

ВЕРОЯТНОСТНО-ВОЗМОЖНОСТНЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

УДК 519.2

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ ОДНОМЕРНЫХ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СХОДЯЩИХСЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ

Алексеева А.Е.

Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 16.05.2014, после переработки 05.06.2014.

В статье предлагается алгоритм вычисления значений функций плотности одномерных устойчивых распределений с помощью сходящихся и асимптотических рядов при $\alpha \neq 1$, $\beta \neq \pm 1$. Определяются интервалы применимости рядов и точность их вычисления в зависимости от типа используемых программных переменных. Для уменьшения вычислительной погрешности используется арифметика произвольной точности.

Ключевые слова: устойчивые распределения, аппроксимация плотности, сходящиеся и асимптотические ряды, арифметика произвольной точности.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 47-65.

Введение

Устойчивые вероятностные законы представляют собой широкий класс распределений, используемых для описания различных физических и экономических процессов. Область применения устойчивых законов обширна: теория вероятностей, физика, радиотехника, астрономия, экономика и др.

В качестве определения этого семейства используется свойство устойчивости (см., например, [1]): распределение случайных величин $X_1 \stackrel{d}{=} X_2 \stackrel{d}{=} X_3 \stackrel{d}{\neq} \text{const}$ принадлежит семейству устойчивых распределений тогда и только тогда, когда для любых положительных чисел b_1, b_2 найдутся положительное b и вещественное a , такие, что

$$b_1 X_1 + b_2 X_2 \stackrel{d}{=} b X_3 + a.$$

Одной из особенностей рассматриваемого семейства является отсутствие в общем случае простого аналитического выражения для функций распределения и плотности, поэтому для описания устойчивых законов используют характеристические функции. При этом существует множество различных параметризаций этих функций (см., например, [1], [10]).

В.М. Золотарев в [1] для описания устойчивых законов использует 4 параметра: параметр устойчивости $\alpha \in (0, 2]$, параметр асимметрии $\beta \in [-1, 1]$, параметр сдвига $\gamma \in (-\infty, +\infty)$, параметр масштаба $\lambda > 0$.

В соответствии с параметризацией (А) характеристическая функция устойчивых распределений $\varphi(t)$ представима в виде:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp \lambda \left(it\gamma - |t|^\alpha + it|t|^{\alpha-1} \beta \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right) \right), & \alpha \neq 1; \\ \exp \lambda \left(it\gamma - |t| - it\beta \frac{2}{\pi} \ln |t| \right), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Однако характеристические функции, задаваемые данным соотношением, не являются непрерывными функциями определяющих их параметров, поскольку они имеют разрывы во всех точках вида $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$. Для устранения этого недостатка форма (А) модифицируется в форму (М), непрерывную по всем параметрам:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp \lambda \left(it\gamma - |t|^\alpha + it(|t|^{\alpha-1} - 1) \beta \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \alpha \right) \right), & \alpha \neq 1; \\ \exp \lambda \left(it\gamma - |t| - it\beta \frac{2}{\pi} \ln |t| \right), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Помимо этого, для удобного представления некоторых аналитических результатов часто используется форма параметризации (В):

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp \lambda \left(it\gamma - |t|^\alpha \exp \left(-i\beta \frac{\pi}{2} K(\alpha) \operatorname{sign}(t) \right) \right), & \alpha \neq 1; \\ \exp \lambda \left(it\gamma - |t| \frac{\pi}{2} - i|t|\beta \ln |t| \operatorname{sign}(t) \right), & \alpha = 1, \end{cases}$$

где $K(\alpha) = \alpha - 1 + \operatorname{sign}(1 - \alpha)$.

Выбор варианта параметризации осуществляется в зависимости от решаемых задач с целью наиболее простого получения и удобного представления результатов. Значение параметров в различных формах связаны между собой формулами перехода (см. [1]). Далее будем использовать форму (В) как наиболее подходящую с аналитической точки зрения.

Достаточно простое выражение характеристических функций позволяет получить некоторые свойства, благодаря которым можно без потери общности переходить к рассмотрению лишь стандартных устойчивых законов, т.е. распределений с параметрами $\gamma = 0$, $\lambda = 1$. Связь между устойчивыми случайными величинами Y и Y' с параметрами $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ и $\alpha, \beta, 0, 1$ соответственно в форме (В) имеет следующий вид:

$$Y \stackrel{d}{=} aY' + \lambda b,$$

где

$$a = \lambda^{1/\alpha},$$

$$b = \begin{cases} \gamma, & \alpha \neq 1; \\ \gamma + \beta \ln \lambda, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Отсутствие явной аналитической формулы для функции плотности в общем случае является основной сложностью при использовании устойчивых распределений. Поэтому возникает необходимость разработки численных методов, позволяющих находить приближенные значения функции плотности данного семейства.

1. О методах вычисления плотности устойчивых распределений

Плотность вероятности $g(x)$ выражается с помощью характеристической функции $\varphi(t)$ по формуле обращения:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt. \quad (1)$$

Получить выражение плотности устойчивых законов $g(x; \alpha, \beta)$ в явном виде прямым вычислением соответствующих интегралов можно только в четырех частных случаях:

1) распределение Леви:

$$g(x; \frac{1}{2}, 1) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0; \end{cases} \quad (2)$$

2) распределение Коши: $g(x; 1, 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} + x^2\right)^{-1}$;

3) распределение Гаусса (с дисперсией $\sigma^2 = 2$): $g(x; 2, \beta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$;

4) симметричное отражение распределения Леви: $g(x; \frac{1}{2}, -1) = g(-x; \frac{1}{2}, 1)$.

В остальных случаях возникает необходимость использования численных методов для нахождения приближенных значений функции плотности. Рассмотрим алгоритмы и методы, разработанные к настоящему времени.

Алгоритмы вычисления плотности, основанные на прямом численном интегрировании формулы обращения (1) (см., например, Holt and Crow [6]) являются неэффективными, требуют большого объема вычислений и временных затрат. В [8] J.P. Nolan, используя параметризацию (M), получил другое представление формулы обращения (1):

$$g(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(h(x, t; \alpha, \beta)) \exp(-t^\alpha) dt, \quad (3)$$

где

$$h(x, t; \alpha, \beta) = \begin{cases} xt + \beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} (t - t^\alpha), & \alpha \neq 1; \\ xt + \beta \frac{2}{\pi} t \ln |t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Для вычисления значения интеграла (3) область интегрирования разбивается на интервалы, на которых косинус не меняет знак, границы интервалов определяются аналитически при $\beta = 0$ или приближенно в остальных случаях, после чего численно найденные значения интеграла на каждом интервале суммируются. Данный подход дает хорошие результаты при небольших значениях $|x|$ и при $\alpha > 0.9$.

Для устранения отмеченных ограничений Nolan в [9] предлагает использовать формулу интегрального представления Золотарева (см. [1]), полученную для параметризации (M).

Пусть

$$\zeta \equiv \zeta(\alpha, \beta) = \begin{cases} -\beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2), & \alpha \neq 1; \\ 0, & \alpha = 1; \end{cases}$$

$$\theta_0 \equiv \theta_0(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1/\alpha \cdot \operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg}(\pi\alpha/2)), & \alpha \neq 1; \\ \pi/2, & \alpha = 1; \end{cases}$$

$$V(\theta; \alpha, \beta) = \begin{cases} (\cos \alpha\theta_0)^{1/(\alpha-1)} \cdot \left(\frac{\cos \theta}{\sin \alpha(\theta_0 + \theta)} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} \cdot \frac{\cos(\alpha\theta_0 + (\alpha-1)\theta)}{\cos \theta}, & \alpha \neq 1; \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi/2 + \beta\theta}{\cos \theta} \right) \exp \left(\frac{1}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} + \beta\theta \right) \operatorname{tg} \theta \right), & \alpha = 1, \beta \neq 0. \end{cases}$$

Тогда функция плотности устойчивых распределений представима в следующем виде:

- при $\alpha \neq 1$, $x > \zeta$

$$g(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha(x - \zeta)^{1/(\alpha-1)}}{\pi|\alpha - 1|} \int_{-\theta_0}^{\pi/2} V(\theta; \alpha, \beta) \exp(-(x - \zeta)^{\alpha/(\alpha-1)} V(\theta; \alpha, \beta)) d\theta;$$

- при $\alpha \neq 1$, $x = \zeta$

$$g(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(1 + 1/\alpha) \cos \theta_0}{\pi(1 + \zeta^2)^{1/(2\alpha)}};$$

- при $\alpha \neq 1$, $x < \zeta$

$$g(x; \alpha, \beta) = g(-x; \alpha, -\beta);$$

- при $\alpha = 1$

$$g(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2|\beta|} e^{-\pi x/(2\beta)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V(\theta; 1, \beta) \exp(e^{-\pi x/(2\beta)} V(\theta; 1, \beta)) d\theta, & \beta \neq 0; \\ \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, & \beta = 0. \end{cases}$$

Значения плотности находятся путем приближенного вычисления соответствующих интегралов.

В [7] Chenyao, Mitnik и Doganoglu разработали алгоритм вычисления плотности устойчивых распределений с использованием быстрого преобразования Фурье. Для этого интеграл (1) вычисляется для N точек, находящихся друг от друга на расстоянии h , $x_k = (k - 1 - N/2)h$, $k = 1, \dots, N$. Полагая $t = 2\pi\omega$, получаем:

$$g((k - 1 - N/2)h) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi\omega) e^{-i2\pi\omega(k-1-N/2)h} d\omega.$$

Данный интеграл может быть вычислен с помощью метода прямоугольников для N точек с шагом $s = \frac{1}{hN}$:

$$g((k - 1 - N/2)h) \approx s(-1)^{k-1-N/2} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \varphi(2\pi s(n-1-N/2)) e^{-i2\pi(n-1)(k-1)/N}.$$

Таким образом, процедура вычисления плотности состоит из двух шагов: сначала определяется конечный набор точек, в которых рассчитываются значения плотности, затем для промежуточных точек применяется линейная интерполяция.

И.А. Belov в [5] описывает метод двух квадратур для вычисления плотности устойчивых распределений. Он предлагает использовать 96-точечную квадратуру Лагерра для нахождения приближенного значения интеграла (3):

$$g(x; \alpha, \beta) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{96} w_n \exp(t_n - t_n^\alpha) \cos(xt_n + \beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}(t_n - t_n^\alpha)),$$

где t_n — корень полинома Лагерра $L_{96}(t)$, $w_n = \frac{t_n}{(97L_{97}(t_n))^2}$.

Поскольку при больших значениях $|x|$ точность вычислений ухудшается из-за быстрых колебаний квадратуры Лагерра, предлагается «подавить» их за счет понижения степени экспоненты в подынтегральном выражении путем сдвига:

$$g(x; \alpha, \beta) = \int_0^d f(x, t; \alpha, \beta) dt + \int_0^\infty f(x, u + d; \alpha, \beta) du,$$

где

$$f(x, t; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \exp(-t^\alpha) \cos(xt + \beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}(t - t^\alpha)).$$

Тогда первый интеграл вычисляется с помощью 96-точечной квадратуры Гаусса, а второй — 96-точечной квадратуры Лагерра.

2. Представление функции плотности сходящимися и асимптотическими рядами

Рассмотренные выше методы вычисления плотности устойчивых распределений заключаются в численном интегрировании различных представлений формулы обращения. Другой подход основан на представлении функции плотности асимптотическими и сходящимися рядами.

При изучении поведения функции плотности устойчивых законов $g(x; \alpha, \beta)$ полезным является следующее свойство:

$$g(x; \alpha, \beta) = g(-x; \alpha, -\beta). \quad (4)$$

Оно позволяет рассматривать устойчивые распределения при дополнительном условии сохранения знака аргументом x или параметром β .

В [1] В.М. Золотарев провел исследование аналитической структуры устойчивых распределений и получил следующие представления плотности $g(x; \alpha, \beta)$ сходящимися рядами, используя параметризацию (B):

- если $\alpha \in (1, 2)$, то для любых допустимых β и любых вещественных x

$$g(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n/\alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} \sin(\pi n \rho) x^{n-1}; \quad (5)$$

- если $\alpha \in (0, 1)$, то для любых допустимых β и любых $x > 0$

$$g(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n\alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} \sin(\pi n \rho \alpha) x^{-n\alpha - 1}; \quad (6)$$

- если $\alpha = 1$, $\beta > 0$, то для любых вещественных x

$$g(x; 1, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n b_n x^{n-1}; \quad (7)$$

где $\rho = \frac{\alpha + \beta K(\alpha)}{2\alpha}$, $b_n = \frac{1}{\Gamma(n + 1)} \int_0^{\infty} \exp(-\beta u \ln u) u^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 + \beta)u\right) du$.

Равенства (5)–(6), в отличие от (7), содержат явные выражения коэффициентов в правой части, что позволяет использовать их для вычисления плотности устойчивых распределений при $\alpha \neq 1$. Однако они неприменимы для описания поведения функции $g(x; \alpha, \beta)$ в окрестности точки $x = 0$ при $\alpha < 1$ и в окрестности бесконечно удаленной точки при $\alpha > 1$, поскольку в комплексной плоскости эти точки являются особыми для функции плотности. Для устранения этой проблемы в [1] предлагаются асимптотические разложения функции $g(x; \alpha, \beta)$ в окрестностях соответствующих особых точек. Учитывая свойство (4), разложения можно рассматривать лишь для $x > 0$. При этом виды асимптотических разложений значительно различаются в зависимости от значений параметров α и β .

В частности, если $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \neq 1$, то при $x \rightarrow 0$

$$g(x; \alpha, \beta) \sim \frac{1}{\pi \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma((n + 1)/\alpha)}{\Gamma(n + 1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(n + 1)(1 - \beta)\right) x^n, \quad (8)$$

если $\alpha \in (1, 2)$, $\beta \neq -1$, то при $x \rightarrow \infty$

$$g(x; \alpha, \beta) \sim \frac{\alpha}{\pi x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(n)} \sin\left(\frac{\pi}{2}n(2 - \alpha)(1 + \beta)\right) x^{-n\alpha}. \quad (9)$$

В [4] М. Teimouri и Н. Amindavar рассматривают задачу вычисления плотности устойчивых распределений с использованием рядов. Предлагаемый ими алгоритм позволяет находить значения плотности с высокой точностью для определенных интервалов значений аргумента x , которые, однако, не включают в себя все значения числовой прямой. Поэтому вопрос применения рядов для вычисления плотности устойчивых распределений требует более внимательного изучения.

3. Вычисление плотности устойчивых распределений с помощью рядов

3.1 Представление общего члена ряда в виде экспоненты

Рассмотрим случай вычисления плотности стандартных устойчивых распределений с использованием сходящихся и асимптотических рядов при $\alpha \neq 1$, $\beta \neq \pm 1$,

$x > 0$. Представим ряды (5), (6), (8), (9) в более общем виде, обозначив их следующим образом:

$$p_1(x; \alpha, \beta) := \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n/\alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} \sin\left(\frac{\pi n}{2} \frac{\alpha - \beta K(\alpha)}{\alpha}\right) x^{n-1}, \quad (10)$$

$$p_2(x; \alpha, \beta) := \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n\alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} \sin\left(\frac{\pi n}{2} (2 - \alpha - \beta K(\alpha))\right) x^{-n\alpha-1}. \quad (11)$$

Тогда ряд $p_1(x; \alpha, \beta)$ является сходящимся при $\alpha > 1$ и асимптотическим при $x \rightarrow 0, \alpha < 1$, ряд $p_2(x; \alpha, \beta)$ является сходящимся при $\alpha < 1$ и асимптотическим при $x \rightarrow \infty, \alpha > 1$, т. е.

при $\alpha < 1$:	при $\alpha > 1$:
$g(x; \alpha, \beta) \sim p_1(x; \alpha, \beta), \beta \neq 1, x \rightarrow 0;$	$g(x; \alpha, \beta) = p_1(x; \alpha, \beta), \forall \beta, \forall x;$
$g(x; \alpha, \beta) = p_2(x; \alpha, \beta), \forall \beta, x > 0;$	$g(x; \alpha, \beta) \sim p_2(x; \alpha, \beta), \beta \neq -1, x \rightarrow \infty.$

Таким образом, в случае $\alpha \neq 1, \beta \neq \pm 1$ будем использовать ряд $p_1(x; \alpha, \beta)$ для вычисления значений плотности в окрестности нуля, ряд $p_2(x; \alpha, \beta)$ — на бесконечности.

Как было замечено в [4], ряды (10) и (11) не позволяют находить значение плотности устойчивых распределений для всех значений числовой прямой, т. е. существует некоторый интервал I , на котором вычислительная погрешность обоих рядов существенно увеличивается (см. Рис. 1).

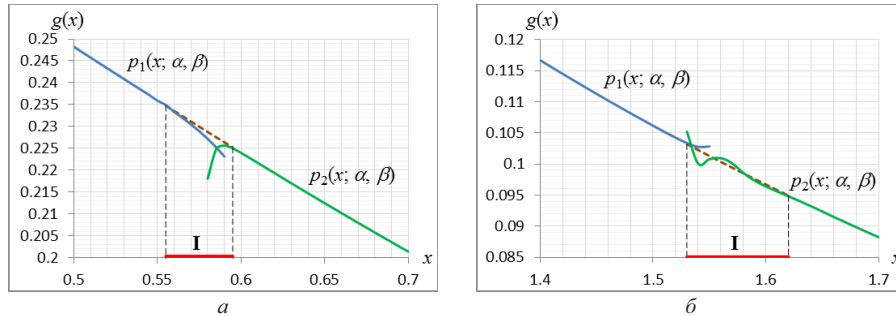


Рис. 1: Примеры вычисления плотности с помощью рядов $p_1(x; \alpha, \beta)$ и $p_2(x; \alpha, \beta)$: а) $\alpha = 0.9, \beta = 0$; б) $\alpha = 1.1, \beta = 0$

Для устранения указанного ограничения представим общий член ряда в виде экспоненты с использованием логарифмической гамма-функции $\ln \Gamma(u)$. Введем обозначения:

$$q_1(n; x, \alpha) := \ln \Gamma(n/\alpha + 1) - \ln \Gamma(n + 1) + (n - 1) \ln x,$$

$$q_2(n; x, \alpha) := \ln \Gamma(n\alpha + 1) - \ln \Gamma(n + 1) + (-n\alpha - 1) \ln x.$$

Тогда ряды (10) и (11) будут представимы в виде:

$$\tilde{p}_1(x; \alpha, \beta) := \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(q_1(n; x, \alpha)) \sin\left(\frac{\pi n}{2} \frac{\alpha - \beta K(\alpha)}{\alpha}\right),$$

$$\tilde{p}_2(x; \alpha, \beta) := \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(q_2(n; x, \alpha)) \sin\left(\frac{\pi n}{2}(2 - \alpha - \beta K(\alpha))\right).$$

Это позволяет увеличить область применимости сходящихся рядов, сокращая интервал I (см. Рис. 2). Далее рассмотрим вопрос определения интервалов применимости рядов более подробно.

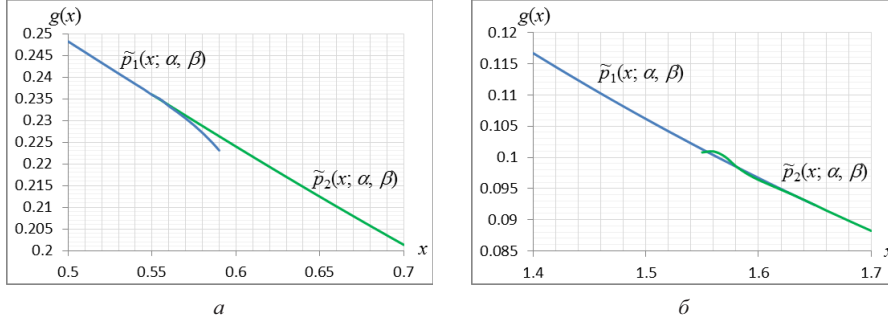


Рис. 2: Примеры вычисления плотности с помощью рядов $\tilde{p}_1(x; \alpha, \beta)$ и $\tilde{p}_2(x; \alpha, \beta)$: а) $\alpha = 0.9, \beta = 0$; б) $\alpha = 1.1, \beta = 0$

3.2 Определение интервалов применимости рядов

Отдельной проблемой при использовании рядов является нахождение границ их применимости, т.е. определение интервалов, на которых ряды $\tilde{p}_1(x; \alpha, \beta)$ и $\tilde{p}_2(x; \alpha, \beta)$ позволяют вычислять значение плотности с требуемой точностью.

Поскольку

$$\left| \frac{1}{\pi} \exp(q_1(n; x, \alpha)) \sin\left(\frac{\pi n}{2} \frac{\alpha - \beta K(\alpha)}{\alpha}\right) \right| \leq \exp(q_1(n; x, \alpha))$$

и

$$\left| \frac{1}{\pi} \exp(q_2(n; x, \alpha)) \sin\left(\frac{\pi n}{2} \frac{\alpha - \beta K(\alpha)}{\alpha}\right) \right| \leq \exp(q_2(n; x, \alpha)),$$

для изучения сходимости рядов $\tilde{p}_1(x; \alpha, \beta)$ и $\tilde{p}_2(x; \alpha, \beta)$ исследуем поведение рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(q_1(n; x, \alpha))$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(q_2(n; x, \alpha))$: согласно признаку сравнения из их абсолютной сходимости следует сходимость исходных рядов.

На Рис. 3 представлены графики функций $q_1(n; x, \alpha)$ и $q_2(n; x, \alpha)$ для различных значений x и параметра α . Заметим, что рассматриваемые функции выпуклы вниз, если ряды являются асимптотическими, и выпуклы вверх в случае сходящихся рядов. Точки экстремума $n_1^* \equiv n_1^*(x; \alpha)$ и $n_2^* \equiv n_2^*(x; \alpha)$ функций $q_1(n; x, \alpha)$ и $q_2(n; x, \alpha)$ соответственно определяются из следующих соотношений:

$$n_1^*(x; \alpha) = \left\{ n: \frac{1}{\alpha} \Psi\left(\frac{n}{\alpha}\right) - \Psi(n) + \ln x = 0 \right\},$$

$$n_2^*(x; \alpha) = \left\{ n: \alpha \Psi(n\alpha) - \Psi(n) - \alpha \ln x = 0 \right\},$$

где $\Psi(u)$ — дигамма-функция, $\Psi(u) = \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}$.

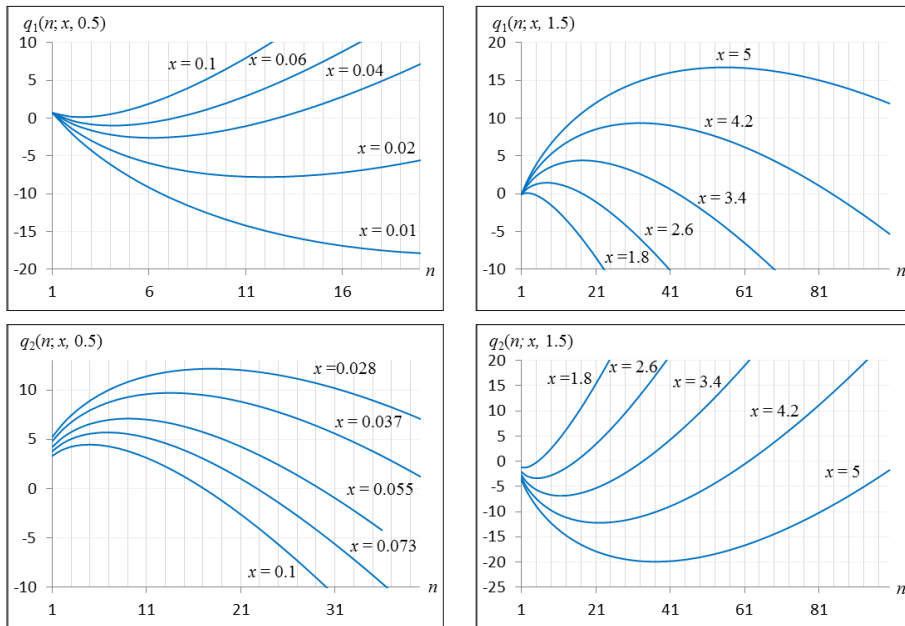


Рис. 3: Графики функций $q_1(n; x, \alpha)$ и $q_2(n; x, \alpha)$

В случае $\alpha < 1$ асимптотический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(q_1(n; x, \alpha))$ сходится при $n < n_1^*$, когда функция $q_1(n; x, \alpha)$ убывает. Чем дальше значение x от нуля, тем меньше n_1^* , и, следовательно, тем раньше функция $q_1(n; x, \alpha)$ начнет возрастать, а ряд расходиться. Поэтому существует некоторое значение $x_{гр}$, ограничивающее область применимости данного ряда справа, которое определяется минимальным значением общего члена: при $n = n_1^*$ должен достигаться заданный уровень точности вычисления асимптотического ряда $\varepsilon_{ас}$, т. е. $\exp(q_1(n_1^*(x; \alpha); x, \alpha)) < \varepsilon_{ас}$. Аналогично, при $\alpha > 1$ область применимости асимптотического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(q_2(n; x, \alpha))$ ограничена некоторым значением $x_{гр}$ слева. Следовательно, для вычисления плотности устойчивых распределений с заданной точностью $\varepsilon_{ас}$ при $\alpha < 1$ применим асимптотический ряд $\tilde{p}_1(x; \alpha, \beta)$ на интервале $(0, x_{гр})$, при $\alpha > 1$ — асимптотический ряд $\tilde{p}_2(x; \alpha, \beta)$ на интервале $(x_{гр}, \infty)$, где граничное значение $x_{гр} \equiv x_{гр}(\varepsilon_{ас}, \alpha)$ определяется по следующим формулам:

$$x_{гр}(\varepsilon_{ас}, \alpha) = \begin{cases} \{x: \ln \Gamma(n_1^*(x, \alpha)/\alpha) - \ln \Gamma(n_1^*(x, \alpha) + 1) + (n_1^*(x, \alpha) - 1) \ln x - \ln \varepsilon_{ас} = 0\}, & \alpha < 1; \\ \{x: \ln \Gamma(\alpha n_2^*(x, \alpha)) - \ln \Gamma(n_2^*(x, \alpha) + 1) + (-\alpha n_1^*(x, \alpha) - 1) \ln x - \ln \varepsilon_{ас} = 0\}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

На оставшейся части числовой прямой, т. е. на интервалах $[x_{гр}, \infty)$ при $\alpha < 1$ и $(0, x_{гр}]$ при $\alpha > 1$, плотность вычисляется с помощью сходящихся рядов.

3.3 Определение точности вычисления сходящихся рядов

Сходящиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(q_1(n; x, \alpha))$ при $\alpha > 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(q_2(n; x, \alpha))$ при $\alpha < 1$ ведут себя иначе: при приближении к $x = \infty$ в первом случае или к $x = 0$ во втором точность расчетов ухудшается из-за возникающих вычислительных сложностей, поскольку увеличивается максимальное значение показателя степени экспоненты $q_1(n_1^*(x; \alpha); x, \alpha)$ и $q_2(n_2^*(x; \alpha); x, \alpha)$.

При программной реализации вычислений используются переменные различного типа, которые позволяют хранить числа с ограниченной относительной точностью. Так, переменные типа `double`, предназначенные для хранения данных в формате чисел с плавающей запятой, обеспечивают точность около $\lg(2^{53}) \approx 15.955$ цифр. При возведении экспоненты в высокую степень возникает необходимость хранения больших чисел, что приводит к существенной потере точности.

Найдем оценку погрешности $\varepsilon_{\text{сх}}$ при вычислении плотности с использованием сходящихся рядов. Пусть a — некоторая величина, а \tilde{a} — ее значение, вычисленное с точностью до d цифр, где d зависит от типа используемых переменных, т. е. $a = \tilde{a} \pm \Delta$, где Δ — абсолютная вычислительная погрешность. Поскольку количество цифр дробной части числа \tilde{a} равно $d - \lfloor \lg |\tilde{a}| \rfloor - 1$, то $\Delta \leq \Delta^*$, где $\Delta^* = 10^{-(d - \lfloor \lg |\tilde{a}| \rfloor - 1)}$.

При возведении экспоненты в степень a получаемая вычислительная погрешность имеет следующую оценку:

$$|e^{\tilde{a} \pm \Delta} - e^{\tilde{a}}| \leq e^{\tilde{a}} |e^{\Delta} - 1| \leq e^{\tilde{a}} |e^{\Delta^*} - 1|.$$

Поскольку при вычислении плотности с использованием сходящихся рядов наибольшая потеря точности происходит при возведении экспоненты в максимальную степень, оценка погрешности $\varepsilon_{\text{сх}} \equiv \varepsilon_{\text{сх}}(x, \alpha, d)$ имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{\text{сх}}(x, \alpha, d) = \exp(q_{\text{max}}(x, \alpha)) \cdot |\exp(10^{-(d - \lfloor \lg |q_{\text{max}}(x, \alpha)| \rfloor - 1)}) - 1|, \quad (12)$$

где

$$q_{\text{max}}(x, \alpha) = \begin{cases} q_1(n_1^*; x, \alpha), & \alpha > 1; \\ q_2(n_2^*; x, \alpha), & \alpha < 1. \end{cases}$$

Таким образом, асимптотические ряды позволяют вычислять значения плотности с заданным уровнем точности $\varepsilon_{\text{ас}}$ в своей области применимости, ограниченной точкой $x_{\text{гр}}$, на оставшемся интервале плотность вычисляется с использованием сходящихся рядов с погрешностью $\varepsilon_{\text{сх}}$, которая достигает наибольшего значения в граничной точке $x_{\text{гр}}$.

Увеличивая значение погрешности $\varepsilon_{\text{ас}}$, мы изменяем положение граничной точки, расширяя область применимости асимптотического ряда, и тем самым уменьшаем максимальную погрешность сходящегося ряда $\varepsilon_{\text{сх}}$. Оптимальное значение точности ε , представляющее собой наименьшее значение максимальной погрешности вычисления плотности на всей чис-

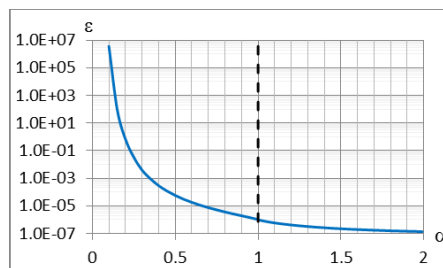


Рис. 4: Оптимальная точность

ловой оси для определенного типа используемых переменных, находится из уравнения:

$$\varepsilon_{cx}(x_{rp}(\varepsilon, \alpha), \alpha, d) = \varepsilon.$$

Значения оптимальной точности ε для разных значений параметра $\alpha \neq 1$ при использовании переменных типа double ($d = 15$) представлены на Рис. 4.

3.4 Использование арифметики произвольной точности

Как видно из Рис. 4, использование стандартных переменных типа double приводит к существенному ограничению точности вычислений, особенно при $\alpha \rightarrow 0$. Для устранения этих ограничений и вычисления плотности устойчивых распределений с более высокой точностью необходимо уменьшить погрешность сходящихся рядов ε_{cx} за счет увеличения количества хранящихся в переменной значимых цифр d . Такую возможность предоставляет арифметика произвольной точности (VPA — Variable Precision Arithmetic) (см., например, [2]).

Для определения необходимого количества цифр d , обеспечивающего вычисление сходящегося ряда с заданной точностью $\tilde{\varepsilon}$, требуется решить обратную задачу, выразив d из (12):

$$d = \lceil [\lg |q_{max}|] + 1 - \lg (\ln(\tilde{\varepsilon}/e^{q_{max}} + 1)) \rceil + 1.$$

Заметим, что для вычисления $\ln(\tilde{\varepsilon}/e^{q_{max}} + 1)$ необходимо, чтобы используемые при этом переменные позволяли хранить числа с точностью не менее, чем $\lceil [\lg(\tilde{\varepsilon}/e^{q_{max}})] \rceil + 1$ цифр.

Общая схема применения сходящихся и асимптотических рядов $\tilde{p}_1(x; \alpha, \beta)$ и $\tilde{p}_2(x; \alpha, \beta)$ для вычисления плотности стандартных устойчивых распределений при $\alpha \neq 1, \beta \neq \pm 1, x > 0$ с заданной точностью $\tilde{\varepsilon}$ представлена на Рис. 5.

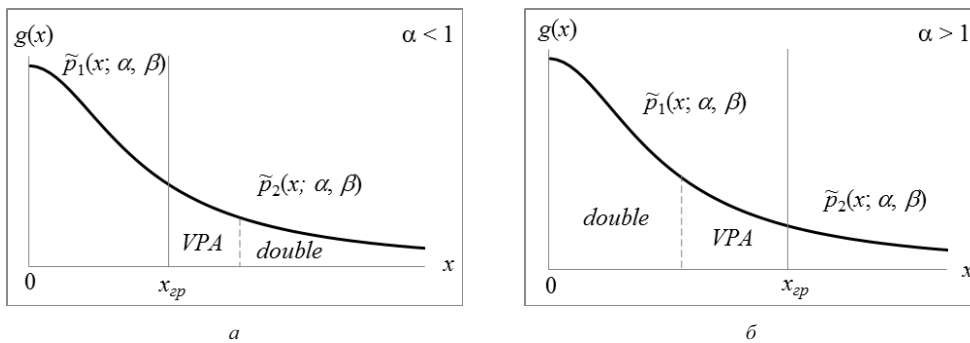


Рис. 5: Схема вычисления плотности устойчивых распределений с помощью рядов

4. Результаты вычислений плотности с помощью рядов

Вычисление плотности устойчивых распределений с помощью асимптотических и сходящихся рядов было реализовано в среде Matlab с использованием пакета Symbolic Math Toolbox, поддерживающего арифметику произвольной точности.

Для проверки точности вычисления плотности с помощью сходящихся рядов рассмотрим частный случай $\alpha = 0.5, \beta = 1$ (распределение Леви), для которого функция плотности имеет явное выражение (2). В силу ограничения $\beta \neq 1$ асимптотический ряд в рассматриваемом случае использовать нельзя.

Расчеты производились для 5 различных уровней точности. В каждой точке определялось необходимое количество значимых цифр d , хранящихся в переменной. При $d > 15$ вместо стандартных переменных типа `double` использовалась арифметика произвольной точности. Значения, вычисленные с помощью сходящегося ряда $p_2(x; 0.5, 1)$, сравнивались с истинными значениями плотности распределения Леви, полученными по формуле (2), при этом рассчитывалась абсолютная ошибка AE . Результаты вычислений представлены в Таблице 1 и на Рис. 6.

Таблица 1: Результаты вычисления плотности с помощью сходящегося ряда

x	Заданная точность									
	$\varepsilon = 10^{-5}$		$\varepsilon = 10^{-7}$		$\varepsilon = 10^{-10}$		$\varepsilon = 10^{-13}$		$\varepsilon = 10^{-15}$	
	d	AE	d	AE	d	AE	d	AE	d	AE
0.01	20	5.89E-07	22	4.35E-09	25	7.29E-12	28	9.21E-15	30	5.17E-17
0.05	10	4.06E-07	12	2.63E-09	15	2.37E-13	18	6.00E-15	20	0
0.1	8	8.65E-07	10	2.37E-09	13	3.98E-12	16	5.00E-15	18	0
0.5	6	7.32E-08	8	4.09E-09	11	3.91E-13	14	0	16	0
1	5	9.23E-08	7	3.31E-09	10	2.89E-12	13	2.00E-15	15	0
5	5	6.51E-09	7	6.52E-11	10	5.44E-13	13	0	15	0
10	5	2.31E-08	7	1.44E-10	10	7.23E-13	13	1.04E-17	15	1.04E-17
50	4	9.96E-09	6	1.66E-11	9	2.08E-14	12	2.09E-17	14	0
100	3	8.81E-10	5	8.81E-10	8	7.34E-13	11	4.59E-16	13	0
500	2	1.26E-08	4	3.15E-12	7	5.26E-16	10	9.83E-20	12	9.83E-20
1000	3	2.23E-09	5	2.79E-13	8	2.79E-13	11	2.32E-17	13	0

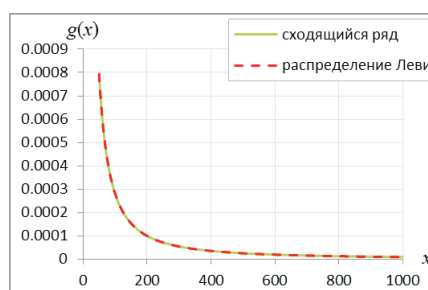
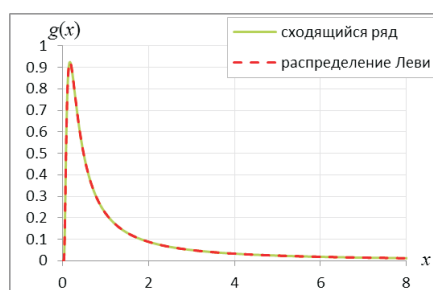


Рис. 6: Результаты вычисления плотности распределения Леви с помощью сходящегося ряда

Сравнение результатов показало, что получаемая величина абсолютной ошибки не превышает заданного значения погрешности, т. е. рассматриваемый сходящийся ряд позволяет вычислять плотность с требуемой точностью.

Далее проверим работоспособность метода вычисления плотности устойчивых распределений с помощью сходящихся и асимптотических рядов для других значений параметров (с учетом ограничений $\alpha \neq 1, \beta \neq \pm 1$). Поскольку в общем случае функция плотности не имеет явного выражения, полученные результаты будем сравнивать с приближенными значениями, вычисленными по методу

Nolan'a, разработанному в [9]. Реализацию данного метода в среде Matlab предложил М. Veillette (см. [3]).

Вычисления проводились при заданном уровне точности $\varepsilon = 10^{-15}$ для различных значений параметра α и $\beta = 0, 0.5, 0.75, 0.99$ (благодаря свойству (4) отрицательные значения параметра β не рассматривались), а в качестве границ диапазона x использовались квантили порядка 0.01 и 0.99, вычисленные с помощью программы Veillette'a. При сравнении результатов рассчитывались максимальная и минимальная абсолютные ошибки.

Результаты вычислений представлены в Таблицах 2 и 3, примеры сопоставления графиков плотности, рассчитанных по методу Nolan'a и с помощью рядов, приведены на Рис. 8. Для более компактного представления результатов в таблицах используется следующее обозначение: $a^b := a \cdot 10^b$.

Некоторое расхождение результатов и увеличение максимальной абсолютной ошибки (особенно заметное при малых α) связано с неудовлетворительным вычислением плотности по методу Nolan'a в окрестности точки $x = 0$. Преимущество использования рядов в этом случае продемонстрировано на Рис. 7.

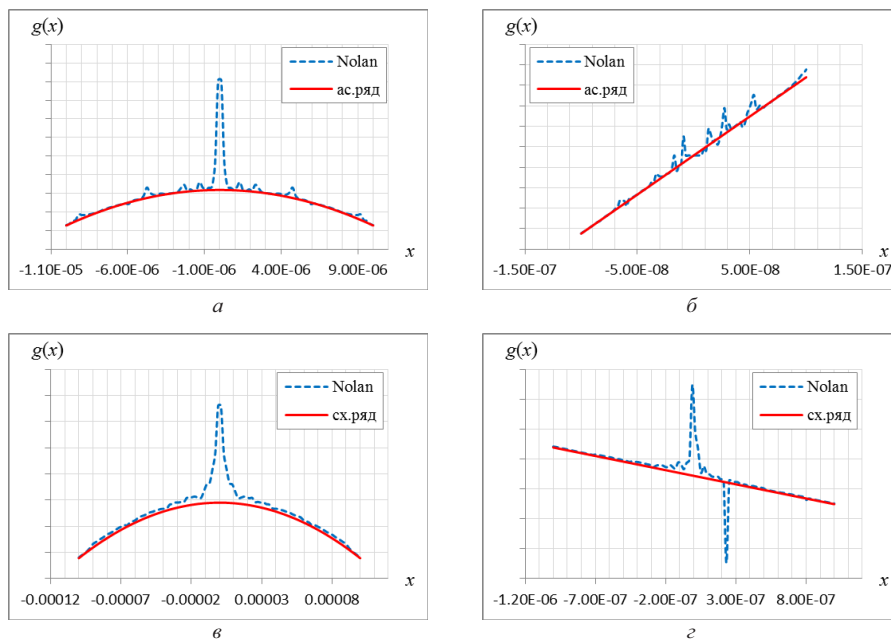


Рис. 7: Сравнение результатов вычисления плотности с помощью рядов и по методу Nolan'a:

а) $\alpha = 0.5, \beta = 0$; б) $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$; в) $\alpha = 1.5, \beta = 0$; г) $\alpha = 1.5, \beta = 0.5$

Таблица 2: Результаты вычисления плотности с помощью рядов при $\alpha < 1$

α	$\beta = 0$		$\beta = 0.5$		$\beta = 0.75$		$\beta = 0.99$	
	x	max AE min AE	x	max AE min AE	x	max AE min AE	x	max AE min AE
0.05	$[-4.5^{+33}; 4.5^{+33}]$	7.7 ⁺¹⁷ 0	$[-3.5^{+27}; 1.5^{+37}]$	5.5 ⁺¹⁷ 0	$[-2.2^{+21}; 3.4^{+38}]$	3.0 ⁺¹⁷ 0	$[7.1^{-09}; 4.4^{+39}]$	1.2 ⁺¹⁶ 0
0.1	$[-5.1^{+16}; 5.1^{+16}]$	9.3 ⁺⁰⁵ 0	$[-4.7^{+13}; 2.9^{+18}]$	7.7 ⁺⁰⁵ 0	$[-3.7^{+10}; 1.3^{+19}]$	4.1 ⁺⁰⁵ 4.8 ⁻²⁷	$[4.4^{-08}; 4.7^{+19}]$	1.3 ⁻⁰⁶ 0
0.15	$[-1.2^{+11}; 1.2^{+11}]$	4.7 ⁺⁰⁰ 0	$[-1.1^{+09}; 1.7^{+12}]$	1.9 ⁺⁰¹ 0	$[-9.7^{+06}; 4.4^{+12}]$	1.3 ⁺⁰¹ 0	$[1.3^{-05}; 9.9^{+12}]$	1.6 ⁻¹¹ 0
0.2	$[-1.8^{+08}; 1.8^{+08}]$	6.6 ⁻⁰⁶ 0	$[-5.6^{+06}; 1.2^{+09}]$	5.1 ⁻⁰³ 0	$[-1.6^{+05}; 2.5^{+09}]$	3.2 ⁻⁰³ 0	$[2.3^{-04}; 4.5^{+09}]$	6.0 ⁻¹² 0
0.25	$[-3.7^{+06}; 3.7^{+06}]$	3.5 ⁻⁰⁹ 0	$[-2.4^{+05}; 1.6^{+07}]$	2.5 ⁻⁰⁹ 0	$[-1.4^{+04}; 2.8^{+07}]$	4.1 ⁻⁰⁹ 0	$[1.4^{-03}; 4.3^{+07}]$	9.9 ⁻¹³ 0
0.3	$[-2.7^{+05}; 2.7^{+05}]$	5.3 ⁻¹⁰ 0	$[-2.9^{+04}; 9.2^{+05}]$	2.8 ⁻¹⁰ 8.4 ⁻²¹	$[-2.7^{+03}; 1.4^{+06}]$	1.9 ⁻⁰⁹ 0	$[4.6^{-03}; 1.9^{+06}]$	9.3 ⁻¹³ 0
0.35	$[-4.3^{+04}; 4.3^{+04}]$	4.8 ⁻¹¹ 0	$[-6.4^{+03}; 1.2^{+05}]$	4.8 ⁻¹¹ 0	$[-8.5^{+02}; 1.6^{+05}]$	7.7 ⁻¹¹ 0	$[1.1^{-02}; 2.0^{+05}]$	3.1 ⁻¹³ 0
0.4	$[-1.1^{+04}; 1.1^{+04}]$	3.1 ⁻¹¹ 0	$[-2.1^{+03}; 2.4^{+04}]$	2.7 ⁻¹¹ 0	$[-3.6^{+02}; 3.1^{+04}]$	6.6 ⁻¹² 0	$[2.2^{-02}; 3.7^{+04}]$	7.0 ⁻¹⁴ 0
0.45	$[-3.7^{+03}; 3.7^{+03}]$	4.8 ⁻¹² 5.2 ⁻¹⁹	$[-8.8^{+02}; 7.2^{+03}]$	1.8 ⁻¹¹ 0	$[-1.8^{+02}; 8.6^{+03}]$	2.0 ⁻¹¹ 0	$[3.8^{-02}; 9.5^{+03}]$	1.4 ⁻¹³ 0
0.5	$[-1.6^{+03}; 1.6^{+03}]$	3.3 ⁻¹² 0	$[-4.4^{+02}; 2.7^{+03}]$	1.0 ⁻¹¹ 0	$[-1.1^{+02}; 3.0^{+03}]$	4.5 ⁻¹² 0	$[6.0^{-02}; 3.2^{+03}]$	4.7 ⁻¹⁴ 0
0.55	$[-7.7^{+02}; 7.7^{+02}]$	4.9 ⁻¹³ 1.6 ⁻¹⁸	$[-2.5^{+02}; 1.2^{+03}]$	2.9 ⁻¹² 0	$[-7.1^{+01}; 1.3^{+03}]$	2.8 ⁻¹² 2.4 ⁻¹⁸	$[8.9^{-02}; 1.3^{+03}]$	7.7 ⁻¹⁴ 0
0.6	$[-4.3^{+02}; 4.3^{+02}]$	1.8 ⁻¹² 8.0 ⁻¹⁹	$[-1.6^{+02}; 6.1^{+02}]$	5.3 ⁻¹³ 4.0 ⁻¹⁸	$[-5.0^{+01}; 6.2^{+02}]$	9.6 ⁻¹³ 2.8 ⁻¹⁸	$[1.2^{-01}; 5.8^{+02}]$	7.7 ⁻¹⁴ 2.7 ⁻¹⁸
0.65	$[-2.6^{+02}; 2.6^{+02}]$	4.3 ⁻¹³ 0	$[-1.1^{+02}; 3.4^{+02}]$	1.1 ⁻¹² 0	$[-3.7^{+01}; 3.3^{+02}]$	1.7 ⁻¹³ 0	$[1.7^{-01}; 2.9^{+02}]$	1.6 ⁻¹³ 4.2 ⁻¹⁸
0.7	$[-1.7^{+02}; 1.7^{+02}]$	4.3 ⁻¹³ 0	$[-7.7^{+01}; 2.0^{+02}]$	1.3 ⁻¹² 0	$[-2.9^{+01}; 1.9^{+02}]$	2.1 ⁻¹³ 0	$[2.2^{-01}; 1.5^{+02}]$	1.1 ⁻¹³ 0
0.75	$[-1.2^{+02}; 1.2^{+02}]$	1.3 ⁻¹² 0	$[-5.8^{+01}; 1.3^{+02}]$	3.4 ⁻¹³ 0	$[-2.3^{+01}; 1.1^{+02}]$	1.7 ⁻¹³ 0	$[2.8^{-01}; 8.7^{+01}]$	3.7 ⁻¹⁴ 0
0.8	$[-8.5^{+01}; 8.5^{+01}]$	2.3 ⁻¹³ 0	$[-4.5^{+01}; 8.7^{+01}]$	1.6 ⁻¹³ 0	$[-1.9^{+01}; 7.1^{+01}]$	3.1 ⁻¹³ 0	$[3.4^{-01}; 5.0^{+01}]$	4.0 ⁻¹⁴ 0
0.85	$[-6.4^{+01}; 6.4^{+01}]$	6.7 ⁻¹⁴ 0	$[-3.6^{+01}; 6.0^{+01}]$	1.2 ⁻¹² 0	$[-1.6^{+01}; 4.6^{+01}]$	2.7 ⁻¹³ 0	$[4.0^{-01}; 2.8^{+01}]$	7.6 ⁻¹⁴ 0
0.9	$[-4.9^{+01}; 4.9^{+01}]$	9.2 ⁻¹⁴ 0	$[-3.0^{+01}; 4.3^{+01}]$	5.8 ⁻¹³ 0	$[-1.4^{+01}; 3.1^{+01}]$	3.9 ⁻¹³ 0	$[4.4^{-01}; 1.6^{+01}]$	7.8 ⁻¹⁴ 0
0.95	$[-3.9^{+01}; 3.9^{+01}]$	1.4 ⁻¹³ 1.1 ⁻¹⁶	$[-2.5^{+01}; 3.1^{+01}]$	4.7 ⁻¹³ 1.1 ⁻¹⁷	$[-1.3^{+01}; 2.0^{+01}]$	3.6 ⁻¹² 6.6 ⁻¹⁷	$[4.7^{-01}; 7.2^{+00}]$	8.2 ⁻¹² 2.0 ⁻¹⁶
0.99	$[-3.3^{+01}; 3.3^{+01}]$	1.1 ⁻¹¹ 2.8 ⁻¹⁶	$[-2.2^{+01}; 2.5^{+01}]$	7.0 ⁻¹² 2.2 ⁻¹⁶	$[-1.1^{+01}; 1.4^{+01}]$	8.8 ⁻¹³ 1.9 ⁻¹⁶	$[4.9^{-01}; 2.5^{+00}]$	1.7 ⁻¹² 0

Таблица 3: Результаты вычисления плотности с помощью рядов при $\alpha > 1$

α	$\beta = 0$		$\beta = 0.5$		$\beta = 0.75$		$\beta = 0.99$	
	x	max AE min AE	x	max AE min AE	x	max AE min AE	x	max AE min AE
1.01	[-30.6; 30.6]	3.3^{-13} 1.8^{-16}	[-22.2; 21.5]	1.2^{-12} 9.8^{-19}	[-12.6; 11.7]	1.0^{-11} 1.3^{-16}	[-1.5; 0.5]	9.0^{-11} 0
1.05	[-26.3; 26.3]	1.6^{-12} 4.0^{-17}	[-18.8; 20.4]	3.0^{-12} 1.2^{-17}	[-10.9; 13]	5.0^{-12} 6.6^{-17}	[-1.5; 4]	1.5^{-11} 0
1.1	[-22.1; 22.1]	1.3^{-12} 4.0^{-17}	[-15.6; 18.8]	1.8^{-12} 2.0^{-17}	[-9.3; 13.7]	4.3^{-12} 0	[-1.6; 7.1]	3.4^{-12} 0
1.15	[-18.8; 18.8]	1.0^{-12} 0	[-13.2; 17.2]	2.7^{-12} 1.0^{-17}	[-8; 13.8]	3.3^{-12} 0	[-1.8; 9.1]	4.4^{-12} 0
1.2	[-16.2; 16.2]	1.3^{-12} 1.5^{-17}	[-11.3; 15.8]	2.4^{-12} 9.5^{-18}	[-7; 13.6]	2.1^{-12} 0	[-2; 10.3]	2.6^{-12} 0
1.25	[-14; 14]	1.3^{-12} 0	[-9.8; 14.4]	1.3^{-12} 0	[-6.2; 13]	2.5^{-12} 0	[-2.1; 10.8]	1.8^{-11} 0
1.3	[-12.3; 12.3]	1.5^{-12} 0	[-8.6; 13.1]	1.8^{-12} 0	[-5.6; 12.3]	2.5^{-12} 0	[-2.3; 10.9]	1.6^{-12} 0
1.35	[-10.9; 10.9]	1.4^{-12} 0	[-7.6; 11.9]	2.1^{-12} 0	[-5.1; 11.6]	2.1^{-12} 0	[-2.4; 10.7]	1.9^{-12} 0
1.4	[-9.7; 9.7]	1.4^{-12} 0	[-6.8; 10.8]	1.6^{-12} 0	[-4.6; 10.8]	1.7^{-12} 0	[-2.5; 10.3]	1.6^{-12} 0
1.45	[-8.6; 8.6]	1.4^{-12} 0	[-6.1; 9.9]	1.7^{-12} 0	[-4.3; 10]	1.7^{-12} 0	[-2.6; 9.8]	1.5^{-12} 0
1.5	[-7.7; 7.7]	1.4^{-12} 0	[-5.5; 9]	1.7^{-12} 0	[-4; 9.2]	1.6^{-12} 0	[-2.7; 9.3]	1.3^{-12} 0
1.55	[-7; 7]	1.4^{-12} 1.1^{-16}	[-5; 8.1]	1.5^{-12} 0	[-3.8; 8.5]	1.2^{-12} 4.0^{-17}	[-2.8; 8.6]	1.2^{-12} 0
1.6	[-6.3; 6.3]	1.4^{-12} 0	[-4.6; 7.4]	1.4^{-12} 0	[-3.6; 7.8]	1.4^{-12} 0	[-2.9; 8]	1.3^{-12} 0
1.65	[-5.7; 5.7]	1.3^{-12} 0	[-4.3; 6.7]	1.3^{-12} 0	[-3.5; 7.1]	3.2^{-12} 0	[-2.9; 7.3]	1.1^{-12} 0
1.7	[-5.2; 5.2]	1.2^{-12} 0	[-4; 6]	1.2^{-12} 0	[-3.5; 6.4]	1.2^{-12} 0	[-3; 6.7]	1.3^{-12} 0
1.75	[-4.7; 4.7]	1.1^{-12} 0	[-3.8; 5.4]	1.2^{-12} 0	[-3.4; 5.8]	9.5^{-13} 0	[-3.1; 6]	1.2^{-12} 0
1.8	[-4.3; 4.3]	1.1^{-12} 0	[-3.7; 4.9]	8.8^{-13} 9.7^{-17}	[-3.4; 5.1]	1.2^{-12} 0	[-3.1; 5.4]	1.1^{-12} 0
1.85	[-3.9; 3.9]	9.8^{-13} 0	[-3.5; 4.4]	9.8^{-13} 0	[-3.3; 4.6]	9.4^{-13} 0	[-3.2; 4.8]	9.8^{-13} 0
1.9	[-3.7; 3.7]	8.6^{-13} 0	[-3.4; 3.9]	7.1^{-13} 0	[-3.3; 4.1]	9.4^{-13} 0	[-3.2; 4.2]	1.0^{-12} 0
1.95	[-3.5; 3.5]	9.7^{-13} 0	[-3.4; 3.6]	1.6^{-12} 0	[-3.3; 3.6]	7.0^{-13} 0	[-3.3; 3.7]	7.3^{-13} 0
1.99	[-3.3; 3.3]	8.8^{-13} 0	[-3.3; 3.3]	5.2^{-13} 0	[-3.3; 3.3]	1.3^{-12} 0	[-3.3; 3.4]	1.6^{-12} 0

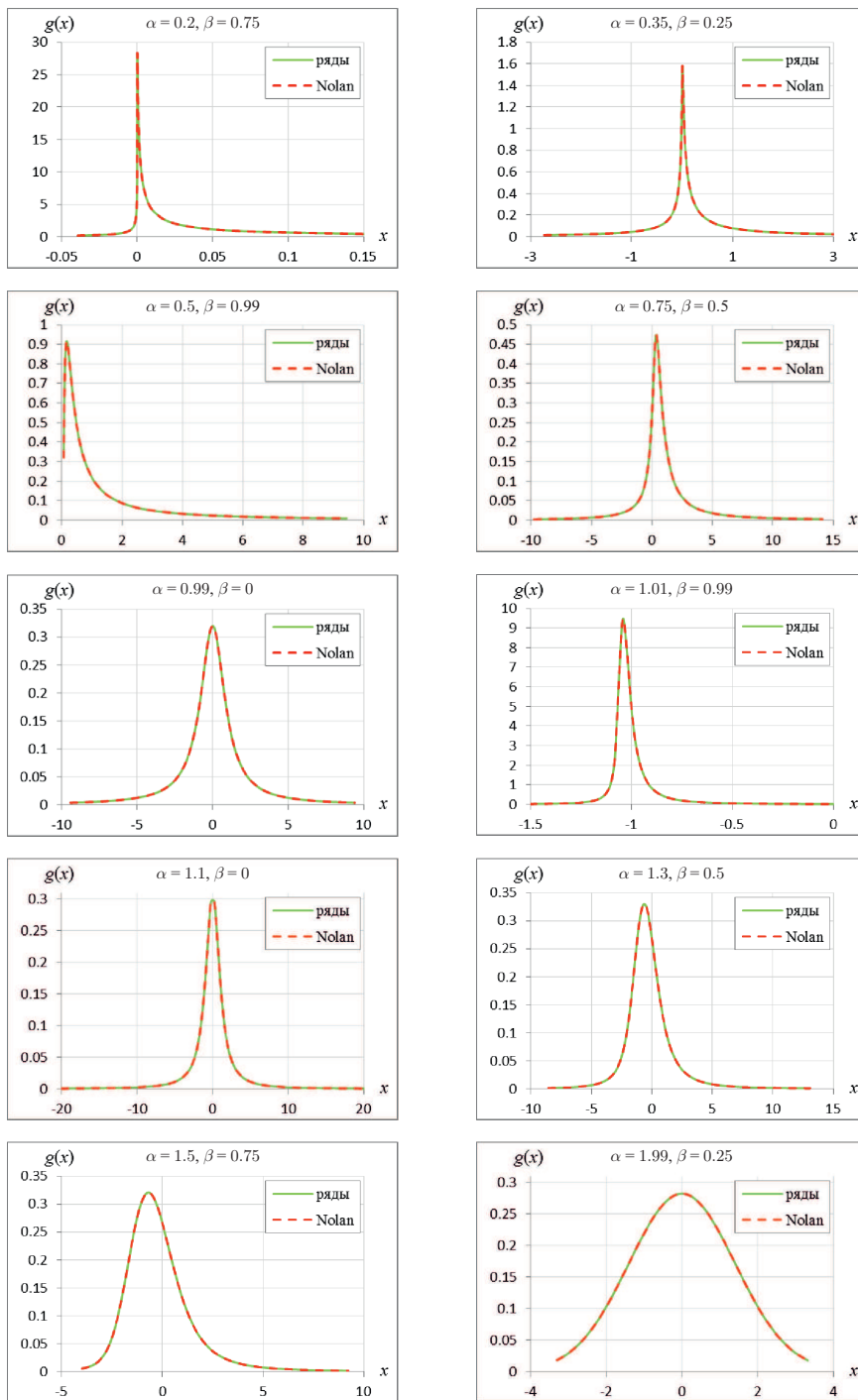


Рис. 8: Результаты вычисления плотности устойчивых распределений с помощью рядов

Заключение

В статье предлагается алгоритм вычисления функции плотности одномерных устойчивых распределений при $\alpha \neq 1, \beta \neq \pm 1$ с помощью сходящихся и асимптотических рядов. Сравнение результатов работы алгоритма с приближенными значениями, полученными по методу Nolan'a, показало, что предлагаемый подход позволяет вычислять функции плотности устойчивых распределений с более высокой степенью точности.

Список литературы

- [1] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.
- [2] Кнут Д. Искусство программирования. В 3-х томах. Т. 2. Получисленные алгоритмы. М: Вильямс, 2001. 788 с.
- [3] Alpha stable distributions for MATLAB by M.Veillette/Matlab Central [Электронный ресурс]. 2012. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37514> (accessed at 02.03.2014).
- [4] Amindavar H., Teimouri M. A Novel Approach to Calculate Stable Densities // Proceedings of the World Congress on Engineering. Vol. I. London, U.K., 2008. 5 p.
- [5] Belov I. A. On the computation of the probability density of α -stable distributions // Mathematical Modelling and Analysis. 2005. Pp. 333–341.
- [6] Holt D.R., Crow E.L. Tables and graphs of the stable probability density functions // Journal of Research of the National Bureau of Standards (United States). Section B. Mathematical Sciences, 77B(3–4). 1973. Pp. 143–198.
- [7] Mittnik S., Doganoglu T., Chenyao D. Computing the probability density function of the stable paretian distribution // Mathematical and Computer Modelling. 1999. Vol. 29. Pp. 235–240.
- [8] Nolan J.P. An algorithm for evaluating stable densities in Zolotarev's (M) parametrization // Mathematical and Computer Modelling. 1999. Vol. 29. Pp. 229–233.
- [9] Nolan J.P. Numerical calculation of stable densities and distribution functions // Communications in Statistics. Part C: Stochastic Models. 1997. Vol. 13. Pp. 759–774.
- [10] Nolan J.P. Parameterizations and modes of stable distributions // Statistics and Probability Letters. 1998. Vol. 38. Pp. 187–195.

Библиографическая ссылка

Алексеева А.Е. О вычислении значений функций плотности одномерных устойчивых распределений с помощью сходящихся и асимптотических рядов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 47–65.

Сведения об авторах**1. Алексеева Александра Евгеньевна**

аспирант кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

**ON CALCULATION OF VALUES OF UNIVARIATE STABLE
DISTRIBUTIONS DENSITY FUNCTIONS USING CONVERGENT
AND ASYMPTOTIC SERIES**

Alekseyeva Aleksandra Yevgenyevna

Postgraduate student of Mathematical Statistics and Systems Analysis chair
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 16.05.2014, revised 05.06.2014.

The paper introduces calculation algorithms of values of univariate stable distributions density functions using convergent and asymptotic series with $\alpha \neq 1$ and $\beta \neq \pm 1$. Also defined intervals of the series applicability and their calculation accuracy depending on a type of program variables used. Variable precision arithmetic is used to decrease computational error.

Keywords: stable distributions, density approximation, convergent and asymptotic series, variable precision arithmetic.

Bibliographic citation

Alekseyeva A.Ye. On calculation of values of univariate stable distributions density functions using convergent and asymptotic series. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 2, pp. 47–65. (in Russian)