартные ошибки (σ_s), оцененные методом экспоненциального сглаживания с окнами 8 и 10 дней, представлены в таблице 1. Прогнозные оценки проводились по ценовым данным периода $[22.01.14, 14.04.14]$.

Таблица 1

Актив	Q_s	q_f	M_s(руб.)	σ(руб.)	P_s(руб.)
1. Газпром	1000	100	-0,62	1,88	131,00 р.
2. Роснефть	1000	100	-0,31	1,81	230,88 р.
3. Лукойл	1000	10	-8,47	15,82	1 880,00 р.

В последнем столбце этой таблицы представлены текущие цены на активы. В данном случае имеет смысл застраховать позиции по всем базовым активам. Оптимальное число фьючерсных контрактов определим из условия минимума дисперсии при ограничении: ожидаемый доход M_g был не ниже 1000 руб., при этом на число позиций по контрактам ограничения не предполагаются. Иначе говоря, экстремальная задача 2 решается при условии $M_g = 1000$ руб., а ограничения на k отсутствуют. В этом случае решение имеет вид

$$k_{opt} = (-33, -6, -107), \quad M_{opt} = 1027,08 \text{ руб}, \quad \sigma_{opt} = 11166,69 \text{ руб.}$$

Дисперсия эффективного портфеля примерно в два с половиной раза меньше незастрахованного портфеля. Риск портфеля можно оценить вероятностью потерять 1% стоимости базового портфеля на момент его страхования. Стоимость базового портфеля на текущий момент времени оценивается величиной 2241880,00 руб. (она оценивается по столбцам Q_s и P_s таблицы 1). В рамках нормального приближения с параметрами *среднее* $= 1027,08$ руб., *ст. отклонение* $= 11166,69$ руб. вероятность потерять сумму 22418,80 руб. (1% от стоимости портфеля) за торговую сессию равна 0,02. Таким образом, рассматриваемый портфель характеризуется низким уровнем риска.

Приводимая ниже таблица 2 характеризует сравнительное фактическое увеличение/уменьшение стоимости разных портфелей в ближайшие две торговые сессии. Сравнение проводится относительно даты 14.04.2014.

Таблица 2

Дата	$DP0$	$DP1$	$DP2$
15.04.2014	-11 500,00 р.	-232,00р.	6 820,70 р.
16.04.2014	-9 230,00 р.	502,00 р.	5 856,00 р.

В таблице 2 столбец $DP0$ представляет фактическое изменение цены незастрахованного портфеля относительно даты 14.04.2014 на дату, указанную в столбце Дата. Так, к концу следующей торговой сессии (на 15.04.2014) стоимость портфеля упадет на 11500 руб. по отношению к стоимости на текущую дату. К концу торговой сессии 16.04.2014 стоимость портфеля уменьшится на 9230 руб. относительно стоимости 14.04.2014. Аналогично, столбцы $DP1$, $DP2$ представляют фактическое изменение цен застрахованных портфелей относительно даты 14.04.2014 на дату, указанную в столбце Дата.

Портфель $DP1$ определяется как портфель минимального риска, без ограничений на ожидаемый доход. Портфель $DP2$ определяется как портфель минимального риска при условии, что ожидаемый доход не ниже 1000 руб. Как видно из этих данных, эффективный портфель $DP2$ обеспечивает дополнительный положительный доход не ниже 5 800 рублей в течении ближайших двух дней. Отметим, что коррекция портфеля 15 апреля могла бы дать еще больший доход.

4 Эффективные смешанные портфели

Для Российского фондового рынка характерна положительная корреляция между наиболее ликвидными акциями. С другой стороны объем коротких позиций как правило ограничен или вообще невозможен. Эти факторы ведут к тому, что оптимальные однородные портфели (то есть портфели, содержащие только акции), недостаточно эффективны как с точки зрения страхования, так и с точки зрения получения дополнительного дохода. В случае фьючерсных контрактов никаких существенных ограничений на короткие позиции нет, в результате смешанный портфель с точки зрения доходов и рисков становится на порядок более эффективным. В задаче страхования предполагалось, что базовая часть портфеля зафиксирована, то есть в портфеле задано. Это ограничение можно отбросить и в результате получим эффективные смешанные портфели. Мы ограничимся следующей постановкой.

Задача 3 (смешанный портфель минимальной дисперсии при заданных ограничениях на доход и количество контрактов). Найти минимум дисперсии

$$D(\nabla P) = (C_{ss}Q_s, Q_s) + 2(C_{sf}Q_f, Q_s) + (C_{ff}Q_f, Q_f) \to \min$$

по вектору $Q = (Q_s, k)$ при ограничениях:

$$Q_f = \{k_i q_{fi}\}, \quad k_i \leqslant k_{gi}, \quad Q_{si} \geqslant Q_{gi}, \quad k_i - \text{целое}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$W_s = (P_s, Q_s) \geqslant W_{sg}, \quad M(\nabla P) = (M_s, Q_s) + (M_f Q_f, Q_f) \geqslant M_g.$$

Здесь P_s – вектор цен на момент определения портфеля, W_s – капитал, инвестированный в базовую часть портфеля.

Пример 2. Рассматривается ситуация примера 1. Стоимость базовой части эффективного портфеля составляет 2241880 руб. Эта величина принимается за количество капитала, которое можно инвестировать в базовую часть портфеля, то есть $W_{sg} = 2241880$. Ожидаемый уровень доходности принимается на том же уровне, что в примере 1, то есть $M_g = 1000$ руб. Далее предполагается, что базовая часть портфеля содержит только длинные позиции ($Q_{gi} = 0$). Оптимальный портфель и его параметры, определенные как решение задачи 3, имеют вид

$$Q_s = (5006, 6870, 0), \quad k = (-60, -72, -10), \quad \sigma_{opt} = 5782,7 \text{ руб.}$$

По сравнению с портфелем $DP2$ примера 1, имеющим такую же текущую стоимость и ожидаемый доход, этот портфель имеет примерно в два раза меньшее стандартное отклонение, то есть его риск примерно в два раза ниже. Тот факт, что оптимальный портфель не содержит акций Лукойла, а только контракты на них, связан с тем, что стоимость акций Лукойла на порядок выше стоимости Газпрома и Роснефти, тогда как открытие позиций по контрактам с точностью до комиссионных бесплатно. Если ввести дополнительное ограничение на число акций по Лукойлу, например, число акций в базовой части портфеля должно быть не меньше 100, то соответствующий портфель и его параметры имеют вид

$$Q_s = (4600, 6287, 100), \quad k = (-57, -65, -20), \quad \sigma_{opt} = 5952,36 \text{ руб.}$$

Опять риск этого портфеля ниже примерно в два раза, чем у аналогичного портфеля из примера 1.

Заключение

Рассмотрены смешанные портфели, содержащие помимо базовых активов фьючерсные контракты на них. Для такого рода портфелей выведены формулы для ожидаемого дохода и его дисперсии и определены эффективные портфели. Приведены простые процедуры для адаптивной оценки прогнозов дохода и его стандартной ошибки, основанные на экспоненциальном сглаживании.

Рассмотрена задача динамического страхования инвестиционного портфеля с учетом ограничений на ожидаемый доход и число контрактов на базовые активы. Эффективность предложенного подхода демонстрируется на конкретных примерах.

Кроме того, в работе показано, что использование эффективных смешанных портфелей, позволяет, помимо эффектов страхования, получать дополнительную прибыль.

Список литературы

[1] Буренин А.М. Хеджирование фьючерсным контрактами фондовой биржи РТС. М: НТО им. С.И. Вавилова, 2009. 179 с.

[2] Керимов А.К. Методы анализа и прогнозирования ценовых данных. Технический анализ : учебное пособие. М.: РУДН, 2003. 107 с.

[3] Керимов А.К. Финансовые фьючерсные контракты. М.: Финансовый университет, 2013.

[4] Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. М.: Статистика, 1981.

[5] Халл Дж.К. Опционы, фьючерсы и другие финансовые инструменты. М.: «Вильямс», 2010.

[6] Cecchetti S.G., Gumby R.E., Figlewsci S. Estimation of the optimal futures hedge // Review of Economics & Statistics. 1988. Vol. 70. Pp. 623–630.

[7] Официальный сайт фондовой биржи РТС: http://www.rts.ru.

[8] Официальный сайт инвестиционного холдинга ФИНАМ: http://www.finam.ru/analysis/export/default/asp.

Библиографическая ссылка

Аль-Натор М.С., Керимов А.К. Эффективные неоднородные портфели // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 115–126.

Сведения об авторах

1. **Аль-Натор Мухаммед Субхи**
доцент кафедры прикладной математики Финансового университета при Правительстве РФ.

Россия, 125993, г. Москва, ГСП-3, Ленинградский проспект, д. 49.
E-mail: malnator@yandex.ru.

2. **Керимов Александр Керимович**
доцент кафедры экономико-математического моделирования Российского университета дружбы народов.

Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо Маклая, д. 6, РУДН.
E-mail: keram@bk.ru.

INHOMOGENEOUS EFFICIENT PORTFOLIOS

Al-Nator Mohammed Subhi
Department of Applied Mathematics,
Financial University under the Government of the Russian Federation
Russia, 117198, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya str., PFUR.
E-mail: malnator@yandex.ru

Kerimov Alexandr Kerimovich
Department of Economic and Mathematical Modelling,
Peoples' Friendship University of Russia
Russia, 117198, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya str., PFUR.
E-mail: keram@bk.ru

Received 11.12.2014, revised 28.12.2014.

The representation of expected return and variation are derived for portfolio with futures. The hedging problem statement assumes limitations on the expected return and on the number of futures in portfolio subject to market conditions. Adaptive methods for forecasting of necessary price parameters are used to estimate the efficient portfolio. All theoretical conclusions are illustrated on concrete examples. Moreover, the effective portfolio with futures together with methods of its construction is presented.

Keywords: futures, expected return and risk of portfolio with futures, efficient portfolio.

Bibliographic citation

Al-Nator M.S., Kerimov A.K. Inhomogeneous efficient portfolios. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 1, pp. 115–126. (in Russian)