УДК 533.6, 532.5, 517.95

ЕДИНСТВЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В БАРОТРОПНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Шеретов Ю.В.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 04.02.2015, после переработки 20.02.2015.

Для линеаризованных квазигидродинамических уравнений в баротропном приближении доказана теорема о единственности классического решения поставленной начально-краевой задачи. Установлена асимптотическая устойчивость равновесного решения. Выписана симметричная форма линеаризованной системы в инвариантах Римана для одномерных нестационарных течений.

Ключевые слова: линеаризованные квазигидродинамические уравнения, баротропное приближение, единственность классического решения, асимптотическая устойчивость равновесного решения, инварианты Римана.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 137–148.

Введение

Феноменологический вывод квазигидродинамической (КГД) системы для сжимаемой вязкой теплопроводной среды был предложен автором в [1]. Эта система стала предметом многочисленных исследований [2]. КГД уравнения являются термодинамически согласованными и для них справедлива теорема о возрастании полной энтропии в теплоизолированном объеме. Кроме того, система КГД обладает семейством точных физически адекватных решений.

Баротропное приближение квазигидродинамической системы было впервые выписано А.А. Злотником [3]. При определенных ограничениях на уравнения состояния и выражения для диссипативных коэффициентов эта система является равномерно параболической по Петровскому, что позволило сформулировать для нее локальную по времени теорему о существовании и единственности решения задачи Коши. Для линеаризованной КГД системы доказана глобальная по времени теорема о существовании и единственности обобщенного решения поставленной начально-краевой задачи из подходящего энергетического класса. Исследованию уранения баланса энергии для КГД системы в баротропном приближении посвящены работы [4, 5]. Теоремы о единственности классического решения различных вариантов КГД систем доказаны в [6–9].

В данной статье эти исследования продолжены. Для линеаризованной квазигидродинамической системы в баротропном приближении поставлена начально-краевая задача и дано определение ее классического решения. Доказана теорема о единственности классического решения в предположении, что таковое существует. Методом энергетических неравенств установлена асимптотическая устойчивость равновесного решения. Выписана симметричная форма линеаризованной системы в инвариантах Римана для одномерных нестационарных течений.

1. Квазигидродинамические уравнения в баротропном приближении

Выпишем квазигидродинамическую систему в баротропном приближении без учета внешних сил:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho \vec{u}) = \mathrm{div}\ (\rho \vec{w}), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho\vec{u}\otimes\vec{u}) + \nabla p = \mathrm{div}\ \Pi +$$
$$+\mathrm{div}\ [(\rho\vec{w}\otimes\vec{u}) + (\rho\vec{u}\otimes\vec{w})]. \tag{1.2}$$

Здесь

$$\Pi = \eta\Big((\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T - \frac{2}{3} I\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big),$$

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big).$$

Символом I обозначен единичный тензор-инвариант второго ранга. Систему замкнем уравнением состояния

$$p = p(\rho).$$

Будем считать, что сплошная среда представляет собой идеальный политропный газ. В этом случае зависимость $p = p(\rho)$ принимает вид адиабаты Пуассона

$$p = p_0\Big(\frac{\rho}{\rho_0}\Big)^{\gamma}, \tag{1.3}$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, c_v и c_p – удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно, p_0 и ρ_0 – заданные положительные константы. Заметим, что $\gamma > 1$ и $p'(\rho) > 0$ для положительных значений ρ. К системе необходимо также добавить зависимость

$$\eta = \eta(T)$$

коэффициента динамической вязкости η от температуры T. Выберем ее в виде

$$\eta = \eta_0\Big(\frac{T}{T_0}\Big)^{\omega}, \tag{1.4}$$

где η_0 – известное значение коэффициента η при температуре T_0, ω – заданное число из промежутка $[0.5,\ 1]$. Термодинамические параметры газа – плотность ρ, давление p и температура T подчиняются уравнению Менделеева–Клапейрона

$$p = \rho \mathrm{R} T. \tag{1.5}$$

Символом R обозначена газовая постоянная. В частности, константы ρ_0, p_0 и T_0 связаны соотношением

$$p_0 = \rho_0 \mathrm{R} T_0.$$

Характерное время релаксации τ определяется с помощью выражения

$$\tau = \frac{\eta}{p\ Sc},$$

где Sc – число Шмидта. Для определенности будем рассматривать одноатомный газ твердых шаров. Тогда $\omega = 1/2$, $\gamma = 5/3$, $Sc = 3/4$. Если таким газом является гелий, то $\mathrm{R} = 2.0785 \cdot 10^3$ Дж/(кг $\cdot$ К). Квазигидродинамическая система в баротропном приближении (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – плотности $\rho = \rho(\vec{x}, t)$, скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$.

Преобразуем первый член в левой части уравнения (1.1) следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho'(p)\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{p'(\rho)}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{1.6}$$

Здесь

$$c_s = \sqrt{p'(\rho)} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \mathrm{R} T} \tag{1.7}$$

– скорость звука, определяемая по формуле Лапласа. Подстановка (1.6) в (1.1) – (1.2) дает

$$\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho\vec{u}) = \mathrm{div}\ (\rho\vec{w}), \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\rho\vec{u}\otimes\vec{u}) + \nabla p = \mathrm{div}\ \Pi +\\ +\mathrm{div}\ [(\rho\vec{w}\otimes\vec{u}) + (\rho\vec{u}\otimes\vec{w})].\end{aligned} \tag{1.9}$$

2. Линеаризованные квазигидродинамические уравнения в баротропном приближении. Постановка начально–краевой задачи

Пусть

$$\rho = \rho_0, \quad \vec{u} = 0, \quad p = p_0$$

– равновесное решение системы (1.8) – (1.9). Будем искать ее решение в виде

$$\rho = \rho_0 + \widetilde{\rho}, \quad \vec{u} = \widetilde{\vec{u}}, \quad p = p_0 + \widetilde{p}.$$

Величины, помеченные знаком «тильда», считаются малыми. Подставив ρ, $\vec{u}$, p в (1.8) – (1.9), пренебрежем произведениями малых величин и их производных. Затем опустим знаки «тильда». Получим линеаризованную квазигидродинамическую систему в баротропном приближении

$$\frac{1}{\rho_0 c_{s0}^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{u} = \frac{\tau_0}{\rho_0}\Delta p, \tag{2.1}$$

$$\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \nabla p = \mathrm{div}\ \Pi. \tag{2.2}$$

Здесь

$$\Pi = \eta_0\Big((\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T - \frac{2}{3}I\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big).$$

Символом Δ обозначен оператор Лапласа. При этом выполнены соотношения

$$\eta_0 = p_0\tau_0 Sc, \quad p_0 = \rho_0 \mathrm{R} T_0, \quad c_{s0} = \sqrt{\gamma \mathrm{R} T_0}.$$

Пусть V – ограниченная, объемно и поверхностно односвязная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ с кусочно-гладкой границей ∂V, $\overline{V} = V \cup \partial V$ – ее замыкание, $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ – вектор внешней единичной нормали к ∂V в точке $\vec{x} \in \partial V$, $Q = V \times [0,\ T_f]$ – ограниченный цилиндр в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$, $\overline{Q} = \overline{V} \times [0,\ T_f]$ – его замыкание, T_f – фиксированное положительное число или символ $+\infty$. Параметр $t \in [0,\ T_f]$ интерпретируется как время. Добавим к системе (2.1) – (2.2) начальные условия

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_*(\vec{x}), \quad p\Big|_{t=0} = p_*(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \overline{V}, \tag{2.3}$$

а также граничные условия

$$\vec{u}\Big|_{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial V} = 0, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{2.4}$$

Здесь $\vec{u}_*(\vec{x}) \in \mathbf{C}^2(V) \cap \mathbf{C}^1(\overline{V})$ и $p_*(\vec{x}) \in C^2(V) \cap C^1(\overline{V})$ – заданные функции. Поле $\vec{u}_*(\vec{x})$ обращается в нуль на ∂V. Будем также считать, что

$$\int\limits_V p_*\ dV = 0. \tag{2.5}$$

Символом $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим класс непрерывных в Q функций $f = f(\vec{x}, t)$, имеющих непрерывные в Q частные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \partial t^{\beta}}$$

для любых целых и неотрицательных чисел α_1, α_2, α_3 и β, подчиняющихся неравенству $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\beta \leqslant 2\alpha$. Класс $\mathbf{C}^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$ состоит из вектор–функций $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, t) = (f_1(\vec{x}, t), f_2(\vec{x}, t), f_3(\vec{x}, t))$, каждая компонента f_i которых принадлежит $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$.

Определение 1. *Классическим решением начально–краевой задачи* (2.1) – (2.2), (2.3) – (2.4) *назовем функции* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) \in \boldsymbol{C}^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap \boldsymbol{C}^1(\overline{Q})$ *и* $p = p(\vec{x}, t) \in C^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, *удовлетворяющие при всех* $(\vec{x}, t) \in Q$ *уравнениям* (2.1) – (2.2), *а также условиям* (2.3) – (2.4).

3. Основное энергетическое равенство. Единственность классического решения

Исследуем свойства классического решения, предполагая, что при некоторых начальных данных оно существует.

Теорема 1. *На любом классическом решении начально-краевой задачи* (2.1) – (2.2), (2.3) – (2.4) *при всех* $(\vec{x}, t) \in Q$ *выполняется энергетическое равенство*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{1}{\rho_0 c_{s0}^2}p^2 + \rho_0 \vec{u}^2\Big) + \ div\ (p\vec{u}) = div\ \Big(\frac{\tau_0}{\rho_0}p\nabla p + (\Pi \cdot \vec{u})\Big) - \Psi. \tag{3.1}$$

Здесь

$$\Psi = \frac{(\Pi : \Pi)}{2\eta_0} + \frac{\tau_0}{\rho_0}\big(\nabla p\big)^2 \tag{3.2}$$

– *неотрицательный диссипативный функционал,* $(\Pi : \Pi) = \sum\limits_{i,j=1}^{3}(\Pi_{ij})^2$ – *двойное скалярное произведение одинаковых тензоров.*

Доказательство. Умножим уравнения (2.1) на p, а уравнение (2.2) скалярно на вектор $\vec{u}$. Будем иметь

$$\frac{1}{\rho_0 c_{s0}^2}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{p^2}{2}\Big) + p\ \mathrm{div}\ \vec{u} = \frac{\tau_0}{\rho_0}\ \mathrm{div}\ \big(p\nabla p\big) - \frac{\tau_0}{\rho_0}\big(\nabla p\big)^2, \tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}
\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + (\vec{u}\cdot\nabla)p = \mathrm{div}\ \big(\Pi\cdot\vec{u}\big) - \Pi : \big(\nabla\otimes\vec{u}\big) = \\
= \mathrm{div}\ \big(\Pi\cdot\vec{u}\big) - \frac{1}{2}\ \Pi : \Big(\big(\nabla\otimes\vec{u}\big) + \big(\nabla\otimes\vec{u}\big)^T\Big) = \\
= \mathrm{div}\ \big(\Pi\cdot\vec{u}\big) - \frac{1}{2}\ \Pi : \Big((\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T - \frac{2}{3}I\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big) = \\
= \mathrm{div}\ \big(\Pi\cdot\vec{u}\big) - \frac{(\Pi : \Pi)}{2\eta_0}.
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Сложив (3.3) и (3.4), преобразуем результат к виду (3.1). □

Теорема 2. *Классическое решение поставленной начально-краевой задачи является единственным.*

Доказательство. Для всех $t \in [0,\ T_f]$ определим функцию

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\int\limits_V \Big(\frac{1}{\rho_0 c_{s0}^2}p^2 + \rho_0\vec{u}^2\Big)\ dV. \tag{3.5}$$

Проинтегрируем (3.1) по множеству V. Затем воспользуемся правилом Лейбница и формулой Гаусса–Остроградского. Принимая во внимание краевые условия (2.4), будем иметь

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\int\limits_V \Psi\ dV. \tag{3.6}$$

Неотрицательная величина Ψ определена формулой (3.2). Функция (3.5) принадлежит классу гладкости $C^1([0,\ T_f])$. Из (3.6) вытекает, что она является убывающей. Поэтому

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(0), \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{3.7}$$

Для нулевых начальных условий

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = 0, \quad p\Big|_{t=0} = 0, \quad \vec{x} \in \overline{V},$$

неравенство (3.7) принимает вид

$$\varphi(t) \leqslant 0, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{3.8}$$

Интегрируя (3.8) по промежутку $[0,\ T_f]$ и принимая во внимание (3.5), получим

$$\int\limits_{Q} \Big(\frac{1}{\rho_0 c_{s0}^2} p^2 + \rho_0 \vec{u}^2 \Big)\ dV dt \leqslant 0.$$

Если учесть непрерывность и неотрицательность подынтегрального выражения в $\overline{Q}$, то приходим к заключению о том, что

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = 0, \quad p(\vec{x}, t) = 0$$

для всех $(\vec{x}, t) \in \overline{Q}$. В силу линейности задачи это означает, что она имеет единственное решение. $\square$

4. Обобщенное неравенство Корна. Неравенства Фридрихса и Пуанкаре

Для дальнейшего изучения свойств решений поставленной начально-краевой задачи потребуются следующие результаты.

Теорема 3 (обобщенное неравенство Корна)**.** *Для любой вектор-функции $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ класса $\boldsymbol{C}^2(V) \cap \boldsymbol{C}^1(\overline{V})$, обращающейся в нуль на ∂V, выполняется оценка*

$$\eta_0 \int\limits_{V} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big)^2\ dV \leqslant \frac{1}{2\eta_0} \int\limits_{V} \big(\Pi : \Pi \big)\ dV. \tag{4.1}$$

Теорема 4 (неравенство Фридрихса)**.** *Для любой вектор-функции $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ класса $\boldsymbol{C}^1(\overline{V})$, обращающейся в нуль на ∂V, выполняется оценка*

$$\int\limits_{V} \vec{u}^2\ dV \leqslant c_F \int\limits_{V} \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big)^2\ dV, \tag{4.2}$$

где c_F – положительная постоянная, зависящая только от геометрических характеристик V.

Теорема 5 (неравенство Пуанкаре)**.** *Для любой функции $p = p(\vec{x})$ класса $C^1(\overline{V})$, удовлетворяющей условию*

$$\int\limits_{V} p\ dV = 0,$$

выполняется оценка

$$\int\limits_{V} p^2\ dV \leqslant c_P \int\limits_{V} (\nabla p)^2\ dV, \tag{4.3}$$

где c_P – положительная константа, зависящая только от геометрических характеристик V.

Доказательство (4.1) можно найти, например, в [9]. Информация о неравенствах (4.2) и (4.3) имеется в [10].

5. Асимптотическая устойчивость равновесного решения

Покажем, что равновесное решение

$$\vec{u} = 0, \quad p = 0$$

системы (2.1) – (2.2) является асимптотически устойчивым.

Теорема 6. *Существует положительная константа α, не зависящая от выбора T_f, такая, что для всех $t \in [0, T_f]$ выполняется неравенство*

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(0) e^{-\alpha t}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Запишем неравенство (3.6) следующим образом:

$$-\frac{d\varphi(t)}{dt} = \int\limits_V \Big(\frac{\tau_0}{\rho_0} (\nabla p)^2 + \frac{(\Pi : \Pi)}{2\eta_0} \Big) \, dV. \tag{5.2}$$

Проинтегрируем (2.1) по множеству V. Используя формулу Гаусса–Остроградского и краевые условия (2.4), преобразуем полученные равенства к виду

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V p \, dV = 0. \tag{5.3}$$

Из (5.3) и (2.5) следует, что

$$\int\limits_V p \, dV = \int\limits_V p_* \, dV = 0, \quad t \in [0, T_f]. \tag{5.4}$$

Оценим снизу правую часть (5.2) с помощью неравенств (4.1) – (4.3). Принимая во внимание (5.4), будем иметь

$$\begin{gathered} -\frac{d\varphi(t)}{dt} = \int\limits_V \Big(\frac{\tau_0}{\rho_0} (\nabla p)^2 + \frac{(\Pi : \Pi)}{2\eta_0} \Big) \, dV \geqslant \\ \geqslant \frac{\tau_0}{\rho_0 c_P} \int\limits_V p^2 \, dV + \eta_0 \int\limits_V \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big)^2 \, dV \geqslant \\ \geqslant \frac{\tau_0}{\rho_0 c_P} \int\limits_V p^2 \, dV + \frac{\eta_0}{c_F} \int\limits_V \vec{u}^2 \, dV = \\ = \frac{2\tau_0 c_{s0}^2}{c_P} \int\limits_V \frac{1}{\rho_0 c_{s0}^2} \frac{p^2}{2} \, dV + \frac{2\eta_0}{\rho_0 c_F} \int\limits_V \rho_0 \frac{\vec{u}^2}{2} \, dV. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Здесь $c_F = c_F(V)$ и $c_P = c_P(V)$ – положительные константы Фридрихса и Пуанкаре соответственно, зависящие только от геометрических характеристик V. Определим положительную постоянную α по формуле

$$\alpha = \min\Big\{\frac{2\tau_0 c_{s0}^2}{c_P}, \frac{2\eta_0}{\rho_0 c_F}\Big\}.$$

Принимая во внимание определение (3.5), из (5.5) выводим неравенство

$$-\frac{d\varphi(t)}{dt} \geqslant \alpha\varphi(t). \tag{5.6}$$

Эквивалентная запись (5.6) такова

$$e^{-\alpha t}\frac{d}{dt}\Big(e^{\alpha t}\varphi(t)\Big) \leqslant 0, \quad t \in [0, T_f].$$

Экспонента $e^{-\alpha t}$ принимает только положительные значения. Поэтому функция $\psi(t) = e^{\alpha t}\varphi(t)$ является убывающей на $[0, T_f]$. В частности,

$$\psi(t) \leqslant \psi(0) \tag{5.7}$$

при всех $t \in [0, T_f]$. Неравенство (5.7) равносильно (5.1). □

Следствие 1. *Если $T_f = +\infty$, то $\varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.*

Факт асимптотической устойчивости равновесного решения установлен.

6. Симметричная запись линеаризованных уравнений в инвариантах Римана для одномерных нестационарных течений

Выпишем систему (2.1) – (2.2) для случая одномерных нестационарных течений:

$$\frac{1}{\rho_0 c_{s0}^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{6.1}$$

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{4}{3}\eta_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6.2}$$

Покажем, что уравнения (6.1) – (6.2) можно представить в симметричной форме. Сначала преобразуем их к виду

$$\frac{1}{\rho_0 c_{s0}}\frac{\partial p}{\partial t} + c_{s0}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\tau_0 c_{s0}}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_{s0}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{p}{\rho_0 c_{s0}}\Big) = \frac{4}{3}\frac{\eta_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6.4}$$

Введем в рассмотрение инварианты Римана

$$r_1 = u + \frac{p}{\rho_0 c_{s0}}, \quad r_2 = u - \frac{p}{\rho_0 c_{s0}}. \tag{6.5}$$

Они используются при построении точных решений задачи Коши для классических уравнений акустики (см. [11], с. 64). Из (6.5) находим

$$u = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad p = \frac{r_1 - r_2}{2}\rho_0 c_{s0}. \tag{6.6}$$

К уравнению (6.4) сначала прибавим, а затем вычтем (6.3). Учитывая соотношение $\eta_0 = p_0\tau_0 Sc$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(u + \frac{p}{\rho_0 c_{s0}}\Big) + c_{s0}\frac{\partial}{\partial x}\Big(u + \frac{p}{\rho_0 c_{s0}}\Big) = \frac{4}{3}\frac{p_0\tau_0 Sc}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau_0 c_{s0}}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(u - \frac{p}{\rho_0 c_{s0}}\Big) - c_{s0}\frac{\partial}{\partial x}\Big(u - \frac{p}{\rho_0 c_{s0}}\Big) = \frac{4}{3}\frac{p_0\tau_0 Sc}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau_0 c_{s0}}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{6.8}$$

Принимая во внимание (6.5) и (6.6), запишем (6.7) – (6.8) в виде

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} + c_{s0}\frac{\partial r_1}{\partial x} = a\frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2}, \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial t} - c_{s0}\frac{\partial r_2}{\partial x} = -b\frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 r_2}{\partial x^2}, \tag{6.10}$$

где

$$a = \frac{\tau_0}{2\rho_0}\Big(\rho_0 c_{s0}^2 + \frac{4}{3}p_0 Sc\Big),$$

$$b = \frac{\tau_0}{2\rho_0}\Big(\rho_0 c_{s0}^2 - \frac{4}{3}p_0 Sc\Big).$$

Заметим, что

$$a > 0, \quad b = \frac{\tau_0 p_0}{2\rho_0}\Big(\gamma - \frac{4}{3}Sc\Big) = \frac{\tau_0 p_0}{2\rho_0}\Big(\gamma - 1\Big) > 0.$$

Введем в рассмотрение вектор

$$R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix},$$

а также матрицы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} c_{s0} & 0 \\ 0 & -c_{s0} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Матрица Λ является диагональной, а матрица A симметрична и положительно определена, поскольку ее главные угловые миноры

$$\Delta_1 = a > 0, \quad \Delta_2 = a^2 - b^2 = \frac{4\gamma Sc}{3}\frac{p_0^2\tau_0^2}{\rho_0^2} > 0.$$

Симметричная матричная запись системы (6.1) – (6.2) такова:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial R}{\partial x} = A\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}. \tag{6.11}$$

Дополним (6.11) начальным условием

$$R\Big|_{t=0} = R_*(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.12}$$

где $R_*(x)$ – заданная вектор-функция.

Заключение

Аналитическое решение задачи Коши (6.11) – (6.12), по всей видимости, может быть построено. Актуальными являются теоремы о существовании, единственности и свойствах решений нелинейной системы (1.1) – (1.2). Некоторые результаты в этом направлении получены А.А. Злотником [3], [4] и автором [5].

Список литературы

[1] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функционального анализа в теории приближений. 1997. С. 127–155.

[2] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[3] Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее // Математические заметки. 2008. Т. 83, № 5. С. 667–682.

[4] Злотник А.А. Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо– и квазигидродинамических систем уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 2. С. 325–337.

[5] Шеретов Ю.В. О свойствах решений квазигидродинамических уравнений в баротропном приближении // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2009. № 14. С. 5–19.

[6] Шеретов Ю.В. Единственность классического решения основной начально-краевой задачи для квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 20. С. 7–20.

[7] Шеретов Ю.В. Методы построения точных решений квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 21. С. 5–26.

[8] Шеретов Ю.В. Единственность решения квазигидродинамических уравнений в приближении мелкой воды // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 22. С. 7–28.

[9] Шеретов Ю.В. О единственности классического решения линеаризованных квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 33–45.

[10] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.

[11] Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.

Библиографическая ссылка

Шеретов Ю.В. Единственность классического решения линеаризованных квазигидродинамических уравнений в баротропном приближении // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 137–148.

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Yurii.Sheretov@tversu.ru.

UNIQUENESS OF CLASSICAL SOLUTION FOR LINEARIZED QUASI–HYDRODYNAMIC EQUATIONS IN BAROTROPIC APPROXIMATION

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: Yurii.Sheretov@tversu.ru.

Received 04.02.2015, revised 20.02.2015.

For linearized quasi–hydrodynamic equations in barotropic approximation the theorem on the uniqueness of classical solution of posed initial boundary value problem is proved. Asymptotic stability of equilibrium solution is established. The symmetric form of linearized system in Riemann invariants for one-dimensional non-stationary flows is written out.

Keywords: linearized quasi–hydrodynamic equations, barotropic approximation, uniqueness of classical solution, asymptotic stability of equilibrium solution, Riemann invariants.

Bibliographic citation

Sheretov Yu.V. Uniqueness of classical solution for linearized quasi–hydrodynamic equations in barotropic approximation. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 1, pp. 137–148. (in Russian)