

**КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С ОБОБЩЕННЫМ
ЧАПЛЫГИНСКИМ ГАЗОМ И ПОСЛЕДНИЕ
АСТРОНОМИЧЕСКИЕ НАБЛЮДЕНИЯ****Шаров Г.С.* , Воронцова Е.Г.****

* Кафедра функционального анализа и геометрии

** Кафедра математических методов современного естествознания

Поступила в редакцию 23.12.2013, после переработки 24.01.2014.

Для гравитационных моделей, описывающих ускоренное расширение Вселенной, исследованы ограничения на выбор параметров от последних наблюдательных данных по сверхновым типа Ia, барионным акустическим осцилляциям, а также от измерений параметра Хаббла $H(z)$ в зависимости от красного смещения. Полученные ограничения наложены на наиболее популярную модель Λ CDM с Λ -членом (темной энергией) и холодной темной материей и на модель с обобщенным чаплыгинским газом. Предсказания этих моделей оказались очень близкими.

Ключевые слова: ускоренное расширение, параметр Хаббла, гравитационная модель, уравнение состояния.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 21–38.

Введение

Важнейшая задача современной астрофизики — объяснение ускоренного расширения Вселенной, обнаруженного на основе наблюдений сверхновых типа Ia в удаленных галактиках [1, 2]. Сверхновые — звезды, взрывающиеся с разлетом внешней оболочки и с выделением огромной энергии — подразделяются на тип I и тип II при, соответственно, отсутствии и наличии ярких линий водорода в их спектрах. Внутри типа I выделен подтип Ia, характеризуемый наличием в спектре линии ионизированного кремния 615.0 нм. Сверхновые типа Ia используют как «стандартные свечи» для измерения расстояний до удаленных галактик [1, 2], так как для этих сверхновых можно измерить красное смещение z в их спектрах и оценить по характеру временной эволюции яркости их абсолютную светимость, следовательно — измерить фотометрическое расстояние D_L до них. Наблюдаемая зависимость $D_L(z)$ свидетельствует об ускоренном росте масштабного фактора $a(t)$ на поздней стадии эволюции [3].

Вывод об ускоренном расширении Вселенной был позднее подтвержден на основе анализа наблюдаемой анизотропии реликтового излучения [4], барионных акустических осцилляций в крупномасштабной кластеризации галактик [3, 5] и других наблюдений [3, 4, 6]. Среди последних следует отметить расчеты значений параметра Хаббла $H(z) = \dot{a}/a$ в зависимости от красного смещения, сделанные

в работах [7]– [15] с использованием двух методов — оценки разности возраста галактик с близким значением красного смещения z [7–15] и метода, основанного на анализе барионных акустических осцилляций [14, 15].

Первый из упомянутых методов использует равенство $H(z) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}$, основанное на соотношении между масштабным фактором $a(t)$ в момент t излучения видимого света и красным смещением z

$$a(t) = a_0/(1+z). \quad (1)$$

Здесь $a_0 \equiv a(t_0)$ — современное значение масштабного фактора. В Приложении в Табл. П1 приведены оценки величины $H(z)$ из упомянутых публикаций.

Барионные акустические осцилляции (БАО) — возмущения в распределении галактик, связанные с акустическими волнами, которые существовали в плазме горячей Вселенной до момента отрыва барионов (протонов) от излучения. Этот момент, соответствующий красному смещению $z_d \simeq 1059.3$ [6], близок к эпохе рекомбинации. Эффект БАО наблюдается в виде пика в корреляционной функции, характеризующей распределение и кластеризацию галактик, причем пик соответствует масштабу звукового горизонта $r_s(z_d)$ [5, 6].

На основе анализа наблюдений эффекта БАО были вычислены параметры, значения которых, взятые из работ [4, 16] приведены в Табл. П2 Приложения. Эти результаты наблюдений, как и данные измерений $H(z)$ из Табл. П1, как и результаты наблюдений сверхновых типа Ia [28] подтверждают вывод об ускоренном расширении Вселенной [3, 4, 6]. Вместе с тем, эти наблюдательные данные являются строгим ограничением на возможные космологические теории и модели.

Для объяснения ускоренного расширения Вселенной было выдвинуто множество космологических теорий с различными уравнениями состояния, которые описывают темную материю и темную энергию, а также с различными модификациями эйнштейновской гравитации, например, с дополнительными измерениями пространства-времени [17, 18].

Среди этих моделей наиболее популярна модель Λ CDM с холодной темной материей и Λ -членом (темной энергией). Эта модель с долей в 5% видимой барионной материи ($\Omega_b = 0.05$), 24% темной материи ($\Omega_c = 0.24$) и 71% темной энергии ($\Omega_\Lambda = 0.71$) описывает достаточно хорошо наблюдательные данные по сверхновым типа Ia, барионным акустическим осцилляциям, оценкам $H(z)$, анизотропии реликтового излучения и другие данные [3, 4, 6]. Однако, в модели Λ CDM имеются проблемы, связанные с неясной природой темной материи и темной энергии, с чрезвычайно малой величиной наблюдаемого значения константы Λ , с загадкой близости сегодняшних значений Ω_Λ и $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$ при различном характере их зависимости от времени [17].

Это стимулирует выдвижение альтернативных космологических моделей [17, 18], в частности, теорий с различными уравнениями состояния, среди которых мы выделим и рассмотрим в настоящей работе модель с обобщенным чаплыгинским газом (GCG) [19–23]. В этой модели уравнение состояния имеет вид

$$p = -B/\rho^\alpha, \quad (2)$$

обобщающий соответствующее уравнение $p = -B/\rho$ для газа Чаплыгина [19]. Обобщенный чаплыгинский газ выступает здесь как кандидат на роль темной

энергии и используется для описания наблюдений по сверхновым типа Ia, БАО и по параметру $H(z)$ [21–23].

Отметим, что уравнение состояния вида (2) используется и в многомерной гравитационной модели, рассмотренной в работах [25–27].

В настоящей работе проводится сравнительный анализ моделей Λ CDM и обобщенного чаплыгинского газа (GCG) [19, 20] с точки зрения описания на их основе последних наблюдательных данных по сверхновым типа Ia, БАО и параметру Хаббла $H(z)$. В следующем разделе кратко описана динамика упомянутых моделей, в разделе 2 анализируется описание наблюдательных данных.

1. Модели

Для всех рассматриваемых в данной работе космологических моделей динамика определяется уравнением Эйнштейна

$$G_{\nu}^{\mu} = \varkappa T_{\nu}^{\mu} + \Lambda \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (3)$$

где $G_{\nu}^{\mu} = R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}R\delta_{\nu}^{\mu}$ и T_{ν}^{μ} — компоненты тензоров Эйнштейна и энергии-импульса, Λ -член отличен от нуля только в модели Λ CDM. Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p) \quad (4)$$

(в разделе 1 используем единицы, в которых скорость света $c = 1$). При этом в модели Λ CDM и барионную, и темную материи можно считать пылевидными, доля излучения пренебрежимо мала при анализируемых здесь на основе наблюдений значениях $z \leq 2.3$, поэтому полагаем в выражении (4) $p = 0$. В модели обобщенного чаплыгинского газа давление p имеет вид (2), оно играет ту же роль темной энергии, которая в модели Λ CDM возложена на Λ -член.

Для метрики Робертсона–Уокера со знаком кривизны k

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[(1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega \right] \quad (5)$$

уравнения Эйнштейна (3) сводятся к системе из двух независимых уравнений

$$3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \varkappa \rho + \Lambda, \quad \dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p). \quad (6)$$

Второе из этих уравнений — следствие условия непрерывности $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$, точка — производная по t .

Взяв современные значения постоянной Хаббла и критической плотности

$$H_0 = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0} = H \Big|_{z=0}, \quad \rho_c = \frac{3H_0^2}{\varkappa}, \quad (7)$$

заменяем переменные на безразмерные время τ , плотность $\bar{\rho}$, давление \bar{p} и логарифм масштабного фактора [25, 26]:

$$\tau = H_0 t, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_c}, \quad \mathcal{A} = \ln \frac{a}{a_0}. \quad (8)$$

Обозначив штрихом производную по τ , перепишем систему (6) в виде

$$\mathcal{A}'(\tau) = \sqrt{\bar{\rho} + \Omega_\Lambda + \Omega_k e^{-2\mathcal{A}}}, \quad (9)$$

$$\bar{\rho}'(\tau) = -3\mathcal{A}'(\bar{\rho} + \bar{p}), \quad (10)$$

удобном для численного интегрирования с начальными условиями, заданными в момент $t = t_0$, соответствующий современной эпохе (этому моменту сопоставляем значение $\tau = 1$):

$$\mathcal{A}|_{\tau=1} = 0, \quad \bar{\rho}|_{\tau=1} = \Omega_m. \quad (11)$$

Здесь

$$\Omega_m = \frac{\varkappa \rho(t_0)}{3H_0^2} = \frac{\rho(t_0)}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2} \quad (12)$$

— современные доли материи, темной энергии (Λ -члена) и кривизны в уравнении баланса

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1, \quad (13)$$

которое следует из первого уравнения (6) при $t = t_0$ ($\tau = 1$).

Обе рассмотренные модели при определенном наборе параметров имеют космологические решения, описывающие ускоренное расширение Вселенной [4, 6, 27]. Рассмотрим ограничения на выбор этих параметров от наблюдательных данных по сверхновым типа Ia, БАО и измерений $H(z)$.

2. Наблюдательные данные и параметры моделей

Последние наблюдательные данные по $N_S = 580$ сверхновым типа Ia представлены, в частности, в работе [28] и в таблице на указанном веб-сайте. Эта таблица содержит красное смещение $z = z_i$ сверхновых, модуль фотометрического расстояния $\mu_i = \mu(D_L) = 5 \lg(D_L/10 \text{ пк})$ и ошибку σ_i в измерении μ_i .

Фотометрическое расстояние D_L определяются следующим образом [6, 17]:

$$D_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \text{Sin}_k \left(H_0 \sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})} \right), \quad \text{Sin}_k(x) = \begin{cases} \text{sh } x, & \Omega_k > 0, \\ x, & \Omega_k = 0, \\ \sin x, & \Omega_k < 0. \end{cases} \quad (14)$$

В частности, в плоском случае $k = \Omega_k = 0$ выражение (14) имеет вид

$$D_L = c(1+z) \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})} = \frac{ca_0^2}{H_0 a(\tau)} \int_\tau^1 \frac{d\tilde{\tau}}{a(\tilde{\tau})},$$

который асимптотически применим и при $|\Omega_k| \ll 1$ [26, 27].

Для описания данных [28] по сверхновым типа Ia с помощью рассматриваемых моделей мы, задав значения параметров модели p_1, p_2, \dots , рассчитываем эволюцию масштабного фактора $a(\tau)$ и зависимость от τ интегрального выражения (14) с помощью метода Симпсона, а также $\mu(\tau)$. Используя линейную аппроксимацию, для каждого значения красного смещения z_i из таблицы [28] находим соответствующее $\tau = \tau_i$ по формуле (1) и для найденного τ_i — теоретическое значение

$\mu_{th} = \mu(z_i, p_1, p_2, \dots)$ из выражения (14). Мерой отличия теоретических значений μ_{th} от измеренных μ_i по критерию χ^2 служит величина [26, 27]

$$\chi_S^2(p_1, p_2, \dots) = \sum_{i=1}^{N_S} \frac{[\mu_i - \mu_{th}(z_i, p_1, p_2, \dots)]^2}{\sigma_i^2}. \quad (15)$$

Насколько хорошо модели Λ CDM и GCG приближают данные [28] по сверхновым наглядно показано на Рис. 1b, где представлена зависимость фотометрического расстояния (14) $D_L(z)$ в Гпк для этих моделей (кривые очень близки) с оптимальными значениями параметров, выбранными ниже. Данные [28], пересчитанные в $D_{L,i} = 10 \text{пк} \cdot 10^{\mu_i/5}$, показаны с соответствующими ошибками.

На Рис. 1a для тех же моделей показана зависимость масштабного фактора $a(\tau)$. На Рис. 1c наряду с предсказаниями моделей представлены оценки параметра Хаббла $H(z)$ из Табл. П1 Приложения, а на Рис. 1d — зависимость величины [4, 6]

$$D_V(z) = \left[\frac{czD_L^2(z)}{(1+z)^2 H(z)} \right]^{1/3} \quad (16)$$

с пересчитанными для D_V данными по БАО из Табл. П2.

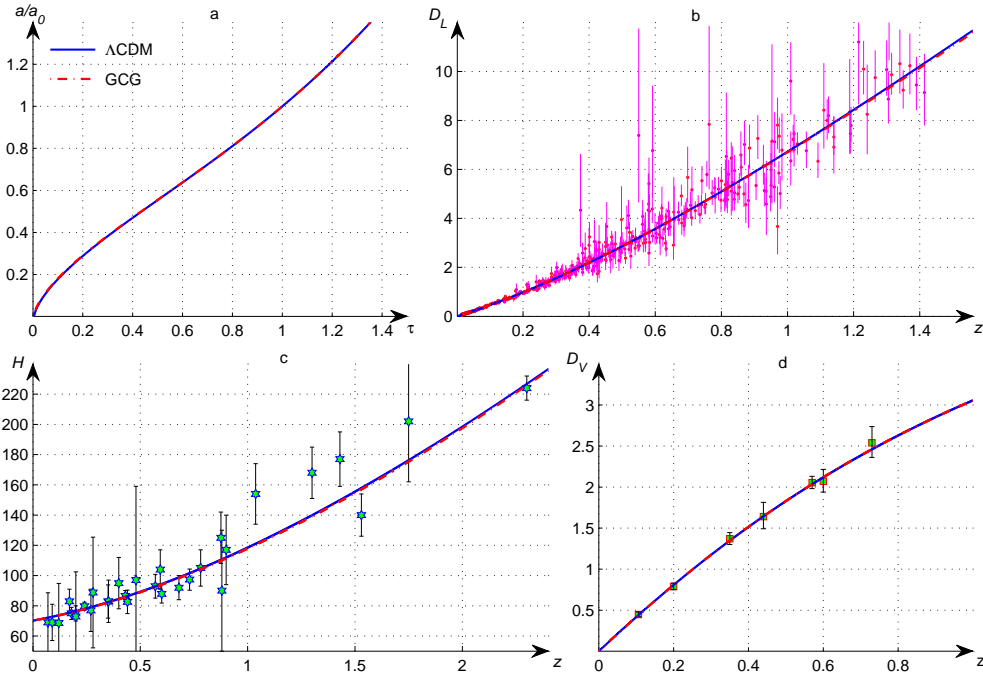


Рис. 1: Для моделей Λ CDM и GCG с оптимальными параметрами (26) и (30) зависимость а) масштабного фактора $a(\tau)$; б) фотометрического расстояния D_L в Гпк от красного смещения z с данными [28]; в) параметра Хаббла $H(z)$ с данными из Табл. П1; д) параметра $D_V(z)$ в Гпк с данными из Табл. П2

При сравнении предсказаний моделей для параметра Хаббла $H(z) = \dot{a}/a = H_0 \mathcal{A}(\tau)$ с наблюдательными данными из Табл. П1 Приложения критерием соответствия служит подобный (15) параметр

$$\chi_H^2(p_1, p_2, \dots) = \sum_{i=1}^{N_H} \frac{[H_i - H_{th}(z_i, p_1, p_2, \dots)]^2}{\sigma_{H,i}^2}. \quad (17)$$

Здесь теоретические значения $H_{th}(z_i, \dots) = H_0 \mathcal{A}(\tau(z_i))$ определяются на основе рассчитанной зависимости $\mathcal{A}(\tau)$ и равенства (1) $z = e^{-\mathcal{A}} - 1$.

Аналогичным образом проводится сравнение расчетов на основе моделей с данными от наблюдения барионных акустических осцилляций (см. Табл. П2). Эти данные включают оценки отношения

$$d_z(z) = \frac{r_s(z_d)}{D_V(z)} \quad (18)$$

упомянутого выше масштаба звукового горизонта $r_s(z_d)$ [5, 6] к расстоянию (16), а также оценки параметра [5]

$$A(z) = \frac{H_0 \sqrt{\Omega_m}}{cz} D_V(z). \quad (19)$$

На Рис. 1d показаны оценки расстояния $D_V(z) = r_s(z_d)/d_z(z)$, полученные из данных Табл. П2 по параметру $d_z(z)$. При этом в ошибку входит разброс между последними оценками масштаба звукового горизонта:

$$r_s(z_d) = 147.49 \pm 0.59 \text{ Мпк [6]}, \quad r_s(z_d) = 153.3 \pm 2.0 \text{ Мпк [15, 16, 30]}. \quad (20)$$

Для сравнения теоретических расчетных значений $d_{z,th}(z_i, p_1, \dots)$ параметра (18) с результатами наблюдений из $d_z(z_i)$ Табл. П2, которые не являются независимыми [4, 16], с помощью столбца разностей $\Delta d = [d_{z,th}(z_i, p_1, \dots) - d_z(z_i)]$ ($i = 1, \dots, N_B$) и ковариационной матрицы C_d^{-1} [4, 16] находим функцию χ^2 , включив аналогичное слагаемое с $\Delta A = [A_{th}(z_i, p_1, p_2, \dots) - A(z_i)]$:

$$\chi_B^2(p_1, p_2, \dots) = (\Delta d)^T C_d^{-1} \Delta d + (\Delta A)^T C_A^{-1} \Delta A. \quad (21)$$

Ковариационные матрицы C_d^{-1} и C_A^{-1} приведены в Приложении.

В модели Λ CDM для описания указанных выше наблюдательных данных следует использовать три свободных параметра: H_0 , Ω_m и Ω_Λ . Современное значение постоянной Хаббла H_0 определяется на основе различных подходов, приводящих к различным результатам. В частности, наблюдения цефеид в рамках проекта Hubble Space Telescope (HST) дают последние значения $H_0 = 73.8 \pm 2.4 \text{ км/(с Мпк)}$ [29]. С другой стороны, спутниковые проекты по наблюдению анизотропии реликтового излучения Planck Collaboration (Planck) [6] и Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [4] приводят к следующим оценкам (в $\text{км с}^{-1} \text{Мпк}^{-1}$):

$$\begin{aligned} H_0 &= 67.3 \pm 1.2 && \text{(Planck [6])}, \\ H_0 &= 69.7 \pm 2.4 && \text{(WMAP [4])}, \\ H_0 &= 73.8 \pm 2.4 && \text{(HST [29])}. \end{aligned} \quad (22)$$

Группа WMAP [4] наряду с указанной приводит и оценку $H_0 = 69.33 \pm 0.88$ км с⁻¹Мпк⁻¹, в которой учтены последние наблюдения БАО и H_0 .

Расчеты оптимальных значений параметров H_0 , Ω_m и Ω_Λ модели Λ CDM с точки зрения описания сверхновых типа Ia, БАО и измерений $H(z)$ полностью или частично проводились во множестве работ [4, 6, 30] (см. также обзоры [17, 18]). Для наглядности результаты этих расчетов представляются, как правило, в виде линий уровня функции $\chi^2(p_1, p_2)$ от двух параметров (15), (17) или (21). Эти же линии являются линиями уровня функции правдоподобия

$$L(p_1, p_2, \dots) = \exp \left[-\frac{1}{2} \chi^2(p_1, p_2, \dots) \right]. \quad (23)$$

Для модели Λ CDM на Рис. 2 и 3 мы строим линии уровня функций χ_S^2 , χ_H^2 , χ_B^2 и $\chi_\Sigma^2 = \chi_S^2 + \chi_H^2 + \chi_B^2$ на плоскости параметров Ω_m, Ω_Λ при фиксированных значениях параметра H_0 . В частности, на Рис. 2 для трех значений (22) параметра H_0 показаны линии уровня функции (15) $\chi_S^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$, описывающей соответствие этой модели наблюдательным данным [28] по сверхновым типа Ia.

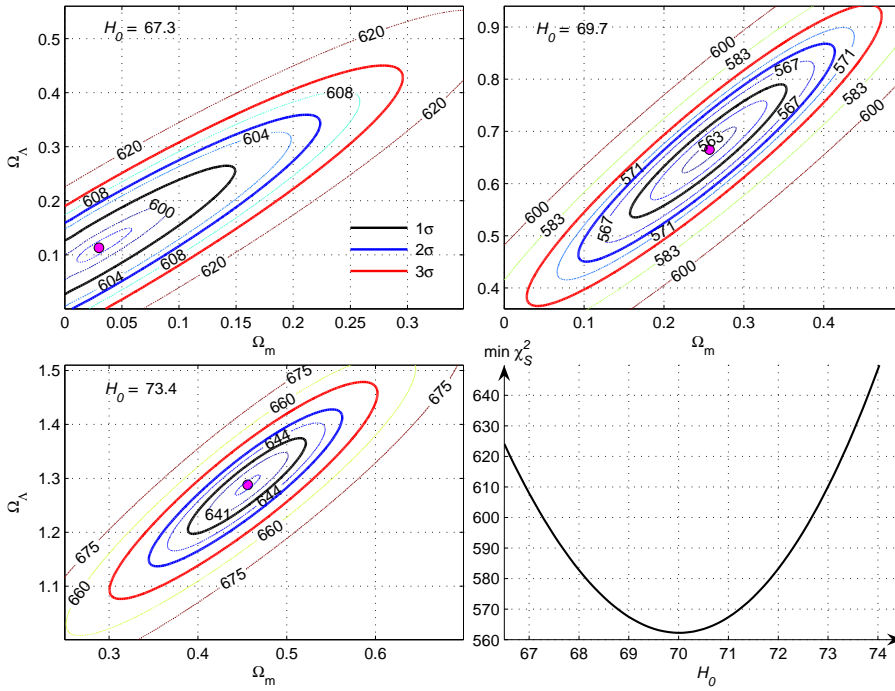


Рис. 2: Линии уровня функции (15) $\chi_S^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ (данные по сверхновым) для модели Λ CDM при указанных значениях параметра H_0 . Жирные сплошные линии соответствуют уровням достоверности 1σ (68.27%), 2σ (95.45%) и 3σ (99.73%). Справа внизу — зависимость $\min \chi_S^2$ от H_0

Расчеты выполнены в пакете MATLAB. Для аппроксимации графиков функций двух переменных здесь и ниже используются сплайновые поверхности [31].

Рис. 2 демонстрирует, что минимальное значение функции $\chi_S^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ и значения параметров Ω_m, Ω_Λ , при которых этот минимум достигается (точки минимума отмечены кружком на Рис. 2), очень сильно зависят от параметра H_0 . Упомянутые численные значения приведены в Табл. 1. Чтобы подчеркнуть разницу значений χ_S^2 при разных H_0 , мы явно указываем их на некоторых линиях уровня.

Важно отметить не только величину $\min \chi_S^2$, но и реализующуюся только при $H_0 = 69.7$ физическую допустимость значений Ω_m, Ω_Λ , при которых достигается этот минимум. Оценивая наряду с Ω_m, Ω_Λ величину $\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$, мы видим, что при $H_0 = 67.3$ и $H_0 = 73.8$ их значения далеко выходят за рамки наблюдательных ограничений

$$\begin{aligned} \Omega_m &= 0.279 \pm 0.025, & \Omega_m &= 0.314 \pm 0.02, \\ \Omega_\Lambda &= 0.721 \pm 0.025, & \Omega_\Lambda &= 0.686 \pm 0.025, & \text{(Planck [6])} \\ \Omega_k &= -0.0027^{+0.0039}_{-0.0038}, & \Omega_k &= -0.0005^{+0.0065}_{-0.0066}, \end{aligned} \quad \text{(WMAP [4])} \quad (24)$$

даже по уровню достоверности 3σ . Это очевидно из Рис. 2 для параметров Ω_m и Ω_Λ , а для Ω_k расчеты с $H_0 = 67.3$ и 73.8 на указанном уровне приводят соответственно к неравенствам $\Omega_k > 0.27$ и $\Omega_k < -0.38$.

С другой стороны, значение постоянной Хаббла $H_0 = 69.7$ почти оптимально для описания данных [28] по сверхновым типа Ia, соответствующий ему минимум $\min \chi_\Sigma^2 = 562.73$ принципиально отличается в лучшую сторону от двух других минимальных значений из Табл. 1. При этом для $H_0 = 69.7$ оптимальные значения параметров $\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k$ лежат в допустимых границах (24) на уровне 1σ .

Таблица 1. Модель Λ CDM. Значения $\min \chi_S^2$ (с соответствующими Ω_m, Ω_Λ), $\min \chi_H^2$, $\min \chi_B^2$ и $\min \chi_\Sigma^2$ (с соответствующими $\Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_k$) при указанных H_0

H_0	$\min \chi_S^2$	Ω_m	Ω_Λ	$\min \chi_H^2$	$\min \chi_B^2$	$\min \chi_\Sigma^2$	Ω_m	Ω_Λ	Ω_k
67.3	599.37	0.030	0.113	17.960	5.539	658.37	0.293	0.538	0.169
69.7	562.73	0.257	0.665	17.316	3.346	585.57	0.284	0.726	-0.01
73.8	639.90	0.456	1.288	18.405	4.434	701.78	0.270	0.979	-0.249

Вывод о близости значения постоянной $H_0 = 69.7$ к оптимальному для модели Λ CDM подтверждается представленным на Рис. 3 анализом оценок параметра Хаббла $H(z)$ из Табл. П1 Приложения и данных по БАО из Табл. П2. Здесь отмечены значения H_0 , наиболее важный случай $H_0 = 69.7$ показан в большем масштабе. В верхнем ряду представлены линии уровня функции (17) $\chi_H^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$, определяемой данными из Табл. П1 по $H(z)$, с явным указанием нескольких значений этой функции, а также по 3 линии уровня $1\sigma, 2\sigma$ и 3σ функции (21) $\chi_B^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$. Для этой функции, определяемой данными из Табл. П2 по БАО, дополнительные линии уровня не приведены, чтобы избежать усложнения рисунка. Точка минимума для функции $\chi_B^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ отмечена крестиком, для функции $\chi_H^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ — звездочкой.

Как видим, на Рис. 3 эти точки близки при всех значениях H_0 , но только при $H_0 = 69.7$ они лежат близко к точке минимума функции $\chi_S^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ на Рис. 2 (см. также Табл. 1). При $H_0 = 67.3$ и 73.8 большие расстояния между этими точками

приводят в существенно худшим минимальным значениям суммарной функции

$$\chi_{\Sigma}^2 = \chi_S^2 + \chi_H^2 + \chi_B^2, \quad (25)$$

линии уровня которой показаны в средней части Рис. 3, а минимумы и координаты их точек (обозначенных кружками на Рис. 3) приведены в Табл. 1.

Очевидно, что только при $H_0 = 69.7$ приведенные в Табл. 1 оптимальные значения параметров Ω_m , Ω_Λ , Ω_k удовлетворяют условиям (24). Последнее из этих условий $\Omega_k \simeq 0$ удобно привязать к пунктирным прямым на Рис. 3 с χ_{Σ}^2 . Они соответствуют равенству $\Omega_k = 0$, или, $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ (плоской модели с $k = 0$).

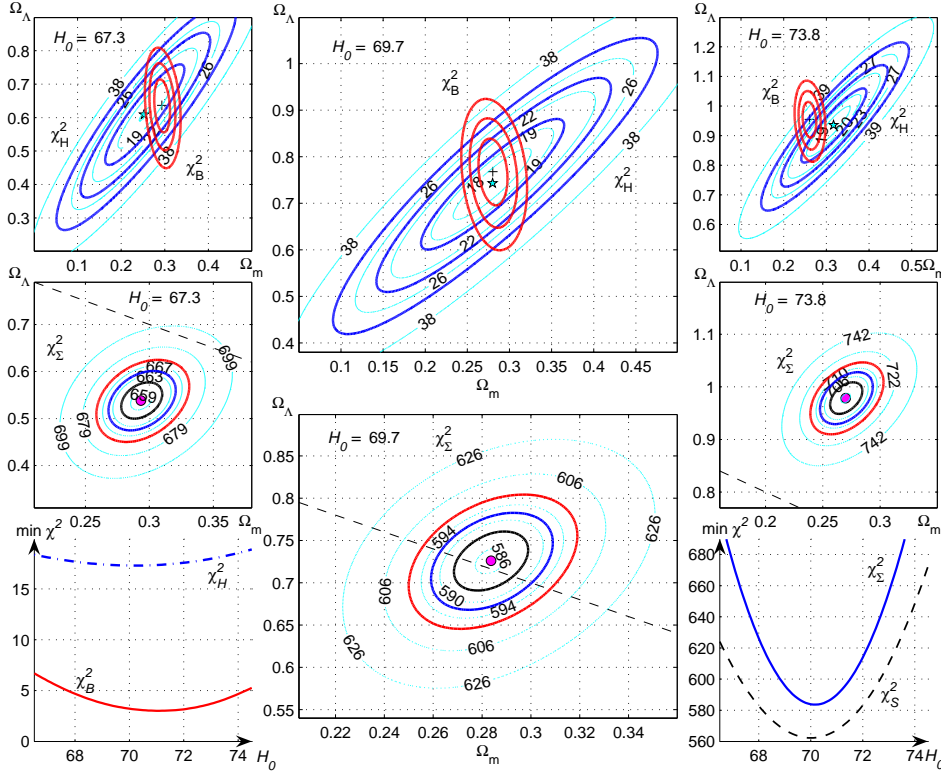


Рис. 3: Линии уровня функций $\chi_H^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$, $\chi_B^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ и $\chi_S^2(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ для модели Λ CDM при указанных значениях параметра H_0 . Показаны зависимости $\min \chi_H^2$, $\min \chi_B^2$, $\min \chi_S^2$ и $\min \chi_{\Sigma}^2$ от H_0

Анализируя зависимость от параметра H_0 минимальных значений функций χ^2 , в частности, функции (25) χ_{Σ}^2 , мы видим, что оптимальное значение этого параметра для описания имеющихся наблюдений моделью Λ CDM: $H_0 \simeq 70.16$. Оно соответствует следующим оптимальным значениям параметров и $\min \chi_{\Sigma}^2$:

$$H_0 = 70.16, \quad \Omega_m = 0.282, \quad \Omega_\Lambda = 0.758, \quad \Omega_k = -0.04, \quad \min \chi_{\Sigma}^2 = 583.62. \quad (26)$$

Перейдем к модели с обобщенным чаплыгинским газом (GCG) [19–23] и к описанию с ее помощью той же совокупности наблюдательных данных. После введения безразмерных плотности $\bar{\rho}$ и давления \bar{p} (8) перепишем уравнение состояния (2) для этой модели в виде

$$\bar{p} = -B/\bar{\rho}^\alpha, \quad (27)$$

переопределив соответствующим образом константу B (безразмерный параметр α не меняется).

Материя с уравнением состояния (27) описывает как темную материю, так и темную энергию, следовательно, $\Omega_\Lambda = 0$, и в модели помимо H_0 имеется три основных свободных параметра: Ω_k , B и α . Значение параметра Ω_k не должно слишком сильно отличаться от нуля. Ограничения (24), вообще говоря, относятся к модели Λ CDM, и не могут быть прямо приложены к модели GCG. Однако, взяв их в первом приближении за основу, положим на начальном этапе $\Omega_k = 0$.

В рамках этого предположения для модели GCG были проведены расчеты значений функций χ_S^2 , χ_H^2 , χ_B^2 , χ_Σ^2 на плоскости безразмерных параметров α и B при тех же трех значениях (22) параметра H_0 . Их результаты представлены на Рис. 4 и в Табл. 2. В верхнем ряду на Рис. 4 показаны линии уровня функции (15) $\chi_S^2(\alpha, B)$, описывающей соответствие модели GCG данным [28] по сверхновым (ср. с Рис. 2), в среднем ряду — линии уровня функций $\chi_B^2(\alpha, B)$ и $\chi_H^2(\alpha, B)$ на уровнях 1σ , 2σ и 3σ , в нижнем — линии уровня суммы (25) $\chi_\Sigma^2(\alpha, B)$. Точки минимума для этих функций отмечены так же, как и на Рис. 3.

Таблица 2. Модель GCG с $\Omega_k = 0$. Значения $\min \chi_S^2$, $\min \chi_H^2$, $\min \chi_B^2$ и $\min \chi_\Sigma^2$ (с α и B , соответствующими $\min \chi_\Sigma^2$) при указанных H_0

H_0	$\min \chi_S^2$	$\min \chi_H^2$	$\min \chi_B^2$	$\min \chi_\Sigma^2$	α	B
67.3	599.36	17.962	6.059	648.17	-0.501	0.557
69.7	562.72	17.296	2.955	585.33	-0.064	0.712
73.8	643.48	17.836	7.851	688.24	1.175	0.926

Особенностью представленных на Рис. 4 и в Табл. 2 результатов является очень похожая зависимость минимумов $\min \chi_S^2$ и $\min \chi_\Sigma^2$ от значения параметра H_0 для моделей GCG и Λ CDM. Это сходство кажется удивительным, так как две данные модели существенно различаются. При этом необходимо отметить, что модель GCG фактически превращается в Λ CDM при $\alpha = 0$ (если переопределить плотность $\bar{\rho} \rightarrow \bar{\rho} - B$ и полагать $B = \Omega_\Lambda$).

В силу последнего замечания понятно, что при $H_0 = 69.7$ в Табл. 1 близкое к нулю оптимальное значение α должно приводить к величинам $\min \chi_S^2$ и $\min \chi_\Sigma^2$, которые близки к их аналогам для модели Λ CDM в Табл. 1 с тем же H_0 .

График зависимости от H_0 на Рис. 4 показывает, что абсолютный минимум величины $\min \chi_\Sigma^2$ достигается при близком к (26) значению $H_0 \simeq 70.127 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1}$, которому соответствуют параметры

$$H_0 = 70.127, \quad \Omega_k = 0, \quad \alpha = 0.022, \quad B = 0.737, \quad \min \chi_\Sigma^2 = 583.87. \quad (28)$$

Из-за малости $|\alpha|$ модель GCG при этих параметрах близка к Λ CDM, поэтому значение абсолютного минимума χ_Σ^2 для нее близко к соответствующей величине (26) для модели Λ CDM.

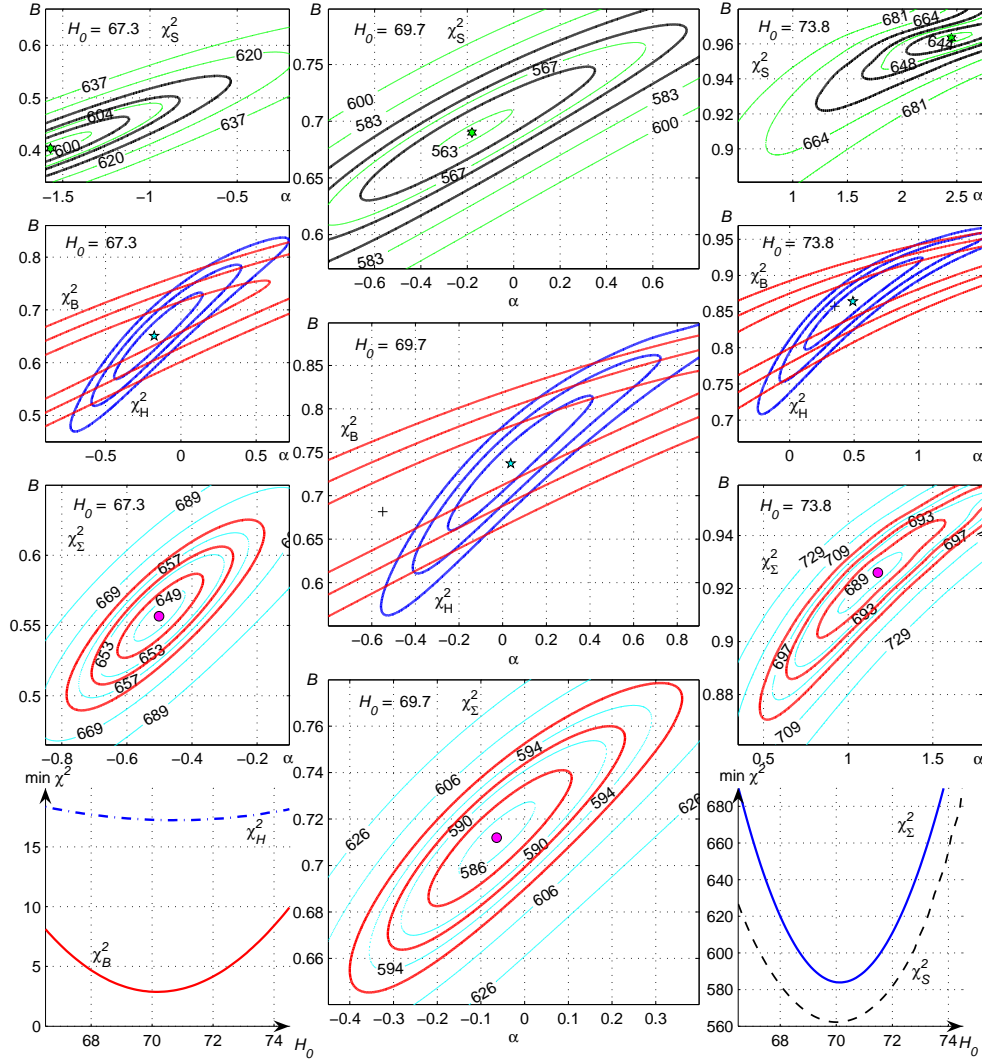


Рис. 4: Для модели GCG с $\Omega_k = 0$ линии уровня функций $\chi_S^2(\alpha, B)$, χ_H^2 , χ_B^2 и χ_Σ^2 на плоскости параметров α, B при $k = 0$ и указанных значениях параметра H_0 . Показаны зависимости $\min \chi_H^2$, $\min \chi_B^2$, $\min \chi_S^2$ и $\min \chi_\Sigma^2$ от H_0

Из Табл. 2 видно, что при $H_0 = 67.3$ и $H_0 = 73.8$ модель GCG работает значительно хуже, чем при $H_0 \simeq 70 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1}$. Это обусловлено, в частности, более сильной зависимостью от H_0 точки минимума функции χ_S^2 по сравнению с точками минимума функций χ_H^2 и χ_B^2 . Большие расстояния между этими точками при $H_0 = 67.3$ и $H_0 = 73.8$ приводят к ухудшению $\min \chi_\Sigma^2$ для суммы (25).

Проанализируем, как на эффективность модели GCG влияет параметр Ω_k . Для этих целей исследуем на глобальный минимум величину χ_Σ^2 в пространстве 4 па-

раметров модели. На первом этапе при фиксированных H_0 и Ω_k находим минимум этой величины по параметрам α и B , как это было сделано на Рис. 4 и в Табл. 2:

$$\underline{\chi}_\Sigma^2(H_0, \Omega_k) = \min_{\alpha, B} \chi_\Sigma^2(H_0, \Omega_k, \alpha, B). \quad (29)$$

На втором этапе (повторяя вычисления первого этапа при различных H_0 и Ω_k) ищем минимум полученной функции $\underline{\chi}_\Sigma^2(H_0, \Omega_k)$ на плоскости параметров H_0 и Ω_k . Линии уровня функции (29) показаны на Рис. 5 слева сверху. Своего минимума для модели GCG она достигает при следующих значениях параметров:

$$H_0 = 70.16, \quad \Omega_k = -0.099, \quad \alpha = -0.065, \quad B = 0.7765, \quad \min \chi_\Sigma^2 = 583.49. \quad (30)$$

Здесь $\min \chi_\Sigma^2 = \min_{H_0, \Omega_k} \chi_\Sigma^2 = \min_{H_0, \Omega_k, \alpha, B} \chi_\Sigma^2$. Точка минимума обозначена на плоскости H_0, Ω_k ромбом. Указанные линии уровня лежат внутри области достоверности 1σ , граница которой соответствует $\chi_\Sigma^2 \simeq 585.8$.

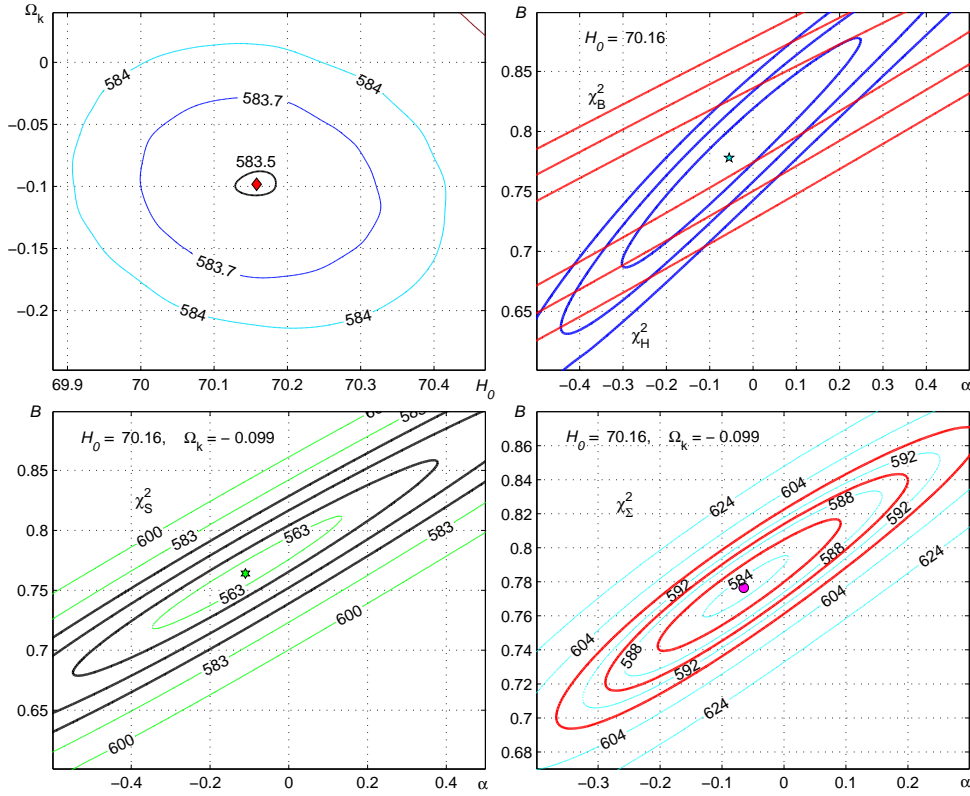


Рис. 5: Для модели GCG линии уровня функции $\underline{\chi}_\Sigma^2(H_0, \Omega_k)$ (слева сверху) и функций χ_S^2 , χ_H^2 , χ_B^2 , χ_Σ^2 при оптимальных значениях $H_0 = 70.16$, $\Omega_k = -0.099$ (30)

На остальной части Рис. 5 на плоскости α, B изображены линии уровня функции $\chi_\Sigma^2(\alpha, B)$ при оптимальных значениях (30) параметров H_0 и Ω_k . Мы исполь-

зую те же обозначения, что и на Рис. 4. Как видим, при выборе параметров (30) области минимумов функций χ_S^2 , χ_H^2 , χ_B^2 достаточно хорошо перекрываются. Это обеспечивает успешное описание данных моделью GCG с данными параметрами.

Заключение

В настоящей работе мы сравниваем описание последних наблюдательных данных по сверхновым типа Ia [28], измерениям параметра Хаббла $H(z)$ и барионным акустическим осцилляциям (см. Приложение) с помощью двух моделей: модели Λ CDM с темной энергией и холодной темной материей и модели GCG с обобщенным чаплыгинским газом. Выбор параметров этих моделей (трех параметров $H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda$ для Λ CDM и четырех H_0, Ω_k, α, B для GCG) базировался на минимизации функций χ^2 (15), (17), (21) и их суммы (25) для окончательного определения.

Результаты расчетов показали хорошее описание наблюдений и помощью обеих моделей с оптимальными параметрами (26) для Λ CDM и (30) для GCG. Поразительная особенность этих результатов состоит в том, что для различных моделей GCG и Λ CDM зависимость минимального значения χ_Σ^2 от постоянной Хаббла H_0 очень похожа (см. Рис. 3 и 4), причем оптимальное значение этого параметра для обеих моделей совпадает и равно $H_0 \simeq 70.16 \text{ км с}^{-1}\text{Мпк}^{-1}$ (26), (30).

Близкие значения $\min \chi_\Sigma^2$ в (26) и (30) для моделей Λ CDM и GCG (модель GCG чуть лучше) можно частично объяснить тем, что, как было сказано выше, при малых значениях параметра α в уравнении состояния (27) модель GCG переходит в Λ CDM с $\Omega_\Lambda = B$. Это проявляется, в частности, в том, что при поиске $\min \chi_\Sigma^2$ в модели GCG с фиксированным $\Omega_k = -0.04$, мы получаем оптимальное значение $\alpha \simeq 0$ и результат очень близкий к (26). В других работах, посвященных модели GCG [20]–[23], оптимальное значение параметра α оказывается также близким к нулю. Однако в нашем исследовании, это значение в (30) $\alpha = -0.065$ все же слегка отлично от нуля, что приводит к небольшой разнице между оптимальными предсказаниями модели GCG и предсказаниями модели Λ CDM (26).

Приложение

Оценки величин $d_z(z)$ и $A(z)$, сделанные в работе [16], являются зависимыми, им соответствуют следующие элементы входящих в выражение (21) ковариационных матриц $C_d^{-1} = \|c_{ij}^d\|$ и $C_A^{-1} = \|c_{ij}^A\|$ [4, 16]:

$$\begin{aligned} c_{44}^d &= 24532.1, & c_{46}^d &= -25137.7, & c_{47}^d &= 12099.1, \\ c_{66}^d &= 134598.4, & c_{67}^d &= -64783.9, & c_{77}^d &= 128837.6; \\ c_{44}^A &= 1040.3, & c_{46}^A &= -807.5, & c_{47}^A &= 336.8, \\ c_{66}^A &= 3720.3, & c_{67}^A &= -1551.9, & c_{77}^A &= 2914.9. \end{aligned}$$

Эти матрицы симметричны, их неуказанные диагональные элементы: $c_{ii} = 1/\sigma_i^2$. Оставшиеся недиагональные элементы равны нулю.

Таблица П1. Значения параметра Хаббла $H(z)$ с погрешностями σ_H , приведенные в работах [7–15]

z	$H(z)$	σ_H	Ссылка	z	$H(z)$	σ_H	Ссылка
0.070	69	19.6	[11]	0.57	92.9	7.855	[15]
0.090	69	12	[7]	0.593	104	13	[9]
0.120	68.6	26.2	[11]	0.600	87.9	6.1	[10]
0.170	83	8	[7]	0.680	92	8;	[9]
0.179	75	4	[9]	0.730	97.3	7.0	[10]
0.199	75	5	[9]	0.781	105	12	[9]
0.200	72.9	29.6	[11]	0.875	125	17	[9]
0.240	79.69	2.65	[14]	0.880	90	40	[8]
0.270	77	14	[7]	0.900	117	23	[7]
0.280	88.8	36.6	[11]	1.037	154	20	[9]
0.350	82.7	8.4	[13]	1.300	168	17	[7]
0.352	83	14	[9]	1.430	177	18	[7]
0.400	95	17	[7]	1.530	140	14	[7]
0.430	86.45	3.68	[14]	1.750	202	40	[7]
0.440	82.6	7.8	[10]	2.300	224	8	[12]
0.480	97	62	[8]				

Таблица П2. Значения параметров $d_z(z) = r_s(z_d)/D_V(z)$ (18) и $A(z)$ (19) с соответствующими погрешностями [4, 16]

z	$d_z(z)$	σ_d	$A(z)$	σ_A	Ссылка
0.106	0.336	0.015	0.526	0.028	[4]
0.20	0.1905	0.0061	0.488	0.016	[4]
0.35	0.1097	0.0036	0.484	0.016	[4]
0.44	0.0916	0.0071	0.474	0.034	[16]
0.57	0.07315	0.0012	-	-	[4]
0.60	0.0726	0.0034	0.442	0.020	[16]
0.73	0.0592	0.0032	0.424	0.021	[16]

Список литературы

- [1] Riess A.G., Filippenko A.V., Challis P. et al. Observational evidence from Supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant // The Astronomical Journal. 1998. Vol. 116, №3. Pp. 1009–1038. astro-ph/9805201.
- [2] Perlmutter S. et al. Measurements of omega and lambda from 42 high redshift supernovae // The Astrophysical Journal. 1999. Vol. 517. Pp. 565–586. astro-ph/9812133.
- [3] Weinberg D.H. et al. Observational probes of cosmic acceleration // arXiv:1201.2434 [astro-ph.CO].
- [4] Hinshaw G. et al. Nine-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: cosmological parameters results // arXiv:1212.5226 [astro-ph.CO].

- [5] Eisenstein D.J., Zehavi I., Seo H.-J., Hogg D.W. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies // *The Astrophysical Journal*. 2005. Vol. 633, №2 I. Pp. 560–574. astro-ph/0501171.
- [6] Ade P.A.R. et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters // arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO].
- [7] Simon J., Verde L., Jimenez R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential // *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*. 2005. Vol. 71. P. 123001. astro-ph/0412269.
- [8] Stern D., Jimenez R., Verde L., Kamionkowski M., Stanford S.A. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. I: $H(z)$ measurements // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2010. Vol. 2010, №2. arXiv:0907.3149 [astro-ph.CO].
- [9] Moresco M., Cimatti A., Jimenez R. et al. Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to z 1.1 from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2012. Vol. 8, id 006. arXiv:1201.3609 [astro-ph.CO].
- [10] Blake C. et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: Joint measurements of the expansion and growth history at $z < 1$ // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2012. Vol. 425, №1. Pp. 405–414. arXiv:1204.3674 [astro-ph.CO].
- [11] Zhang C. et al. Four new observational $H(z)$ data from luminous red galaxies sloan digital sky survey data release seven // arXiv:1207.4541 [astro-ph.CO].
- [12] Busca N.G., Delubac T., Rich J. et al. Baryon acoustic oscillations in the Ly α forest of BOSS quasars // *Astronomy and Astrophysics*. 2013. Vol. 552, id A96. arXiv:1211.2616 [astro-ph.CO].
- [13] Chuang C.H., Wang Y. Modeling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and improved measurements of $H(z)$, $D_A(z)$, and $f(z)\sigma_8(z)$ from the sloan digital sky survey DR7 luminous red galaxies // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2013. Vol. 435, №1. Pp. 255–262. arXiv:1209.0210 [astro-ph.CO].
- [14] Gaztañaga E., Cabre A., Hui L. Clustering of luminous red galaxies IV: baryon acoustic peak in the line-of-sight direction and a direct measurement of $H(z)$ // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2009. Vol. 399, №3. Pp. 1663–1680. arXiv:0807.3551.
- [15] Anderson L. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: measuring D_A and H at $z = 0.57$ from the baryon acoustic peak in the data release 9 spectroscopic galaxy sample // arXiv:1303.4666.
- [16] Blake C. et al. The WiggleZ dark energy survey: mapping the distance redshift relation with baryon acoustic oscillations // *Monthly Notices of the Royal*

- Astronomical Society. 2011. Vol. 418, №3. Pp. 1707–1724. arXiv:1108.2635 [astro-ph.CO].
- [17] Clifton T., Ferreira P.G., Padilla A., Skordis C. Modified gravity and cosmology // *Physics Reports*. 2012. Vol. 513, №1-3. Pp. 1–189. arXiv:1106.2476.
- [18] Bamba K., Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S.D. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests // *Astrophysics and Space Science*. 2012. Vol. 342, №1. Pp. 155–228. arXiv:1205.3421 [gr-qc].
- [19] Kamenshchik A., Moschella U., Pasquier V. An alternative to quintessence // *Physics Letters. Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*. 2001. Vol. 511, №2-4. Pp. 265–268. arXiv:gr-qc/0103004.
- [20] Bento M.C., Bertolami O., Sen A.A. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification // *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*. 2002. Vol. 66, №4. id 043507. arXiv:gr-qc/0202064.
- [21] Makler M., De Oliveira S.Q., Waga I. Constraints on the generalized Chaplygin gas from supernovae observations // *Physics Letters. Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*. 2003. Vol. 555, №1-2. Pp. 1–6. arXiv:astro-ph/0209486.
- [22] Lu J., Gui Y., Xu L.X. Observational constraint on generalized Chaplygin gas model // *The European Physical Journal C - Particles and Fields*. 2009. Vol. 63, №3. Pp. 349–354. arXiv:1004.3365 [astro-ph.CO].
- [23] Xu L., Lu J., Wang Y. Revisiting generalized Chaplygin gas as a unified dark matter and dark energy model // *The European Physical Journal C - Particles and Fields*. 2012. Vol. 72. P. 1883. arXiv:1204.4798 [astro-ph.CO].
- [24] Debnath U., Banerjee A., Chakraborty S. Role of modified Chaplygin gas in accelerated universe // *Classical and Quantum Gravity*. 2004. Vol. 21. Pp. 5609–5618.
- [25] Pahwa I., Choudhury D., Seshadri T.R. Late-time acceleration in higher dimensional cosmology // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2011. Vol. 9, id 015. arXiv:1104.1925 [gr-qc].
- [26] Григорьева О.А., Шаров Г.С. Пятимерная космологическая модель с анизотропным давлением // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2012. №3 (26). С. 15–27.
- [27] Grigorieva O.A., Sharov G.S. Multidimensional gravitational model with anisotropic pressure // *International Journal of Modern Physics D*. 2013. Vol. 22, №13. P. 1350075. arXiv:1211.4992 [gr-qc].
- [28] Suzuki N. et al. // *The Astrophysical Journal*. 2012. Vol. 746. P. 85. arXiv:1105.3470. URL: <http://supernova.lbl.gov/Union/>.

- [29] Riess A.G. et al. A 3space telescope and wide field camera 3 // The Astrophysical Journal. 2011. Vol. 730. P. 119. arXiv:1103.2976.
- [30] Farooq O., Mania D., Ratra B. Hubble parameter measurement constraints on dark energy // The Astrophysical Journal. 2013. Vol. 764. P. 139. arXiv:1211.4253 [astro-ph.CO]
- [31] Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. М.: Физматлит, 2002. 472 с.

Библиографическая ссылка

Шаров Г.С., Воронцова Е.Г. Космологическая модель с обобщенным чаплыгинским газом и последние астрономические наблюдения // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 21–38.

Сведения об авторах

1. Шаров Герман Сергеевич

профессор, заведующий кафедрой функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ, математический факультет. E-mail: g.sharov@list.ru.

2. Воронцова Елена Геннадьевна

кафедра математических методов современного естествознания Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ, математический факультет.

COSMOLOGICAL MODEL WITH GENERALIZED CHAPLYGIN GAS AND RECENT ASTRONOMICAL OBSERVATIONS

Sharov German Sergeevich

Head of the Department of Functional Analysis and Geometry, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str.
E-mail: g.sharov@list.ru

Vorontsova Elena Gennadyevna

Department of Mathematical Methods in Modern Natural Science, Tver State
University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str.

Received 23.12.2013, revised 24.01.2014.

For gravitational models describing accelerated expansion of the Universe we consider limitations on their parameters coming from recent observational data for type Ia supernovae, baryon acoustic oscillations, and from measuring the Hubble parameter $H(z)$ depending on redshift. The calculated limitations are applied to the most popular Λ CDM model with the Λ term (dark energy) and cold dark matter and to the model with generalized Chaplygin gas. Prediction of these models appeared to be very close.

Keywords: accelerated expansion, Hubble parameter, gravitational model, equation of state.

Bibliographic citation

Sharov G.S., Vorontsova E.G. Cosmological model with generalized Chaplygin gas and recent astronomical observations. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 1, pp. 21–38. (in Russian)