

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 514.82

ПОСЛЕДНИЕ ОЦЕНКИ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И ПРЕДСКАЗАНИЯ МОДЕЛИ С МОДИФИЦИРОВАННЫМ ГАЗОМ ЧАПЛЫГИНА¹

Воронцова Е.Г. *, Шаров Г.С.**

* Кафедра математических методов современного естествознания

** Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 20.05.2015, после переработки 25.05.2015.

Для описания последних астрономических наблюдений, свидетельствующих об ускоренном расширении Вселенной, рассмотрены космологические модели с различным уравнением состояния. При этом основное внимание уделено модели с модифицированным газом Чаплыгина. С точки зрения соответствия наблюдательным данным по сверхновым типа Ia, барионным акустическим осцилляциям, оценкам параметра Хаббла $H(z)$ рассчитаны оптимальные значения параметров модели и допустимые области их изменения. Для сравнительного анализа рассмотрены наиболее популярная модель Λ CDM и модель с обобщенным газом Чаплыгина.

Ключевые слова: ускоренное расширение, модифицированный газ Чаплыгина, параметр Хаббла, уравнение состояния.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 7–23.

1. Введение

Ускоренное расширение Вселенной было открыто в 1998 году при наблюдениях за сверхновыми типа Ia [1, 2]. Позднее этот вывод был подтвержден другими источниками: исследованиями барионных акустических осцилляций в крупномасштабной кластеризации галактик [3, 4], измерениями реликтового излучения [5–7], а также расчетами значений параметра Хаббла $H(z) = \dot{a}/a$ в зависимости от красного смещения z , сделанными в работах [8] – [22].

Сверхновые типа Ia используют как «стандартные свечи» для измерения расстояний до удаленных галактик [1, 2, 23], так как для них можно измерить красное смещение z и определить фотометрическое расстояние D_L до них. Зависимость $D_L(z)$ свидетельствует об ускоренном росте масштабного фактора $a(t)$ на поздней стадии эволюции [3].

¹Работа выполнена в рамках государственного задания по проекту № 1686.

Эффект барионных акустических осцилляций (БАО) наблюдается в виде пика в корреляционной функции, который соответствует масштабу акустического горизонта $r_s(z_d)$ [4,6]. Метод, основанный на анализе эффекта БАО, позволил получить многочисленные данные наблюдений [13]–[31], в частности, был использован для расчета значений параметра Хаббла $H(z)$ [13]–[22]. Все эти данные: результаты наблюдений сверхновых типа Ia [32], БАО, данные измерений $H(z)$ подтверждают вывод об ускоренном расширении Вселенной [3, 5, 6], а также накладывают ограничения на возможные космологические теории и модели.

Ускоренное расширение Вселенной пытаются объяснить с помощью космологических теорий с различными модификациями эйнштейновской гравитации. Среди этих моделей наиболее популярна модель Λ CDM с холодной темной материей и Λ -членом (темной энергией). Эта модель хорошо описывает наблюдательные данные по сверхновым типа Ia, барионным акустическим осцилляциям, оценкам $H(z)$, анизотропии реликтового излучения и другие данные [3, 5, 6, 23].

Однако, в модели Λ CDM имеются проблемы, связанные с неясной природой темной материи и темной энергии, с чрезвычайной малостью наблюдаемого значения константы Λ , с малой вероятностью совпадения по порядку величины сегодняшних значений Ω_Λ (современной доли темной энергии) и Ω_m (современной доли материи) при различном характере их зависимости от времени [33].

Это послужило поводом для возникновения альтернативных космологических моделей [33, 34], в частности, теорий с различными уравнениями состояния, среди которых мы выделим и рассмотрим в настоящей работе модель с модифицированным газом Чаплыгина (MCG) [35]–[40] с уравнением состояния

$$p_g = w\rho_g - B\rho_g^{-\alpha}. \quad (1)$$

Эта модель непосредственно обобщает рассмотренную в нашей предыдущей работе [23] модель с обобщенным газом Чаплыгина (GCG)

$$p_g = -B/\rho_g^\alpha. \quad (2)$$

Отметим, что уравнение состояния вида (2) используется и в многомерной гравитационной модели [41].

В настоящей работе мы анализируем описание с помощью модели MCG самых последних наблюдательных данных по сверхновым типа Ia, БАО и параметру Хаббла $H(z)$ в сравнении с моделями Λ CDM и GCG.

2. Наблюдательные данные

В работе используются наблюдательные данные по $N_S = 580$ сверхновым типа Ia [32]. Таблица данных по сверхновым содержит красное смещение $z = z_i$, модуль фотометрического расстояния $\mu_i = \mu(D_L) = 5 \lg(D_L/10 \text{пк})$ и ошибку σ_i в измерении μ_i .

Фотометрическое расстояние D_L определяется следующим образом [1, 33]:

$$D_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} S_k \left(H_0 \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})} \right), \quad (3)$$

где

$$S_k(x) = \begin{cases} \sinh(x\sqrt{\Omega_k})/\sqrt{\Omega_k}, & \Omega_k > 0, \\ x, & \Omega_k = 0, \\ \sin(x\sqrt{|\Omega_k|})/\sqrt{|\Omega_k|}, & \Omega_k < 0, \end{cases}$$

k — знак кривизны, $\Omega_k = -k/(a_0^2 H_0^2)$ — современная доля кривизны, $a_0 \equiv a(t_0)$ и $H_0 \equiv H(t_0)$ — современные значения a и H .

Красное смещение z и параметр Хаббла $H(z)$ связаны с масштабным фактором $a(t)$ следующими соотношениями:

$$a(t) = \frac{a_0}{1+z}, \quad H(z) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (4)$$

Для рассматриваемых космологических моделей мы задаем значения параметров модели p_1, p_2, \dots , находим зависимость $a(t)$, интеграл (3) и модельно-зависимые величины D_L^{th} для фотометрического расстояния (3) (для z) или μ^{th} для модуля фотометрического расстояния. Для сравнения теоретических значений с данными измерений z_i и μ_i из таблицы [32] используется функция

$$\chi_S^2(p_1, p_2, \dots) = \sum_{i=1}^{N_S} \frac{[\mu_i - \mu^{th}(z_i, p_1, p_2, \dots)]^2}{\sigma_i^2} \quad (5)$$

или функция $\mathcal{L}_S(p_1, p_2, \dots) = \exp(-\chi_S^2/2)$.

Для описания данных БАО вычисляется расстояние [4–7]

$$D_V(z) = \left[\frac{cz D_L^2(z)}{(1+z)^2 H(z)} \right]^{1/3}, \quad (6)$$

а также величины, которые можно рассматривать, как наблюдательные проявления барионных акустических осцилляций [4, 5]:

$$d_z(z) = \frac{r_s(z_d)}{D_V(z)}, \quad A(z) = \frac{H_0 \sqrt{\Omega_m}}{cz} D_V(z), \quad (7)$$

здесь $\Omega_m = \frac{8}{3}\pi G\rho(t_0)/H_0^2$ — современная доля материи с плотностью ρ , величина $r_s(z_d)$ в (7) — масштаб звукового горизонта. Для оценки значений параметра $r_s(z_d)$ разными авторами [14]–[31] были использованы как теоретические, так и статистические методы. В Таблице 1 представлены последние оценки масштаба звукового горизонта $r_s(z_d)$:

Таблица 1: Оценки $r_s(z_d)$ (Мпк)

$r_s(z_d)$	147.4	147.49	148.6	148.69	149.28	152.40	152.76	153.19	153.2	153.5
Ссылки	[22]	[6, 21]	[30]	[31]	[7, 19]	[27]	[15]	[18]	[25, 26, 29]	[24]

В большинстве из процитированных в Таблице 1 работ, величина $r_s(z_d)$ используется для вычисления $D_V(z)$, $H(z)$ и некоторых других параметров. Таким образом, значения этих величин сильно зависят от $r_s(z_d)$.

В данной работе используется значение $r_s(z_d)$, равное среднему арифметическому представленных в Таблице 1 значений, а также соответствующая стандартная ошибка

$$r_s(z_d) = 150.69 \pm 2.45 \text{ Мпк.} \quad (8)$$

Известные на текущий момент данные БАО [13] – [31] относительно значений параметров (7) представлены в Таблице 2. В работе используются $N_B = 17$ значений параметра $d_z(z)$ (добавлено 10 значений по сравнению с данными в работах [23, 41]) и 7 значений для $A(z)$.

Таблица 2: Значения параметров (7) $d_z(z) = r_s(z_d)/D_V(z)$ и $A(z)$

z	$d_z(z)$	σ_d	$A(z)$	σ_A	Refs	Survey
0.106	0.336	0.015	0.526	0.028	[5, 26]	6dFGS
0.15	0.2232	0.0084	-	-	[31]	SDSS DR7
0.20	0.1905	0.0061	0.488	0.016	[24, 27]	SDSS DR7
0.275	0.1390	0.0037	-	-	[24]	SDSS DR7
0.278	0.1394	0.0049	-	-	[25]	SDSS DR7
0.314	0.1239	0.0033	-	-	[27]	SDSS LRG
0.32	0.1181	0.0026	-	-	[19]	BOSS DR11
0.35	0.1097	0.0036	0.484	0.016	[24, 27]	SDSS DR7
0.35	0.1126	0.0022	-	-	[28]	SDSS DR7
0.35	0.1161	0.0146	-	-	[16]	SDSS DR7
0.44	0.0916	0.0071	0.474	0.034	[27]	WiggleZ
0.57	0.0739	0.0043	0.436	0.017	[17]	SDSS DR9
0.57	0.0726	0.0014	-	-	[19]	SDSS DR11
0.60	0.0726	0.0034	0.442	0.020	[27]	WiggleZ
0.73	0.0592	0.0032	0.424	0.021	[27]	WiggleZ
2.34	0.0320	0.0021	-	-	[22]	BOSS DR11
2.36	0.0329	0.0017	-	-	[21]	BOSS DR11

Оценки величин $d_z(z)$ и $A(z)$ в Таблице 2 являются зависимыми [24, 27]. Для сравнения теоретических расчетных значений с результатами наблюдений $d_z(z_i)$ из Таблицы 2 находим для (7) функцию χ^2 :

$$\chi_B^2(p_1, p_2, \dots) = (\Delta d)^T C_d^{-1} \Delta d + (\Delta A)^T C_A^{-1} \Delta A, \quad \Delta d = d_z(z_i) - d_z^{th}. \quad (9)$$

Соответствующие элементы ковариационных матриц $C_d^{-1} = \|c_{ij}^d\|$ и $C_A^{-1} = \|c_{ij}^A\|$ в (9) имеют вид [5, 24, 27]:

$$\begin{aligned} c_{33}^d &= 30124, & c_{38}^d &= -17227, & c_{88}^d &= 86977, \\ c_{1111}^d &= 24532.1, & c_{1114}^d &= -25137.7, & c_{1115}^d &= 12099.1, & c_{1414}^d &= 134598.4, \\ c_{1415}^d &= -64783.9, & c_{1515}^d &= 128837.6; & c_{1111}^A &= 1040.3, & c_{1114}^A &= -807.5, \\ c_{1115}^A &= 336.8, & c_{1414}^A &= 3720.3, & c_{1415}^A &= -1551.9, & c_{1515}^A &= 2914.9. \end{aligned}$$

Здесь $c_{ij} = c_{ji}$ (матрицы симметричны), неуказанные диагональные элементы $c_{ii} = 1/\sigma_i^2$, $c_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Для σ_d в Таблице 2 учитывается корреляция между оценками величин $d_z(z)$ и $H(z)$ (Таблица 3) при $z = 0.35, 0.57, 2.34, 2.36$ в работах [16–18, 21, 22].

Наблюдательные данные для параметра Хаббла $H(z)$ в зависимости от красного смещения z представлены в Таблице 3, таблица содержит 37 значений параметра $H(z)$ [8]–[22].

Расчеты значений параметра $H(z)$ были сделаны двумя методами:

1. методом оценки разности возраста галактик с близким значением красного смещения z [8]–[12] с использованием равенства

$$H(z) = \frac{1}{a(t)} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt},$$

2. с помощью измерения эффекта БАО в виде пика в корреляционной функции [13]–[22], который соответствует масштабу звукового горизонта $r_s(z_d)$.

Таблица 3: Значения параметра Хаббла $H(z)$ с ошибками σ_H [8]–[22]

z	$H(z)$	σ_H	Refs	z	$H(z)$	σ_H	Refs
0.070	69	19.6	[11]	0.570	96.8	3.4	[19]
0.090	69	12	[8]	0.593	104	13	[10]
0.120	68.6	26.2	[11]	0.600	87.9	6.1	[14]
0.170	83	8	[8]	0.680	92	8	[10]
0.179	75	4	[10]	0.730	97.3	7.0	[14]
0.199	75	5	[10]	0.781	105	12	[10]
0.200	72.9	29.6	[11]	0.875	125	17	[10]
0.240	79.69	2.99	[13]	0.880	90	40	[9]
0.270	77	14	[8]	0.900	117	23	[8]
0.280	88.8	36.6	[11]	1.037	154	20	[10]
0.300	81.7	6.22	[20]	1.300	168	17	[8]
0.340	83.8	3.66	[13]	1.363	160	33.6	[12]
0.350	82.7	9.1	[16]	1.430	177	18	[8]
0.352	83	14	[10]	1.530	140	14	[8]
0.400	95	17	[8]	1.750	202	40	[8]
0.430	86.45	3.97	[13]	1.965	186.5	50.4	[12]
0.440	82.6	7.8	[14]	2.300	224	8.6	[15]
0.480	97	62	[9]	2.340	222	8.5	[22]
0.570	87.6	7.8	[17]	2.360	226	9.3	[21]

В последнем методе оценка значений $H(z)$ существенно зависит от доверительной (фидуциальной) величины r_s^{fid} и содержит множитель $r_s^{fid}/r_s(z_d)$. Например, в работе [22]

$$H(z = 2.34) = (222 \pm 7) \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} \cdot \frac{147.4 \text{ Мпк}}{r_s(z_d)}.$$

В Таблице 3 этот множитель учитывается только при вычислении ошибки σ_H в работах [13, 15–17, 21, 22], где доверительные величины r_s^{fid} существенно отличаются от значения (8). Оценки величины $H(z)$ в Таблице 3 те же самые, что и в соответствующих работах.

При сравнении данных для параметра Хаббла по $N_H = 38$ из Таблице 3 с предсказаниями моделей используется функция χ_H^2 , подобная функциям (5), (9):

$$\chi_H^2(p_1, p_2, \dots) = \sum_{i=1}^{N_H} \frac{[H_i - H^{th}(z_i, p_1, p_2, \dots)]^2}{\sigma_{H,i}^2}. \quad (10)$$

3. Модель Λ CDM

Для модели Λ CDM и моделей с обобщенным или модифицированным газом Чаплыгина [23, 35, 36] динамика Вселенной описывается уравнениями Эйнштейна

$$G_\nu^\mu = 8\pi G T_\nu^\mu + \Lambda \delta_\nu^\mu, \quad (11)$$

где

$$G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - \frac{1}{2} R \delta_\nu^\mu, \quad T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (12)$$

В модели Λ CDM и барионную, и темную материю можно рассматривать как пылевидную и положить $p = 0$ в выражении (12). При этом плотность

$$\rho = \rho_c = \rho_b + \rho_{dm}.$$

Для метрики Робертсона–Уокера со знаком кривизны k

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[(1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega \right] \quad (13)$$

уравнения Эйнштейна (11) сводятся к системе из двух независимых уравнений

$$3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi G \rho + \Lambda, \quad (14)$$

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p). \quad (15)$$

Уравнение (15) является следствием условия непрерывности $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$, точка — производная по t . Скорость света c здесь и далее полагаем равной 1.

Для модели Λ CDM с пылевидной материей ($p = 0$), используя общее решение $\rho/\rho_0 = (a/a_0)^{-3}$ уравнения (15), запишем уравнение (14) в виде:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2 H_0^2} = \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_k \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2}. \quad (16)$$

Здесь

$$\Omega_m = \frac{8\pi G \rho(t_0)}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2} \quad (17)$$

— современные доли материи, темной энергии (Λ -члена) и кривизны, которые связаны уравнением

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (18)$$

Уравнение (18) следует из (16) при $t = t_0$.

Введя безразмерные величины: время τ и логарифм масштабного фактора [41]

$$\tau = H_0 t, \quad \mathcal{A} = \log \frac{a}{a_0}, \quad (19)$$

запишем уравнение (16) в виде

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\tau} = \sqrt{\Omega_m e^{-3\mathcal{A}} + \Omega_\Lambda + \Omega_k e^{-2\mathcal{A}}}. \quad (20)$$

Это уравнение мы интегрируем численно по направлению «в прошлое» с соответствующим современной эпохе начальным условием

$$\mathcal{A}|_{\tau=1} = 0, \quad (21)$$

эквивалентным $a(t_0) = a_0$. Здесь и далее современной эпохе ($t = t_0$) соответствует значение $\tau = 1$.

Наблюдательные данные раздела 2 относятся к эпохе $z \leq 2.36$. Для их описания с помощью модели Λ CDM используются три свободных параметра модели: H_0 , Ω_m и Ω_Λ , при этом вместо Ω_m или Ω_Λ можно использовать Ω_k .

Фиксируя параметры H_0 , Ω_m и Ω_Λ , можно найти численное решение задачи Коши (20), (21) и вычислить значения величин $a(t)/a_0$, $H(z)$, $D_L(z)$ (3), $d_z(z)$ и $A(z)$ (7). Сравнивая полученные значения с наблюдательными данными из [32] и Таблицами 2, 3, используем функции (5), (9) и (10), а также суммарную функцию

$$\chi_\Sigma^2 = \chi_S^2 + \chi_H^2 + \chi_B^2. \quad (22)$$

Результаты данных расчетов показаны на Рис. 1. Так, в левом верхнем углу показана зависимость функции $\min \chi_\Sigma^2 = \min_{\Omega_m, \Omega_\Lambda} \chi_\Sigma^2(H_0)$ от постоянной Хаббла H_0 . Минимум вычисляется для каждого фиксированного значения H_0 . На панели ниже представлена зависимость от H_0 координат Ω_m , Ω_Λ точки минимума χ_Σ^2 (оптимальных для данного H_0 значений), а также параметра $\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$.

Мы можем подтвердить сделанный в работах [23, 41] вывод о значительной зависимости функции $\min \chi_\Sigma^2$ от параметра H_0 . Функция $\min \chi_\Sigma^2(H_0)$ имеет выраженный минимум в точке $H_0 \simeq 70.13$ км с⁻¹Мпк⁻¹, при этом оптимальные значения параметров:

$$\Lambda\text{CDM} : \quad \begin{aligned} \min \chi_\Sigma^2 &= 595.85, & \Omega_m &= 0.278, & \Omega_\Lambda &= 0.757, & \Omega_k &= -0.036, \\ H_0 &= 70.127 \pm 0.317 (1\sigma) \pm 0.639 (2\sigma) & \text{км (с Мпк)}^{-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Значение $\Omega_k = -0.036$ получено из уравнения (18). Для оценки ошибок 1σ и 2σ величины H_0 используется функция правдоподобия $\mathcal{L}_\Sigma(H_0) \sim \exp(-\chi_\Sigma^2/2)$, соответствующая функции $\min_{\Omega_m, \Omega_\Lambda} \chi_\Sigma^2(H_0)$.

Ошибки для остальных модельных параметров вычисляются аналогично и представлены далее в Таблице 4.

Оптимальное значение H_0 (23) находится в согласии с оценками проекта Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [5] $H_0 = 69.7 \pm 2.4$, но на уровне 2σ противоречит оценкам других спутниковых проектов: Planck Collaboration [7] $H_0 = 67.8 \pm 0.9$ и Hubble Space Telescope [42] $H_0 = 73.8 \pm 2.4$ км с⁻¹Мпк⁻¹. Выбор последнего значения, а также $H_0 = 68$ км с⁻¹Мпк⁻¹ в работе [43] оказался неудачным для описания авторами данных по сверхновым, БАО и $H(z)$.

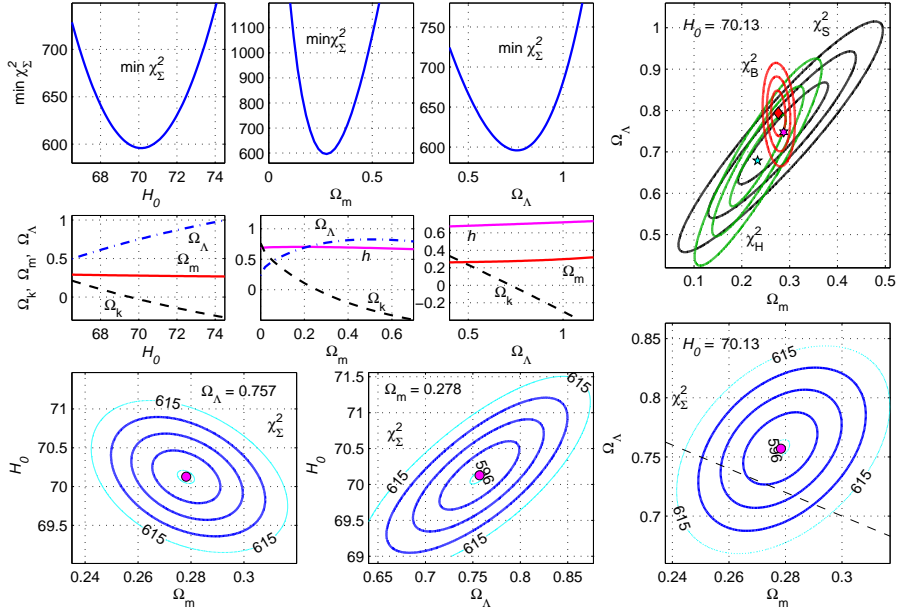


Рис. 1: Для модели Λ CDM на трех верхних панелях показана зависимость $\min \chi_{\Sigma}^2$ от одного параметра: H_0 , Ω_m и от Ω_{Λ} . В следующем ряду представлена зависимость координат точки минимума χ_{Σ}^2 от тех же параметров. Справа на плоскости $\Omega_m, \Omega_{\Lambda}$ показаны линии уровня 1σ , 2σ и 3σ функций $\chi_{\Sigma}^2(\Omega_m, \Omega_{\Lambda})$, χ_H^2 , χ_B^2 и для суммы (22) χ_{Σ}^2 . На нижних панелях — линии уровня $\chi_{\Sigma}^2(\Omega_m, H_0)$, $\chi_{\Sigma}^2(\Omega_{\Lambda}, H_0)$, оптимальные значения третьего параметра фиксированы и показаны.

На следующих панелях Рис. 1 представлена зависимость $\min \chi_{\Sigma}^2$ и координат точки минимума от параметров Ω_m и Ω_{Λ} . При этом минимумы вычисляются по двум остальным параметрам: $\min \chi_{\Sigma}^2(\Omega_m) = \min_{H_0, \Omega_{\Lambda}} \chi_{\Sigma}^2$, $\min \chi_{\Sigma}^2(\Omega_{\Lambda}) = \min_{\Omega_m, H_0} \chi_{\Sigma}^2$. Эти зависимости также демонстрируют отчетливый минимум, особенно резкий в случае $\min \chi_{\Sigma}^2(\Omega_m)$. Это связано с вкладом в χ_B^2 от величины $A(z)$ (7): $A(z)$ содержит множитель $\sqrt{\Omega_m}$, следовательно, χ_B^2 очень чувствительно к значениям Ω_m .

На панелях среднего ряда графики $h(\Omega_m)$ и $h(\Omega_{\Lambda})$ показывают величину $h = H_0/100$, где H_0 — оптимальное значение, соответствующее минимуму χ_{Σ}^2 .

На остальных панелях результаты расчетов представлены как линии уровня, соответствующие 1σ (68.27%), 2σ (95.45%) и 3σ (99.73%), для функций $\chi^2(p_1, p_2)$ на плоскости двух параметров при условии, что третий параметр фиксирован с его оптимальным значением. В частности, на правых панелях показаны все функции $\chi^2(\Omega_m, \Omega_{\Lambda})$ при фиксированном оптимальном значении H_0 . В правом нижнем окне наряду со сплошными линиями уровня функции $\chi_{\Sigma}^2(\Omega_m, \Omega_{\Lambda})$ приведена тонкая пунктирная линия $\Omega_m + \Omega_{\Lambda} = 1$ или $\Omega_k = 0$, отвечающая плоской модели. Она показывает, что оптимальные параметры модели Λ CDM (23) близки к параметрам плоской модели с $\Omega_k = 0$ на уровне 1σ .

4. Модель с модифицированным газом Чаплыгина

В работе [41] для описания наблюдательных данных по сверхновым типа Ia [32], значениям параметра Хаббла $H(z)$, а также барионным акустическим осцилляциям применялась модель обобщенного газа Чаплыгина (GCG). В данной работе используется расширенный набор данных, представленных в Таблицах 2, 3, и рассматривается модель с модифицированным газом Чаплыгина (MCG) с уравнением состояния (1) [35]–[40]

$$p_g = w\rho_g - B\rho_g^{-\alpha}. \quad (24)$$

В случае $w = 0$ уравнение состояния (24) переходит в уравнение состояния для обобщенного газа Чаплыгина (2) [41] $p_g = -B\rho_g^{-\alpha}$.

В моделях GCG и MCG газ Чаплыгина с плотностью ρ_g играет роль и темной материи, и темной энергии и вносит вклад в общую плотность следующим образом:

$$\rho = \rho_c + \rho_g + \rho_r. \quad (25)$$

Здесь $\rho_c = \rho_b + \rho_{dm}$ — плотность холодной материи, включающей видимую барионную и темную материю, $\rho_r = 0$ — плотность релятивистской материи (радиация и нейтрино), которая при значениях $z \leq 2.36$ близка к нулю. Ниже мы полагаем $\rho_r = 0$ и рассматриваем обе модели — MCG и GCG — как двухкомпонентные с компонентой пылевидной материи ρ_c и компонентой газа Чаплыгина ρ_g (24). В этом случае общая плотность (25) имеет вид

$$\rho = \rho_c + \rho_g, \quad p_c = 0. \quad (26)$$

Ниже для пылевидной материи мы используем обозначения ρ_b вместо ρ_c , а также

$$\Omega_b = \frac{\rho_b(t_0)}{\rho_{cr}} = \frac{8\pi G\rho_b(t_0)}{3H_0^2} \quad (27)$$

вместо Ω_c , помня о том, что эти величины могут включать в себя не только видимую барионную материю, но также и некоторую долю холодной темной материи с плотностью $\rho = \rho_{dm}$. Такая замена обозначений оправдана тем, что применение модели GCG [41] показало довольно слабую зависимость функции $\min \chi^2_{\Sigma}$ от доли пылевидной материи Ω_b (или Ω_c). Следовательно, можно полагать, что значение Ω_b определяется только барионной материей и фиксировать его на основе наблюдений [5–7].

Для модели MCG (24) уравнение (15) можно проинтегрировать и получить аналог выражения (16) [35]–[40]

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_b \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \Omega_k \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} + (1 - \Omega_b - \Omega_k) \left[B_s + (1 - B_s) \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)(1+\alpha)} \right]^{1/(1+\alpha)}. \quad (28)$$

Здесь вместо B используется безразмерный параметр $B_s = B\rho_0^{-1-\alpha}/(1+w)$. Таким образом в модели MCG (1) имеется 6 свободных параметров: H_0 , Ω_b , Ω_k , w , α и B_s (в модели GCG свободных параметров 5 — отсутствует w).

Так как в модели MCG $\Omega_\Lambda = 0$, то из уравнения (18) получаем $\Omega_m = 1 - \Omega_k$. Выражение для параметра $A(z)$ (7) содержит множитель $\sqrt{\Omega_m}$, поэтому для любой

модели необходимо использовать эффективное значение Ω_m^{eff} этого параметра. В ряде работ [38–40] в качестве эффективного значения использовалось выражение $\Omega_m^{eff} = \Omega_b + (1 - \Omega_b - \Omega_k)(1 - B_s)^{1/(1+\alpha)}$, следующее из сравнения моделей GCG и Λ CDM в пределе ранней Вселенной $z \gg 1$. Но, поскольку для большей части описанных в разделе 2 наблюдательных данных красное смещение лежит на отрезке $0 < z < 1$, мы в работе [41] предложили использовать другое выражение для Ω_m^{eff} . Оно вычисляется в пределе $z \rightarrow 0$, соответствующем настоящему времени. В данной работе мы используем его аналог для модели MCG, получаемый при сравнении правых частей уравнений (16) и (28) в пределе $z \rightarrow 0$ или $\mathcal{A} \rightarrow 0$:

$$\Omega_m^{eff} = \Omega_b + (1 - \Omega_b - \Omega_k)(1 - B_s)(1 + w). \quad (29)$$

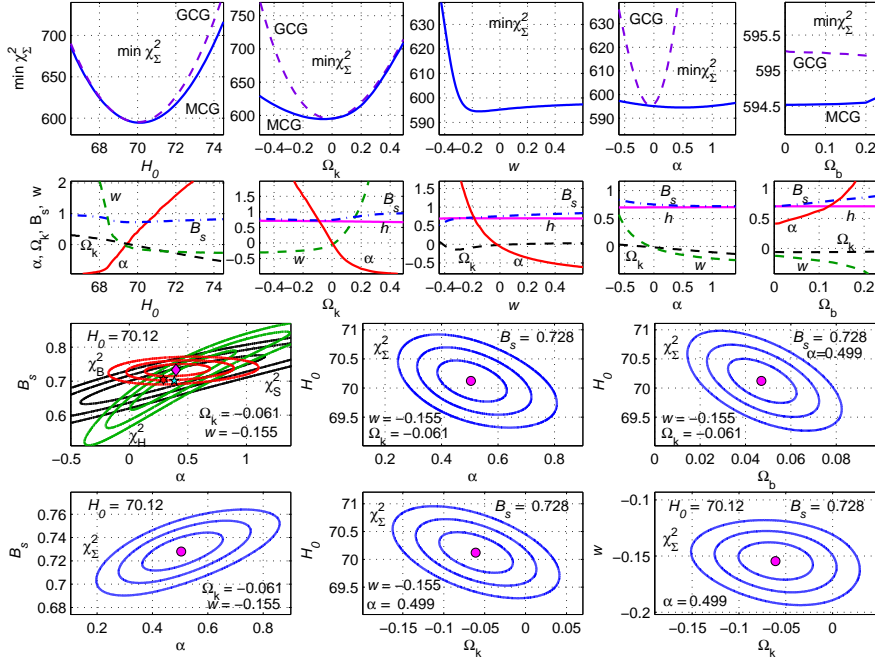


Рис. 2: Результаты расчетов для модели MCG: зависимость $\min \chi_{\Sigma}^2$ от одного параметра (сплошные линии для MCG и пунктирные для GCG), координаты точки минимума и линии уровня на плоскости двух параметров. Обозначения те же, что и на Рис. 1.

На Рис. 2 представлено, как модель MCG (24) описывает наблюдательные данные из [32] и Таблиц 2, 3 в сравнении с моделью GCG. В верхнем ряду показано, как минимумы суммарных функций $\min \chi_{\Sigma}^2$ (22) для моделей MCG (сплошные линии) и GCG (штриховые линии) зависят от выбранных параметров модели: H_0 , Ω_k , w , α , Ω_b . Данные графики определяют оптимальные значения и ошибки параметров моделей, которые представлены в Таблице 4. Второй ряд на Рис. 2 соответствует панелям верхнего ряда, на нем представлена зависимость координат точек минимума от H_0, \dots, Ω_b для модели MCG.

На правой панели верхнего ряда Рис. 2 величина $\min \chi_{\Sigma}^2$ для модели MCG означает минимум по остальным 5 параметрам для каждого фиксированного значения Ω_b : $\min \chi_{\Sigma}^2 = \min_{H_0, \Omega_k, w, \alpha, B_s} \chi_{\Sigma}^2$. Представленные здесь результаты расчетов согласуются с выводом, сделанным ранее в работе [41], и подтверждают, что минимум функции $\min \chi_{\Sigma}^2$ для моделей MCG и GCG почти не зависит от Ω_b в области $0 \leq \Omega_b \leq 0.2$. Это позволяет считать, что возможный вклад темной материи в Ω_b практически не влияет на эффективность моделей MCG и GCG. Поэтому мы не будем учитывать возможность такого вклада — не будем рассматривать Ω_b в качестве свободного параметра модели, а зафиксируем его значение

$$\Omega_b = 0.047 \quad (30)$$

как среднее по данным наблюдений из обзоров WMAP [5] ($\Omega_b = 0.0464$) и Planck [6, 7] ($\Omega_b = 0.0485$).

На Рис. 2 параметр Ω_b изменяется только на 3 правых панелях, на остальных 13 его значение фиксировано в виде (30). Это, в частности, означает, что величину $\min \chi_{\Sigma}^2(H_0)$ на верхней левой панели для модели MCG следует воспринимать как минимум по 4 параметрам $\min_{\Omega_k, w, \alpha, B_s} \chi_{\Sigma}^2$ с фиксированным $\Omega_b = 0.047$. Такая же картина имеет место на соседних панелях для зависимости $\min \chi_{\Sigma}^2$ от Ω_k , w , α , в частности, $\min \chi_{\Sigma}^2(\Omega_k) = \min_{H_0, w, \alpha, B_s} \chi_{\Sigma}^2$. Для модели GCG с $w = 0$ эти минимумы, показанные штриховыми линиями, берутся по 3 оставшимся параметрам.

Зависимость $\min \chi_{\Sigma}^2(H_0)$ для обеих моделей MCG и GCG имеет резкий минимум, напоминающий формой и положением соответствующий график для модели Λ CDM на Рис. 1. Оптимальные значения H_0 и допустимые отклонения в Таблице 4 для трех моделей достаточно близки. Естественно, график $\min \chi_{\Sigma}^2$ для модели GCG лежит выше, чем для MCG, эти кривые касаются в точке, в которой оптимальное значение w равно нулю (см. панель ниже).

Графики $\min \chi_{\Sigma}^2(\Omega_k)$ и $\min \chi_{\Sigma}^2(w)$ асимметричны, при $\Omega_k > 0$ величина $\min \chi_{\Sigma}^2$ для модели GCG близка к значению MCG, но при $\Omega_k < 0$ эти кривые расходятся. Зависимость $\min \chi_{\Sigma}^2$ от α существенно различна для этих двух моделей — для GCG данная функция имеет резкий минимум при $\alpha \simeq -0.056$ с $\sigma \simeq 0.074$, но для модели MCG зависимость достаточно плавная, минимум при $\alpha \simeq 0.5$ имеет $\sigma \simeq 0.46$ (все результаты в Таблице 4). Можно заметить, что в модели MCG изменения параметра w могут компенсировать изменения α .

На 6 нижних панелях Рис. 2 для модели MCG мы приводим 1σ , 2σ и 3σ линии уровня функций χ^2 на плоскостях двух модельных параметров в тех же обозначениях, что и на Рис. 1. Для других параметров модели фиксированы и указаны на панелях их оптимальные значения, эти значения приведены в Таблице 4.

Наши оценки для модели MCG, приведенные в Таблице 4, следует сравнить с результатами работ [38–40], в которых рассматривалась та же модель, но только в плоском случае с $\Omega_k = 0$. При таком ограничении авторы [38] описали наблюдательные данные с 557, 15 и 2 точками, соответственно, для сверхновых, $H(z)$ и БАО. Оценки на уровне 1σ в работе [38], в частности, $H_0 = 70.711_{-3.142}^{+4.188}$ и $B_s = 0.7788_{-0.0723}^{+0.0736}$ близки к нашим из Таблицы 4.

В работах [39, 40] для модели MCG при $\Omega_k = 0$ в ходе описания других данных получены отличающиеся от значений из Таблицы 4 оценки $w = 0.005$, $\alpha = 0.19$,

Таблица 4: Модели и 1σ оценки параметров моделей ($\Omega_b = 0.047$)

Модель	$\min \chi_\Sigma^2$	H_0	Ω_k	другие параметры
Λ CDM	595.85	70.127 ± 0.317	-0.035 ± 0.031	$\Omega_m = 0.278_{-0.008}^{+0.01}$, $\Omega_\Lambda = 0.757 \pm 0.029$
GCG	595.25	69.99 ± 0.36	-0.015 ± 0.041	$\alpha = -0.056 \pm 0.074$, $B_s = 0.757 \pm 0.011$
MCG	594.52	70.122 ± 0.394	-0.061 ± 0.069	$\alpha = 0.499_{-0.465}^{+0.442}$, $B_s = 0.728_{-0.025}^{+0.035}$ $w = -0.155_{-0.076}^{+0.202}$

$B_s = 0.825$. Возможно, расхождение связано с неоправданной предварительной фиксацией в работах [39, 40] значения важного модельного параметра H_0 .

Заключение

С помощью моделей Λ CDM с темной энергией и холодной темной материей, модели MCG с модифицированным газом Чаплыгина (24), а также модели GCG с обобщенным газом Чаплыгина (2) в данной работе проведено описание последних наблюдательных данных по сверхновым типа Ia [32], барионным акустическим осцилляциям (Таблица 2) и измерениям параметра Хаббла $H(z)$ (Таблица 3).

Выбор параметров моделей основан на минимизации функции (22) χ_Σ^2 — суммы вкладов (5), (9) и (10) от трех указанных выше групп наблюдательных данных. Результаты расчетов показали хорошее описание наблюдений с помощью данных моделей с оптимальными значениями параметров, представленными в Таблице 4. Как видим, наилучшее значение $\min \chi_\Sigma^2$ достигается для модели MCG, однако надо учесть, что число модельных параметров N_p в MCG существенно больше, чем в Λ CDM. Если фиксировать значение Ω_b в виде (30) и не использовать этот параметр как свободный, то эти числа равны: $N_{MCG} = 5$, $N_{GCG} = 4$, $N_{\Lambda\text{CDM}} = 3$. Известный информационный критерий Акаике эффективности модели [41]

$$AIC = \min \chi_\Sigma^2 + 2N_p$$

оставляет преимущество за моделью Λ CDM.

Список литературы

- [1] Riess A.G. et al. Observational evidence from Supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant // The Astronomical Journal. 1998. Vol. 116, № 3. Pp. 1009–1038. astro-ph/9805201.
- [2] Perlmutter S. et al. Measurements of omega and lambda from 42 high redshift supernovae // The Astrophysical Journal. 1999. Vol. 517. Pp. 565–586.
- [3] Weinberg D.H. et al. Observational probes of cosmic acceleration // Physics Reports. 2013. Vol. 530, № 2. Pp. 87–255. arXiv:1201.2434 [astro-ph.CO].

- [4] Eisenstein D.J. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies // *The Astrophysical Journal*. 2005. Vol. 633, № 2. Pp. 560–574. astro-ph/0501171.
- [5] Hinshaw G. et al. Nine-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: cosmological parameters results // *The Astrophysical Journal Supplement*. 2013. Vol. 208, № 2, id. 19. arXiv:1212.5226 [astro-ph.CO].
- [6] Ade P.A.R. et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters // *Astronomy and Astrophysics*. 2014. Vol. 571, id. A16. arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO].
- [7] Ade P.A.R. et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters // arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO].
- [8] Simon J., Verde L., Jimenez R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential // *Physical Review D*. 2005. Vol. 71, № 12, id. 123001.
- [9] Stern D. et al. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. I: $H(z)$ measurements // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2010. № 02, id. 008. arXiv:0907.3149 [astro-ph.CO].
- [10] Moresco M. et al. Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to $z \sim 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2012. № 08, id. 006. arXiv:1201.3609 [astro-ph.CO].
- [11] Zhang C. et al. Four new observational $H(z)$ data from luminous red galaxies Sloan Digital Sky Survey Data Release seven // *Research in Astronomy and Astrophysics*. 2014. Vol. 14, № 10, id. 1221-1233. arXiv:1207.4541 [astro-ph.CO].
- [12] Moresco M. Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at $z \sim 2$ // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. 2015. Vol. 450, № 1. Pp. L16–L20. arXiv:1503.01116 [astro-ph.CO].
- [13] Gaztañaga E., Cabre A., Hui L. Clustering of Luminous Red Galaxies IV: Baryon Acoustic Peak in the Line-of-Sight Direction and a Direct Measurement of $H(z)$ // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2009. Vol. 399, № 3. Pp. 1663–1680. arXiv:0807.3551.
- [14] Blake C. et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: joint measurements of the expansion and growth history at $z < 1$ // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2012. Vol. 425, № 1. Pp. 405–414. arXiv:1204.3674 [astro-ph.CO].
- [15] Busca N.G. Baryon acoustic oscillations in the $\text{Ly}\alpha$ forest of BOSS quasars // *Astronomy and Astrophysics*. 2013. Vol. 552. P. A96. arXiv:1211.2616 [astro-ph.CO].
- [16] Chuang C.H., Wang Y. Modeling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and improved measurements of $H(z)$, $D_A(z)$, and

- $f(z)\sigma_8(z)$ from the Sloan Digital Sky Survey DR7 Luminous Red Galaxies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2013. Vol. 435, № 1. Pp. 255–262. arXiv:1209.0210 [astro-ph.CO].
- [17] Chuang C.H. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: single-probe measurements and the strong power of $f(z)\sigma_8(z)$ on constraining dark energy // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2013. Vol. 433, № 4. Pp. 3559–3571. arXiv:1303.4486 [astro-ph.CO].
- [18] Anderson L. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: measuring D_A and H at $z = 0.57$ from the baryon acoustic peak in the data release 9 spectroscopic galaxy sample // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. Vol. 439, № 1. Pp. 83–101. arXiv:1303.4666.
- [19] Anderson L. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data releases 10 and 11 galaxy samples // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. Vol. 441, № 1. Pp. 24–62. arXiv:1312.4877 [astro-ph.CO].
- [20] Oka A. et al. Simultaneous constraints on the growth of structure and cosmic expansion from the multipole power spectra of the SDSS DR7 LRG sample // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. Vol. 439, № 3. Pp. 2515–2530. arXiv:1310.2820 [astro-ph.CO].
- [21] Font-Ribera A. et al. Quasar-Lyman α forest cross-correlation from BOSS DR11: baryon acoustic oscillations // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2014. №05, id. 027. arXiv:1311.1767 [astro-ph.CO].
- [22] Delubac T. et al. Baryon acoustic oscillations in the Ly α forest of BOSS DR11 quasars // Astronomy and Astrophysics. 2015. Vol. 574. id. A59. arXiv:1404.1801 [astro-ph.CO].
- [23] Шаров Г.С., Воронцова Е.Г. Космологическая модель с обобщенным чеплыгинским газом и последние астрономические наблюдения // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 1. С. 21–38.
- [24] Percival W.J. et al. Baryon acoustic scillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 galaxy sample // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2010. Vol. 401, № 4. Pp. 2148–2168. arXiv:0907.1660 [astro-ph.CO].
- [25] Kazin E.A. et al. The baryonic acoustic feature and large-scale clustering in the SDSS LRG sample // The Astrophysical Journal. 2010. Vol. 710, № 2. Pp. 1444–1461. arXiv:0908.2598 [astro-ph.CO].
- [26] Beutler F. et al. The 6dF Galaxy Survey: baryon acoustic oscillations and the local Hubble constant // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011. Vol. 416, № 4. Pp. 3017–3032. arXiv:1106.3366 [astro-ph.CO].
- [27] Blake C. et al. The WiggleZ dark energy survey: mapping the distance redshift relation with baryon acoustic oscillations // Monthly Notices of the Royal

- Astronomical Society. 2011. Vol. 418, № 3. Pp. 1707–1724. arXiv:1108.2635 [astro-ph.CO].
- [28] Padmanabhan N. et al. A 2 distance to $z = 0.35$ by reconstructing baryon acoustic oscillations - I: methods and application to the Sloan Digital Sky Survey // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. Vol. 427, № 3. Pp. 2132–2145. arXiv:1202.0090 [astro-ph.CO].
- [29] Seo H.-J. et al. Acoustic scale from the angular power spectra of SDSS-III DR8 photometric luminous galaxies // The Astrophysical Journal. 2012. Vol. 761, № 1, id. 13. arXiv:1201.2172 [astro-ph.CO].
- [30] Kazin E.A. et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: improved distance measurements to $z = 1$ with reconstruction of the baryonic acoustic feature // Monthly Not. of the Royal Astron. Soc. 2014. Vol. 441, №4. Pp. 3524–3542.
- [31] Ross A.J. et al. The clustering of the SDSS DR7 main galaxy sample I: a 4 per cent distance measure at $z = 0.15$ // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2015. Vol. 449, № 1. Pp. 835–847. arXiv:1409.3242 [astro-ph.CO].
- [32] Suzuki N. et al. The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the Dark Energy Constraints Above $z > 1$ and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample // The Astrophysical Journal. 2012. Vol. 746. P. 85. arXiv:1105.3470. URL: <http://supernova.lbl.gov/Union/>.
- [33] Clifton T., Ferreira P.G., Padilla A., Skordis C. Modified Gravity and Cosmology // Physics Reports. 2012. Vol. 513, № 1. Pp. 1–189. arXiv:1106.2476.
- [34] Bamba K., Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S.D. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests // Astrophysics and Space Science. 2012. V. 342, № 1. Pp. 155–228. arXiv:1205.3421 [gr-qc].
- [35] Benaoum H.B. Accelerated universe from modified Chaplygin gas and tachyonic fluid // arXiv:hep-th/0205140.
- [36] Chimento L.P. Extended tachyon field, Chaplygin gas, and solvable k-essence cosmologies // Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology. 2004. Vol. 69, № 12, id. 123517.
- [37] Debnath U., Banerjee A., Chakraborty S. Role of modified Chaplygin gas in accelerated universe // Classical and Quantum Gravity. 2004. Vol. 21, № 23. Pp. 5609–5617. arXiv:gr-qc/0411015.
- [38] Lu J., Xu L., Wu Y., Liu M. Combined constraints on modified Chaplygin gas model from cosmological observed data: Markov Chain Monte Carlo approach // General Relativity and Gravitation. 2011. Vol. 43, № 3. Pp. 819–832. arXiv:1105.1870 [astro-ph.CO].
- [39] Paul B.C., Thakur P. Observational constraints on modified Chaplygin gas from cosmic growth // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2013. № 11, id. 052. arXiv:1306.4808 [astro-ph.CO].

- [40] Paul B.C., Thakur P., Beesham A. Observational constraints on modified Chaplygin gas from from large scale structure // arXiv:1410.6588 [astro-ph.CO].
- [41] Sharov G.S., Vorontsova E.G. Parameters of cosmological models and recent astronomical observations // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2014. № 10, id. 057. arXiv:1407.5405 [gr-qc].
- [42] Riess A.G. et al. A 3% solution: determination of the Hubble constant with the Hubble space telescope and wide field camera 3 // The Astrophysical Journal. 2011. Vol. 730, № 2, id. 119. arXiv:1103.2976 [astro-ph.CO].
- [43] Farooq O., Mania D., Ratra B. Hubble parameter measurement constraints on dark energy // The Astrophysical Journal. 2013. Vol. 764, № 2, id. 138. arXiv:1211.4253 [astro-ph.CO].

Библиографическая ссылка

Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Последние оценки астрофизических параметров и предсказания модели с модифицированным газом Чапльгина // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 7–23.

Сведения об авторах

1. **Воронцова Елена Геннадьевна**

доцент кафедры математических методов современного естествознания Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, математический ф-т.
E-mail: elenavor@inbox.ru.*

2. **Шаров Герман Сергеевич**

зав. кафедрой функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, математический ф-т.
E-mail: german.sharov@mail.ru.*

RECENT ESTIMATIONS OF ASTROPHYSICAL PARAMETERS AND FORECAST OF THE MODEL WITH MODIFIED CHAPLYGIN GAS

Vorontsova Elena Gennadievna

Associate Professor at Mathematical Methods in Natural Science department,
Tver State University.

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: elenavor@inbox.ru

Sharov German Sergeevich

Head of Functional Analysis and Geometry department, Tver State University.

Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: german.sharov@mail.ru

Received 20.05.2015, revised 25.05.2015.

To describe recent astronomical observations demonstrating accelerated expansion of the Universe we consider cosmological models with different equations of state. The key attention is paid to the model with modified Chaplygin gas. We calculate optimal values of the model parameters and limitations on their acceptable deviations from the best description of observational data for type Ia supernovae, baryon acoustic oscillations and the Hubble parameter $H(z)$ estimations. For comparative analysis we consider the most popular Λ CDM model and the model with generalized Chaplygin gas.

Keywords: accelerated expansion, modified Chaplygin gas, Hubble parameter, equation of state.

Bibliographic citation

Vorontsova E.G., Sharov G.S. Recent estimations of astrophysical parameters and forecast of the model with modified Chaplygin gas. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 2, pp. 7–23. (in Russian)