

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РАДИАЛЬНЫХ
КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ
СФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА**

Вестяк В.А.* , Тарлаковский Д.В.**

* Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет), г. Москва

** МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 19.01.2014, после переработки 15.03.2014.

Рассматривается задача о нестационарных радиальных колебаниях электромагнитоупругой сферы. Предполагается, что электромагнитное поле в среде инициируется механическим посредством обобщенного закона Ома. Для решения задачи используется разложение искомых величин в степенной ряд по малому параметру, связывающему механическое и электрическое поля. Показано, что коэффициенты рядов в пространстве преобразования Лапласа представляются в виде сверток с ядрами специального вида. При этом их оригиналы имеют сингулярные особенности. Для преодоления трудностей при нахождении оригиналов предложен аналитический подход и модифицированный алгоритм численного обращения преобразования Лапласа, использующий формулу быстрого преобразования Фурье. Результаты расчетов приведены как для не связанной, так и для связанной задач.

Ключевые слова: нестационарная электромагнитоупругость, обращение преобразования Лапласа, толстостенная сфера, метод малого параметра.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 51-64.

Введение

При проектировании различных объектов новой техники, в том числе авиационных и ракетно-космических конструкций, часто возникает необходимость учета взаимосвязанности нестационарных электромагнитных и механических полей. Одним из вариантов подобных моделей является введение в правую часть уравнений движения силы Лоренца [1,2]. Соответствующая замкнутая линеаризованная система уравнений для однородной изотропной среды получена в [3]. С ее использованием решен ряд одномерных нестационарных задач для областей с плоскими и сферическими границами [4-6]. В этих работах использовалось преобразование Лапласа по времени, обращение которого проводилось аналитически. Однако

применение подобного подхода к задачам большей размерности, хотя и принципиально возможно, но приводит к достаточно громоздким выкладкам [7]. Поэтому возникает потребность в использовании других методов обращения преобразования Лапласа, один из вариантов которого (модификация численного обращения) в целях апробации используется ниже на примере задачи, рассмотренной в [6].

1. Постановка задачи

Уравнения радиальных колебаний толстостенной однородной изотропной электромагнитоупругой сферы внутреннего и внешнего радиусов r_0 и r_1 с учетом силы Лоренца имеют вид [6]:

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} + \alpha \left[\rho_{e0} E + E_0 \left(\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{2E}{r} \right) \right], \quad (1)$$

$$\ddot{E} + \gamma \dot{E} = -\rho_{e0} \ddot{u}, \quad (2)$$

$$\gamma j = -\dot{E}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 E)}{\partial r} = \rho_e, \quad (3)$$

где r – радиус сферической системы координат с началом в центре сферы; u , E и j – радиальные компоненты векторов перемещения, напряженности электрического поля и плотности тока; ρ_e – плотность зарядов; точками обозначены производные по времени τ ; нижние индексы «0» соответствуют начальным статическим значениям величин.

Отметим, что замкнутая система уравнений состоит из соотношений (1) и (2), а формулы (3) являются дополнительными равенствами для определения величин j и ρ_e .

Здесь и далее использованы следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании размерные аналоги обозначены волной):

$$r = \frac{\tilde{r}}{r_0}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{r_0}, \quad r_1 = \frac{\tilde{r}_1}{r_0}, \quad u = \frac{\tilde{u}}{r_0}, \quad \rho_e = \frac{4\pi \tilde{\rho}_e r_0}{\varepsilon E_*}, \quad E = \frac{\tilde{E}}{E_*},$$

$$j = \frac{\tilde{j}}{\sigma E_*}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon E_*^2}{4\pi(\lambda+2\mu)}, \quad \gamma = \frac{4\pi\sigma r_0}{\varepsilon c_1}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho},$$

где t – размерное время; c_1 – скорость распространения волн растяжения-сжатия; λ , μ и ρ – упругие постоянные Ламе и плотность среды; σ и ε – удельная проводимость и диэлектрическая проницаемость; E_* – некоторое характерное значение напряженности электрического поля.

В начальный момент времени возмущения отсутствуют:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = E|_{\tau=0} = \dot{E}|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

На внутренней поверхности сферы задано перемещение, внешняя поверхность неподвижна:

$$u|_{r=1} = U_0(\tau), \quad u|_{r=r_1} = 0. \quad (5)$$

2. Решение в пространстве преобразований Лапласа с использованием метода малого параметра

Для решения начально-краевой задач используется метод малого параметра, в качестве которого выбирается коэффициент связи поля перемещения и электрического поля, а именно, искомые функции представляются в виде степенных рядов:

$$u(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(r, \tau) \alpha^m, \quad E(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m(r, \tau) \alpha^m. \quad (6)$$

В работе [6] показано, что изображения по Лапласу коэффициентов этих рядов имеют вид (s – параметр преобразования; верхний индекс « L » соответствует трансформанте):

$$u_0^L(r, s) = B(r_1 s, rs) D^{-1}(s) U_0^L(s), \quad D(s) = B(r_1 s, s), \\ B(x, y) = R_{10}(x) R_{10}(-y) e^{y-x} - R_{10}(-x) R_{10}(y) e^{x-y}; \quad (7)$$

$$e_m^L(r, s) = -\rho_{e0}(r) \frac{s}{s + \gamma} u_m^L(r, s) \quad (m \geq 0); \quad (8)$$

$$u_m^L(r, s) = - \int_1^{r_1} G^L(r, \xi, s) E_0(\xi) e_{m-1}^L(\xi, s) d\xi \quad (m \geq 1). \quad (9)$$

Здесь (эта формула преобразована к виду, удобному для последующих вычислений)

$$G^L(r, \xi, s) = -\frac{1}{2\xi r^2} [G_1^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + G_2^L(r, \xi, s) H(r - \xi)], \quad (10) \\ G_1^L(r, \xi, s) = \frac{B(rs, s) B_1(r_1 s, \xi s)}{s^3 D(s)}, \quad G_2^L(r, \xi, s) = \frac{B(rs, r_1 s) B_1(s, \xi s)}{s^3 D(s)},$$

где

$$B_1(x, y) = R_{10}(x) R_2(-y) e^{y-x} - R_{10}(-x) R_2(y) e^{x-y}, \\ R_2(z) = R_{20}(z) + R_{10}(z), \quad R_{10}(z) = z + 1, \quad R_{20}(z) = z^2 + 3z + 3.$$

Анализ функций G_1^L и G_2^L показывает, многочлены в их числителях и знаменателях имеют одинаковую степень относительно параметра s . Следовательно, оригиналы этих функций имеют сингулярные особенности. Для их выделения предварительно аналогично [6] представляем функции G_1^L и G_2^L в виде рядов по экспонентам ($j = 1, 2$):

$$G_j^L(r, s, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{jnk}^L(r, s, \xi) e^{-\tau_{jnk}(r, \xi)s}, \quad (11)$$

где

$$G_{1n1}^L(r, s, \xi) = -s^{-3} R_3(rs, -\xi s) Y_1^{n+1}(-s) Y_1^{n+1}(r_1 s), \quad R_3(x, y) = R_{10}(x) R_2(y), \\ G_{jn2}^L(r, s, \xi) = s^{-3} R_3(-rs, -\xi s) Y_1^{n+1}(r_1 s) Y_1^n(-s), \\ G_{jn3}^L(r, s, \xi) = s^{-3} R_3(rs, \xi s) Y_1^{n+1}(-s) Y_1^n(r_1 s), \quad Y_1(z) = R_{10}(z)/R_{10}(-z), \\ G_{1n4}^L(r, s, \xi) = -s^{-3} R_3(-rs, \xi s) Y_1^n(r_1 s) Y_1^n(-s); \\ G_{2n1}^L(r, s, \xi) = G_{1n4}^L(-r, s, -\xi), \quad G_{2n4}^L(r, s, \xi) = G_{1n1}^L(-r, s, -\xi); \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\tau_{1n1}(r, \xi) &= 2(n+1)h - \xi + r, \quad \tau_{jn2}(r, \xi) = 2(n+1)h + 2 - \xi - r, \\ \tau_{jn3}(r, \xi) &= 2nh - 2 + \xi + r, \quad \tau_{1n4}(r, \xi) = 2nh + \xi - r, \\ \tau_{2n1}(r, \xi) &= \tau_{1n4}(-r, -\xi), \quad \tau_{2n4}(r, \xi) = \tau_{1n1}(-r, -\xi), \quad h = r_1 - 1.\end{aligned}$$

Далее, вычисляя пределы

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_{jnk}^L(r, s, \xi) = (-1)^k \xi^2 r \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

записываем функции $G_{jnk}^L(r, s, \xi)$ в виде суммы регулярных $G_{jrnk}^L(r, s, \xi)$ и сингулярных слагаемых:

$$\begin{aligned}G_{jnk}^L(r, s, \xi) &= G_{jrnk}^L(r, s, \xi) + (-1)^k \xi^2 r, \quad G_{1rnk}^L(r, s, \xi) = G_{1nk}^L(r, s, \xi) - (-1)^k \xi^2 r, \\ G_{2rn1}^L(r, s, \xi) &= G_{1rn4}^L(-r, s, -\xi), \quad G_{2rn4}^L(r, s, \xi) = G_{1rn1}^L(-r, s, -\xi), \\ G_{2rnk}^L(r, s, \xi) &= G_{1rnk}^L(-r, s, -\xi) \quad (k = 2, 3).\end{aligned}\tag{13}$$

Подстановка этих равенств в (10) приводит к следующему представлению ядра интеграла в (9):

$$G^L(r, s, \xi) = G_r^L(r, s, \xi) + G_s^L(r, s, \xi),\tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}G_r^L(r, s, \xi) &= -\frac{1}{2\xi r^2} [G_{sr1}^L(r, s, \xi) H(\xi - r) + G_{sr2}^L(r, s, \xi) H(r - \xi)], \\ G_s^L(r, s, \xi) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (-1)^k [e^{-\tau_{1nk}(r, \xi)s} H(\xi - r) + e^{-\tau_{2nk}(r, \xi)s} H(r - \xi)], \\ G_{srj}^L(r, s, \xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 G_{jrnk}^L(r, s, \xi) e^{-\tau_{jnk}(r, \xi)s} \quad (j = 1, 2).\end{aligned}\tag{15}$$

В пространстве оригиналов аналог равенства (8) и (9) с учетом представления (14) и свойств преобразования Лапласа записываются так (звездочка обозначает свертку по времени):

$$e_m(r, \tau) = -\rho_{e0}(r) [u_m(r, \tau) - \gamma u_m(r, \tau) * e^{-\gamma\tau}] \quad (m \geq 0);\tag{16}$$

$$u_m(r, \tau) = -I_{1m}(r, \tau) + \frac{1}{2} I_{2m}(r, \tau) \quad (m \geq 1),\tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}I_{1m} &= \int_1^{r_1} E_0(\xi) G_r(r, \xi, \tau) * e_{m-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad I_{2m} = \int_1^{r_1} E_0(\xi) g_{m-1}(r, \xi, \tau) d\xi, \\ g_{m-1}(r, \xi, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (-1)^k \{H(\xi - r) e_{m-1}[\xi, \tau - \tau_{1nk}(r, \xi)] + \\ &+ H(r - \xi) e_{m-1}[\xi, \tau - \tau_{2nk}(r, \xi)]\}.\end{aligned}$$

В последней формуле учтено, что оригинал функции $e^{-\tau_*s}$ имеет вид $\delta(\tau - \tau_*)$, где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака.

Определение оригиналов $u_0(r, \tau)$ и $e_0(r, \tau)$ предлагается проводить по формулам (7) и (8) с помощью модифицированного алгоритма численного обращения преобразования Лапласа, который излагается далее. При $m \geq 1$ в отличие от [6], предварительно определяя с помощью указанного алгоритма оригинал $G_r^L(r, \xi, s)$ по формулам (13) и (15), функции $u_m(r, \tau)$ и $e_m(r, \tau)$ находим, используя численное интегрирование в равенствах (16) и (17).

3. Алгоритм решения задачи

Для численного обращения преобразования Лапласа используем формулу быстрого преобразования Фурье [8]:

$$f(\tau) = \frac{2}{\pi} e^{\sigma\tau} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [f^L(\sigma + i\omega)] \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (18)$$

где $\sigma > 0$ – произвольный вещественный параметр, который должен принадлежать области аналитичности функции f^L .

В стандартных программах численного обращения преобразования Лапласа, для интегрирования используются методы трапеций или прямоугольников, имеющие недостаточную скорость сходимости. В отличие от них воспользуемся средствами широко распространенного пакета Maple. Такой подход представляется рациональным в смысле того, что эти алгоритмы имеют процедуры анализа подынтегральной функции, и в зависимости от ситуации выбирают наиболее подходящий метод с учетом контроля размера шага, сильной осцилляции, наличия особенностей и др. При этом формула (18) заменяется приближенным аналогом

$$f(\tau) \approx \frac{2}{\pi} e^{\sigma\tau} \int_0^{\Omega} \operatorname{Re} [f^L(\sigma + i\omega)] \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (19)$$

где Ω – достаточно большое положительное число.

Следует отметить, что точность всех без исключения алгоритмов численного обращения, основанных на приближенном вычислении интеграла (19), существенно зависит от значения параметра σ . Единых рекомендаций по его выбору не существует, так как численное обращение преобразования Лапласа является некорректной задачей. Поэтому на практике предварительно проводится подбор значения параметра σ , обеспечивающего сходимость по числу шагов разбиения промежутка интегрирования и по значению Ω .

При использовании встроенных алгоритмов Maple предлагается сводить эту процедуру к двум этапам. Первый из них состоит в подборе такого значения параметра σ , при котором с увеличением Ω в два раза относительная погрешность результатов, полученных по формуле (19) составляет менее 5%, что обеспечивает сходимость алгоритма. Кроме того, результаты должны изменяться мало при малом изменении параметра σ , что обеспечивает практическую устойчивость алгоритма по Ляпунову. Поэтому на втором этапе проводится проверка устойчивости по этому практическому критерию. Полученные значения σ и Ω проверяются на тестовых примерах численного обращения изображений функций, оригиналы которых известны.

В основе решения задачи лежат формулы (16) и (17). Алгоритм решения задачи состоит из следующих шагов.

А) Численное вычисление значений ядра $G_r(r, \xi, \tau)$. Организуем массив $G_{ilq} = G_r(r_i, \xi_l, \tau_q)$ следующим образом. Определяем множества значений переменных r, ξ, τ : $A_r = \{r : r \in [1, r_1]\}$, $A_\xi = \{\xi : \xi \in [1, r_1]\}$, $A_\tau = \{\tau : \tau \in [0, T]\}$, где T – конечный момент времени. Затем строим конечные аналоги введенных бесконечных множеств. Для этого фиксируем два натуральных числа n_r, n_τ и представляем множества A_r, A_ξ в виде $(n_r - 1)$, а A_τ – в виде $n_\tau - 1$ непересекающихся отрезков равной длины. В результате получаем n_r точек множеств A_r, A_ξ и n_τ точек множества A_τ (границ отрезков). Эти множества принимаем за конечные аналоги множеств A_r, A_ξ, A_τ и оставляем за ними те же обозначения.

На них определим значения ядра (массив $\mathbf{G} = (G_{ilq})_{n_r \times n_\xi \times n_\tau}$, $n_r = n_\xi$). Структура массива G представляет собой прямоугольную матрицу $\mathbf{M} = (M_{ilq})_{n_r \times n_\tau}$, каждый элемент которой является вектором $M_{ilq} = \{G_r(r_i, \xi_l, \tau_q) : l = 1, 2, \dots, n_\xi\}$ значений $G_r(r_i, \xi, \tau_q)$ на множестве A_ξ . Далее задаем шаги изменений пространственных и временной переменной $\delta_r = \delta_\xi = (r_1 - 1)/n_r$, $\delta_\tau = T/n_\tau$ и дискретные значения переменных

$$r_i = 1 + (i - 1) \delta_r, \quad \xi_l = r_0 + (l - 1) \delta_\xi, \\ \tau_q = (q - 1) \delta_\tau \quad (i, l = 1, 2, \dots, n_r + 1, \quad q = 1, 2, \dots, n_\tau + 1).$$

Б) Вычисление $u_0(r, \tau)$ и $e_0(r, \tau)$. Используя формулы (7), (8) для изображений и описанный выше алгоритм, организовываем две прямоугольные матрицы

$$\mathbf{u}_0 = (u_{0iq})_{n_r \times n_\tau}, \quad \mathbf{e}_0 = (e_{0iq})_{n_r \times n_\tau}, \quad u_{0iq} = u_0(r_i, \tau_q), \quad e_{0iq} = e_0(r_i, \tau_q).$$

В) Вычисление интеграла I_{2m} в (17). С этой целью во втором слагаемом в формуле (17) сначала формируем вектор $\mathbf{E}_0 = (E_{0l})_{n_\xi \times 1}$, $E_{0l} = E_0(\xi_l)$. Как видно из выражения для $g_{m-1}(r, \xi, \tau)$, которое переписываем так:

$$g_{m-1}(r, \xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 (-1)^k \{H(\xi - r) H[\tau - \tau_{1nk}(r, \xi)] e_{m-1}[\xi, \tau - \tau_{1nk}(r, \xi)] + \\ + H(r - \xi) H[\tau - \tau_{2nk}(r, \xi)] e_{m-1}[\xi, \tau - \tau_{2nk}(r, \xi)]\}, \quad (20)$$

понадобятся значения функции $e_{m-1}(\xi, \tau)$ в дискретных точках, сдвинутых во времени на величины $\tau_{1nk}(r, \xi)$ или $\tau_{2nk}(r, \xi)$.

Кроме того, для обеспечения быстрого счета желательно обладать наборами значений $e_{m-1}[\xi, \tau - \tau_{jnk}(r, \xi)]$ ($j = 1, 2$), организованными в виде векторов той же размерности, что и \mathbf{E}_0 . Для этого поступим следующим образом. Во-первых, исходя из структуры слагаемых в (20), само это выражение будет содержать лишь конечное число слагаемых при любых r, ξ, τ . Поэтому перепишем (20) следующим образом:

$$g_{m-1}(r, \xi, \tau) = \sum_{k=1}^4 \sum_{n=0}^{N_{1k}} (-1)^k \{H(\xi - r) e_{m-1}[\xi, \tau - \tau_{1nk}(r, \xi)]\} + \\ + \sum_{k=1}^4 \sum_{n=0}^{N_{2k}} (-1)^k \{H(r - \xi) e_{m-1}[\xi, \tau - \tau_{2nk}(r, \xi)]\}. \quad (21)$$

Номера N_{jk} здесь определяются из решения неравенств

$$\sup_{r, \xi \in [1, r_1], \tau \in [0, T]} [\tau - \tau_{jnk}(r, \xi)] > 0$$

относительно номера n .

Например, для N_{11} с учетом (12) получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \sup_{r, \xi \in [1, r_1], \tau \in [0, T]} [\tau - \tau_{1n1}(r, \xi)] = \\ & = \sup_{r, \xi \in [1, r_1], \tau \in [0, T]} [\tau - 2(n+1)h + \xi - r] = T - 2nh - h > 0, \end{aligned}$$

из которого получаем, что $N_{11} = [(T-h)/(2h)]$. Здесь и далее функция $[x]$ означает целую часть числа x .

Аналогично находятся остальные числа N_{jk} :

$$N_{j2} = \left[\frac{T-2}{2h} \right], \quad N_{j3} = \left[\frac{T+2}{2h} \right], \quad N_{21} = N_{14} = \left[\frac{T+h}{2h} \right], \quad N_{24} = N_{11} = \left[\frac{T-h}{2h} \right].$$

Далее формируем восемь вспомогательных трехмерных массивов \mathbf{T}_{jk} ($j = 1, 2; k = \overline{1, 4}$) – прямоугольных матриц размерностей $n_r \times N_{jk}$, элементы которых являются векторами значений $\tau_{jnk}(r_i, \xi)$ на множестве A_ξ :

$$\mathbf{T}_{jk} = (\tau_{in})_{n_r \times N_{jk}}, \quad \tau_{in} = \{\tau_{jnk}(r_i, \xi_l) : l = 1, 2, \dots, n_\xi + 1\}.$$

Используя эти массивы, организуем восемь трехмерных массивов размерности $n_r \times N_{jk} \times n_\tau$, каждый элемент которых является вектором индексов $\mathbf{i}_{jnk} = (i_{jnk}^l)_{n_\xi \times 1}$ размерности n_ξ :

$$i_{jnk}^l = i - [\tau_{jnk}(r_i, \xi_l)/\delta_\tau], \quad \mathbf{i}_{jnk} = \mathbf{i} - [\tau_{in}/\delta_\tau], \quad \mathbf{i} = \{i\}_{n_\xi \times 1}.$$

По матрице $\mathbf{e}_{m-1} = (e_{m-1, iq})_{n_r \times n_\tau}$, $e_{m-1, iq} = e_{m-1}(r_i, \tau_q)$ для каждой тройки значений (r_i, n, τ_q) формируем вектор $\tilde{\mathbf{e}}_{jnk} = (\tilde{e}_{jkn}^l)_{n_\xi \times 1}$, элементы которого являются элементами матрицы \mathbf{e}_{m-1} с индексами (l, i_{jnk}^l) . При этом, если $i_{jnk}^l < 0$, то $\tilde{e}_{jkn}^l = 0$. Затем формируем вектор

$$\hat{\mathbf{e}} = (\hat{e}_l)_{n_\xi \times 1}, \quad \hat{e}_l = \sum_{k=1}^4 \sum_{n=0}^{N_{1k}} (-1)^k H(\xi_l - r_i) \tilde{e}_{1kn}^l + \sum_{k=1}^4 \sum_{n=0}^{N_{2k}} (-1)^k H(r_i - \xi_l) \tilde{e}_{2kn}^l.$$

Окончательно для приближенного вычисления интеграла I_{2m} используем метод прямоугольников: $I_{2m}(r_i, \tau_q) \approx \delta_\xi(\mathbf{E}_0, \hat{\mathbf{e}})$.

Г) Вычисление интеграла I_{1m} в (17). По указанной выше матрице \mathbf{e}_{m-1} формируем матрицу $\tilde{\mathbf{e}}_{m-1} = (\tilde{e}_{m-1, iq})_{n_r \times n_\tau}$, $\tilde{e}_{m-1, iq} = e_{m-1, i, n_\tau - q}$, которая получается из матрицы \mathbf{e}_{m-1} путем перестановки столбцов: первый столбец становится последним, второй – предпоследним и т.д.

Затем для каждой пары значений (r_i, τ_q) формируем две матрицы $\mathbf{M}_q^i = (M_{lp}^i)_{n_\xi \times q}$, $\tilde{\mathbf{e}}_{m-1} = (\tilde{e}_{m-1, lp})_{n_\xi \times q}$, где \mathbf{M}_q^i составлена из первых q элементов

(векторов) строки с номером i матрицы \mathbf{M} , а $\widehat{\mathbf{e}}_{m-1}$ образована из последних q столбцов матрицы $\widetilde{\mathbf{e}}_{m-1}$ с последующим транспонированием. В результате для свертки по времени используется метод прямоугольников:

$$\mathbf{I}_{1s} = \int_0^{\tau_{i\tau}} G_r(r, \xi, t) \mathbf{e}_{m-1}(\xi, \tau - t) dt \approx \delta_\tau \mathbf{diag} \left(\mathbf{M}_q^i, \widehat{\mathbf{e}}_{m-1} \right),$$

где $\mathbf{diag}(\mathbf{A})$ – вектор размерностью $n_\xi \times 1$, составленный из диагональных элементов матрицы \mathbf{A} .

Окончательно приходим к следующему равенству: $I_{1m}(r_i, \tau_q) \approx \delta_\xi(\mathbf{E}_0, \mathbf{I}_{1s})$.

Д) Формирование матриц \mathbf{e}_m и \mathbf{u}_m . После вычисления интегралов $I_{1m}(r_i, \tau_q)$, $I_{2m}(r_i, \tau_q)$ на множестве $A_r \times A_\tau$ с помощью формулы (17) формируем матрицу $(\mathbf{u}_m)_{n_r \times n_\tau}$. С этой целью сначала строим вектор $\rho_{e0} = (\rho_{e0,i})_{n_r \times 1}$, $\rho_{e0,i} = \rho_{e0}(r_i)$.

Для вычисления свертки в (16) организовываем вектор $\mathbf{e}_\gamma = (e_{\gamma,p})_{q \times 1}$, $e_{\gamma,p} = -\gamma e^{-\gamma(q-p)\delta_\tau}$ и методом прямоугольников при каждом значении τ_q численно находим свертку сразу для всех значений r_i , $i = 1, 2, \dots, n_r + 1$:

$$-\gamma u_m(\mathbf{r}, \tau_q) * e^{-\gamma \tau_q} \approx \delta_\tau(\mathbf{u}_m, \mathbf{e}_\gamma).$$

Проходя все значения τ_q , формируем массив $(\mathbf{u}_m)_{n_r \times n_\tau}$, аппроксимирующий функцию $-\gamma u_m(r, \tau) * e^{-\gamma \tau}$ на множестве $A_r \times A_\tau$.

Затем формируем матрицу \mathbf{e}_m следующим образом. Каждая ее строка является произведением строки матрицы $\mathbf{u}_m + \mathbf{u}_m$ на элемент вектора ρ_{e0} , взятый с обратным знаком и с номером, равным номеру строки.

4. Примеры расчетов

Аналогично [6] рассмотрим алюминиевую сферу с внутренним радиусом $r_0 = 1$ м и внешним радиусом $r_1 = 2$ м при $E_* = 1$ в/м, что соответствует следующим безразмерным параметрам: $\alpha = 0,5$; $\gamma = 0,566$.

Начальные характеристики электромагнитного поля и возмущение на внутренней поверхности принимаются таковыми:

$$\rho_{e0}(r) = \frac{2}{\sqrt{r}}, \quad E_0 = \sqrt{r}, \quad U_0(\tau) = H(\tau)$$

что соответствует изображению $U_0^L(s) = s^{-1}$. Граница временного интервала T принималась равной 5. Число шагов по пространственной переменной и по времени выбиралось так: $n_r = n_\xi = 25$, $n_\tau = 50$

На Рис. 1 представлены зависимости регулярной части ядра $G_r(r, \xi, \tau)$ от времени при различных значениях переменных r, ξ . Сплошная кривая соответствует значениям $r = 1.5$, $\xi = 2$; штриховая - $r = 1.2$, $\xi = 1.8$; штрихпунктирная - $r = 1.5$, $\xi = 1.7$

На рис 2 изображены зависимости этой функции от переменной ξ при различных значениях переменных r, τ . Сплошная кривая соответствует значениям $r = 1.5$, $\tau = 1$; штриховая - $r = 1.5$, $\tau = 2$; штрихпунктирная - $r = 1.5$, $\tau = 3$.

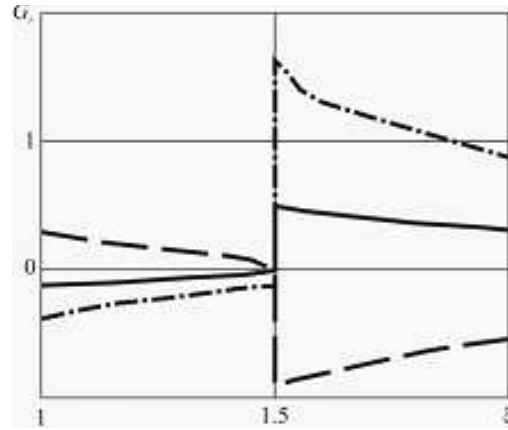


Рис. 1: Зависимость G_r от времени

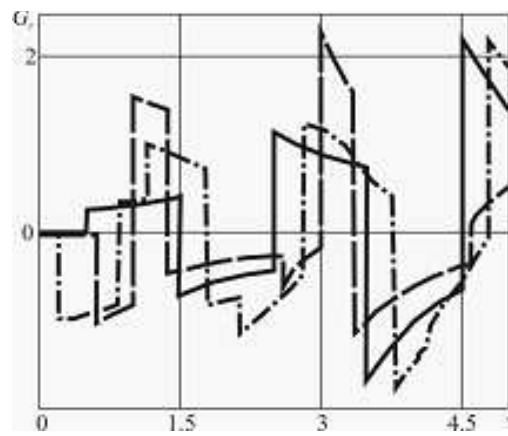


Рис. 2: Зависимость G_r от переменного ξ

На Рис. 3 и 4 представлены распределения перемещений и напряженности электрического поля по координате r в различные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют учету шести первых членов ряда разложений (6), а штриховые – нулевым членам $u_0(r, \tau)$ и $e_0(r, \tau)$.

Отметим, что результаты, полученные с учетом только нулевых членов рядов, соответствуют несвязанной задаче электромагнитоупругости. При этом на Рис. 3 в момент времени $\tau = 0.7$ наблюдается следующий эффект: в случае несвязанной задачи перемещения перед фронтом волны, находящимся в этот момент в точке $r = 1.7$ отсутствуют, в то время как в случае связанной задачи они не равны нулю. Это объясняется индуцированием их электромагнитным полем. Кроме того следует отметить существенное количественное различие результатов для связанной и несвязанной задач.

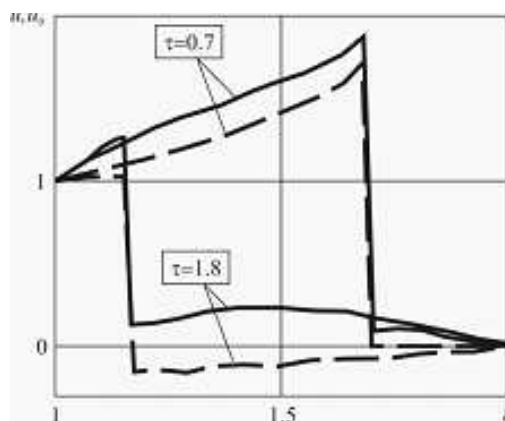


Рис. 3: Распределение перемещений по координате r

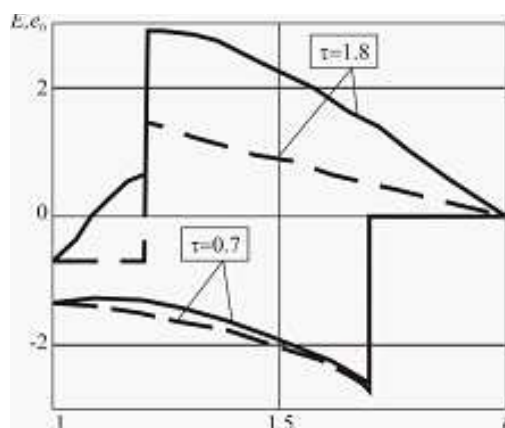


Рис. 4: Распределение напряженности электрического поля по координате r

На рисунках 5 и 6 представлены зависимости перемещений и напряженности электрического поля от времени в точке с координатой $r = 1.5$. Здесь сплошные и

штриховые линии имеют тот же смысл, что и на предыдущих двух рисунках.

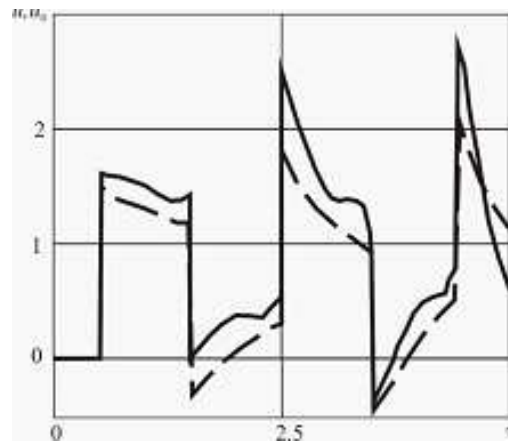


Рис. 5: Зависимости перемещений от времени (связанная и несвязанная задачи)

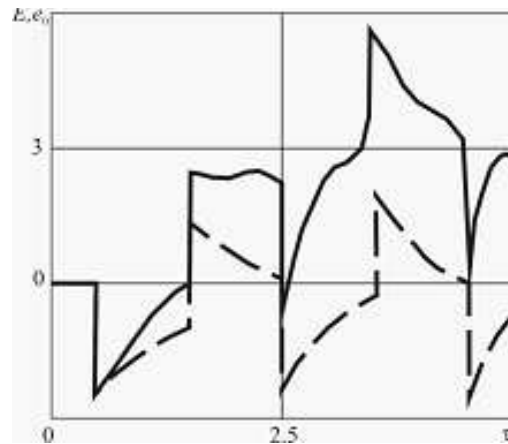


Рис. 6: Зависимости напряженности электрического поля от времени (связанная и несвязанная задачи)

Сходимость рядов разложений (6) проиллюстрирована на рисунках 7 и 8. Здесь изображены распределения перемещений и напряженности электрического поля по координате r в момент времени $\tau = 3.5$. Кривые с номером 0 соответствуют учету только нулевых членов рядов (6), с номером 1 – нулевых и первых членов, а с номером 2 – нулевых, первых и вторых членов и т.д. Видно, что кривые, построенные при учете пяти и шести членов рядов практически не отличаются.

Заключение

Таким образом, продемонстрирована эффективность построенного модифицированного алгоритма численного обращения преобразования Лапласа для реше-

ния нестационарных задач даже в случае наличия в решении разрывов первого рода. Наибольшее преимущество по сравнению с аналитическими методами такой подход может дать при решении соответствующих многомерных задач.

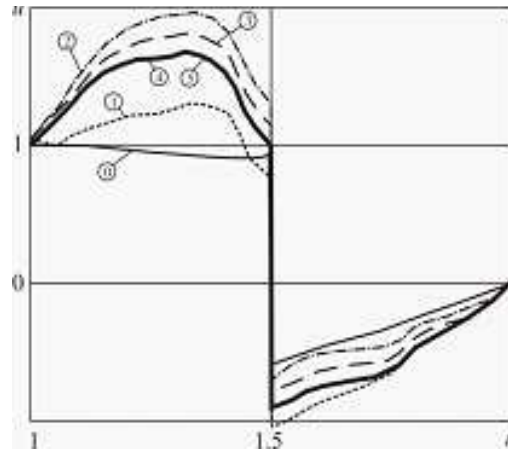


Рис. 7: Распределение перемещений по координате r (анализ сходимости)

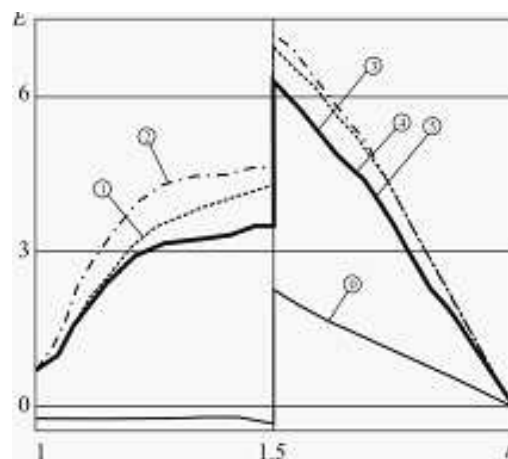


Рис. 8: Распределение напряженности электрического поля по координате r (анализ сходимости)

Список литературы

- [1] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
- [2] Седов Л.И. Механика сплошной среды. В 2-х т. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973.

- [3] Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Линейные уравнения движения термоэлектромагнитоупругой среды // Методы розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць Дніпропетр. націон. ун-та. Дніпропетровськ: ІМА-прес. 2009. Вип. 10. С. 57–62.
- [4] Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве или слое // Доклады РАН. 2009. Т. 426, №6. С. 747–749.
- [5] Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных радиальных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве // Доклады РАН. 2010. Т. 434, №2. С. 186–188.
- [6] Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. №4. С. 16–21.
- [7] Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Двумерные нестационарные волны в электромагнитоупругой полуограниченной среде // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. №4-4. С. 1423–1424.
- [8] Abate J. Numerical inversion of Laplace transforms of probability distributions // ORSA Journal on computing. 1995. Vol. 7, №1. Pp. 36–43.

Библиографическая ссылка

Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Исследование нестационарных радиальных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферы с помощью численного обращения преобразования Лапласа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 51–64.

Сведения об авторах

1. Вестяк Владимир Анатольевич

заведующий кафедрой Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

*Россия, 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, каф. 311.
E-mail: v.a.vestyak@mail.ru.*

2. Тарлаковский Дмитрий Валентинович

заведующий лабораторией института механики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119192, г. Москва, Мичуринский просп., д. 1, НИИ механики МГУ, ком. 202. E-mail: tdvhome@mail.ru.

**RESEARCH OF NON-STATIONARY RADIAL VIBRATIONS OF THE
ELECTROMAGNETOELASTIC THICK-WALLED SPHERE
BY MEANS OF THE NUMERICAL INVERSION OF LAPLACE
TRANSFORM**

Vestyak Vladimir Anatol'evich

Head of Department, Moscow Aviation institute (National Research university)
Russia, 125993, Moscow, A-80, GSP-3, 4 Volokolamskoe highway
E-mail: v.a.vestyak@mail.ru

Tarlakovskiy Dmitriy Valentinovich

Head of Laboratory in Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University
Russia, 119192, Moscow, 1 Michurinsky av., Research Institute of Mechanics of
Lomonosov Moscow State university. E-mail: tdvhome@mail.ru

Received 19.01.2014, revised 15.03.2014.

The problem of the non-stationary radial vibrations of the electromagnetoelastic sphere is considered. It is supposed that the electromagnetic field in the medium is initiated mechanical field by means of the generalized Ohm's law. To solve the problem, the decomposition in power series of the unknown quantities in accordance with the small parameter which connects the mechanical and electric weeding is used. It is shown that coefficients of ranks in space of the Laplace transform are represented in the form of convolutions with kernels of a special form. Moreover, their originals have singular features. For overcoming the difficulties when finding originals, the analytical approach and the modified algorithm of the numerical inversion of the Laplace transform, which uses a formula of the fast Fourier transform, is offered. The results of the calculations are given for both non-coupled and coupled problems.

Keywords: non-stationary electromagnetoelasticity, inversion of Laplace transform, thick-walled sphere, method of small parameter.

Bibliographic citation

Vestyak V.A., Tarlakovskiy D.V. Research of non-stationary radial vibrations of the electromagnetoelastic thick-walled sphere by means of the numerical inversion of Laplace transform. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 1, pp. 51–64. (in Russian)