

**О ВЫЧИСЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ  
СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ УСТОЙЧИВЫХ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СХОДЯЩИХСЯ  
И АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ**

**Алексеева А.Е.**

Кафедра математической статистики и системного анализа

---

*Поступила в редакцию 20.09.2014, после переработки 27.09.2014.*

---

В статье предлагается алгоритм вычисления значений функций плотности сферически симметричных устойчивых распределений с помощью сходящихся и асимптотических рядов. Определяются интервалы применимости рядов и точность их вычисления в зависимости от типа используемых программных переменных. Для уменьшения вычислительной погрешности используется арифметика произвольной точности.

**Ключевые слова:** сферически симметричные устойчивые распределения, аппроксимация плотности, сходящиеся и асимптотические ряды, арифметика произвольной точности.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 65–76.*

## Введение

Понятие устойчивых законов, представляющих собой широкий класс вероятностных распределений, распространяется на многомерный случай (см., например, [7]). Случайный  $N$ -мерный вектор  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  называется устойчивым, если для любого  $n \geq 2$  найдутся число  $A_n > 0$  и вектор  $\mathbf{B}_n \in \mathbb{R}^N$ , такие, что

$$\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{X}^{(2)} + \dots + \mathbf{X}^{(n)} \stackrel{d}{=} A_n \mathbf{X} + \mathbf{B}_n,$$

где  $\mathbf{X}^{(1)} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}^{(2)} \stackrel{d}{=} \dots \stackrel{d}{=} \mathbf{X}$ .

Из-за отсутствия аналитического выражения функций распределения и плотности для описания семейства многомерных устойчивых распределений используется характеристическая функция  $\varphi(\mathbf{t}) = Ee^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{t} \rangle}$ , имеющая следующее представление в форме (А) (см. [3]):

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp \left\{ i\langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\mu} \rangle - \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \omega_\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{s}) \Gamma(d\mathbf{s}) \right\},$$

где  $\alpha \in (0; 2]$  — параметр устойчивости,  $\Gamma$  — конечная мера на единичной сфере  $\mathbb{S}^{N-1}$ , называемая спектральной мерой,  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N$  — вектор сдвига,

$$\omega_\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{s}) = \begin{cases} 1 - i \operatorname{tg}(\alpha\pi/2) \operatorname{sign}\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle, & \alpha \neq 1; \\ 1 + i(2/\pi) \ln |\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle| \operatorname{sign}\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Поскольку характеристические функции  $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$  и  $\varphi_{\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{t})$  случайных векторов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}$ , соответственно, связаны соотношением

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\mu} \rangle} \varphi_{\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{t}),$$

то без потери общности будем полагать  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ .

Частным случаем рассматриваемого семейства являются сферически симметричные устойчивые распределения (см. [9]), характеристическая функция  $\varphi(\mathbf{t})$  которых является функцией радиального вида, то есть функцией, значения которой зависят только от расстояния от точки  $\mathbf{t}$  до начала координат:

$$\varphi(\mathbf{t}) = e^{-\lambda|\mathbf{t}|^\alpha},$$

где  $\lambda > 0$  — параметр масштаба.

В случае  $\lambda = 1$  распределение называется стандартным. Поскольку для плотностей сферически симметричных устойчивых распределений  $g(\mathbf{x}; \alpha, \lambda, N)$  справедливо соотношение

$$g(\mathbf{x}; \alpha, \lambda, N) = \lambda^{-N/\alpha} g(\mathbf{x}\lambda^{-1/\alpha}; \alpha, 1, N),$$

то далее будем рассматривать только стандартные распределения.

Как и в одномерном случае, основной трудностью использования многомерных устойчивых распределений является отсутствие явного аналитического представления функции плотности. Поскольку многомерные устойчивые плотности имеют более сложную структуру, то алгоритмы, разработанные для одномерных плотностей, не допускают расширения на многомерный случай. Поэтому возникает необходимость разработки численных методов, позволяющих находить приближенные значения функции плотности многомерных устойчивых распределений.

## 1. О представлении сферически симметричных устойчивых распределений через одномерные проекции

Плотность многомерных устойчивых распределений  $g(\mathbf{x})$  выражается через характеристическую функцию  $\varphi(\mathbf{t})$  по формуле обращения:

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle \mathbf{t}, \mathbf{x} \rangle} \varphi(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (1)$$

Однако вычисление плотности с помощью численного интегрирования непосредственно формулы (1) представляет собой сложную задачу.

Ж. Р. Nolan и Н. Abdul-Hamid в [5] предложили вычислять плотности многомерных устойчивых распределений, используя их одномерные проекции.

Для любого  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^N$  проекция случайного вектора  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{X} \rangle$  является одномерной устойчивой случайной величиной с масштабом  $\sigma(\mathbf{t})$ , асимметрией  $\beta(\mathbf{t})$  и сдвигом  $\delta(\mathbf{t})$ , определения которых в терминах спектральной меры  $\Gamma$  предложены Золотаревым в [3]:

$$\sigma^\alpha(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} |\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \Gamma(d\mathbf{s}), \quad \beta(\mathbf{t}) = \sigma^{-\alpha}(\mathbf{t}) \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \text{sign}\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle |\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha \Gamma(d\mathbf{s}),$$

$$\delta(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0, & \alpha \neq 1; \\ -\frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle \ln |\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle| \Gamma(ds), & \alpha = 1. \end{cases}$$

В случае стандартных сферически симметричных распределений  $\beta(\mathbf{t}) \equiv 0$ ,  $\delta(\mathbf{t}) \equiv 0$ , и для  $\alpha \in (0; 2]$  плотность  $g(\mathbf{x}; \alpha, 1, N)$  представима в следующем виде:

$$g(\mathbf{x}; \alpha, 1, N) = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} f(\langle \mathbf{x}, \mathbf{s} \rangle / \sigma(\mathbf{s}); \alpha, N) (\sigma(\mathbf{s}))^{-N} ds,$$

где

$$f(v; \alpha, N) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^\infty \cos(vu) u^{N-1} e^{-u^\alpha} du.$$

Представление плотности многомерных устойчивых распределений через одномерные проекции является более удобным для вычислений, чем выражение через характеристическую функцию по формуле обращения (1): значения функции  $f(v; \alpha, N)$  могут быть найдены, например, с помощью входящей в математическую библиотеку IMSL подпрограммы DQDAWF, предназначенной для вычисления интегралов Фурье (см., например, [1]).

## 2. Вычисление плотности сферически симметричных устойчивых распределений с помощью рядов

Другим подходом к решению задачи вычисления плотности сферически симметричных устойчивых распределений является представление их в виде сходящихся и асимптотических рядов.

Функции плотности сферически симметричных распределений являются функциями радиального вида, то есть они представимы в виде неотрицательной функции  $\rho(r; \alpha, N)$ , определенной на положительной полуоси, где  $r = |\mathbf{x}|$  — расстояние от точки  $\mathbf{x}$  до начала координат.

В зависимости от значения параметра устойчивости  $\alpha$  следует выделять два случая вычисления функций плотности.

### 2.1 Случай $\alpha \neq 1$

В статье В.М. Золотарева [9] предлагаются следующие разложения плотностей сферически симметричных устойчивых распределений:

$$p_1(r; \alpha, N) := \frac{2}{\alpha(2\sqrt{\pi})^N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma((2n+N)/\alpha)}{n! \Gamma(n+N/2)} (r/2)^{2n}, \quad (2)$$

$$p_2(r; \alpha, N) := \frac{1}{\pi(r\sqrt{\pi})^N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \Gamma((n\alpha+N)/2) \Gamma(n\alpha/2+1) \sin(\alpha\pi n/2) (r/2)^{-n\alpha}. \quad (3)$$

В случае  $N = 1$  использование свойств гамма-функции позволяет преобразовать ряды  $p_1(r; \alpha, N)$  и  $p_2(r; \alpha, N)$  в соответствующие разложения плотностей симметричных одномерных устойчивых распределений (см., например, [8]). Как

и в одномерном случае, ряд  $p_1(r; \alpha, N)$  является сходящимся при  $\alpha > 1$  и асимптотическим при  $\alpha < 1$ , в то время как ряд  $p_2(r; \alpha, N)$  является сходящимся при  $\alpha < 1$  и асимптотическим при  $\alpha > 1$ , то есть

$$\begin{array}{ll} \text{при } \alpha < 1: & \text{при } \alpha > 1: \\ \rho(r; \alpha, N) \sim p_1(r; \alpha, N), \quad r \rightarrow 0; & \rho(r; \alpha, N) = p_1(r; \alpha, N); \\ \rho(r; \alpha, N) = p_2(r; \alpha, N); & \rho(r; \alpha, N) \sim p_2(r; \alpha, N), \quad r \rightarrow \infty. \end{array}$$

Более удобным для вычислений является представление общего члена ряда в виде экспоненты с использованием логарифмической гамма-функции  $\ln \Gamma(u)$ . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} q_1(n; r, \alpha, N) &:= \ln \Gamma((2n + N)/\alpha) - \ln \Gamma(n + 1) - \ln \Gamma(n + N/2) + \\ &\quad + 2n \ln(r/2) - \ln(\alpha 2^{N-1} (\sqrt{\pi})^N), \\ q_2(n; r, \alpha, N) &:= \ln \Gamma((n\alpha + N)/2) + \ln \Gamma(n\alpha/2 + 1) - \ln \Gamma(n + 1) - \\ &\quad - n\alpha \ln(r/2) - \ln(\pi (r\sqrt{\pi})^N). \end{aligned}$$

Тогда ряды (2) и (3) представимы в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(r; \alpha, N) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp(q_1(n; r, \alpha, N)), \\ \tilde{p}_2(r; \alpha, N) &:= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin(\alpha\pi n/2) \exp(q_2(n; r, \alpha, N)). \end{aligned}$$

Для нахождения границ применимости рядов  $\tilde{p}_1(r; \alpha, N)$  и  $\tilde{p}_2(r; \alpha, N)$ , то есть для определения интервалов, на которых они позволяют вычислять плотность с заданной степенью точности, перейдем к рассмотрению более простых рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(q_1(n; r, \alpha, N))$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(q_2(n; r, \alpha, N))$ : согласно признаку сравнения из их абсолютной сходимости следует сходимость исходных рядов.

На Рис. 1 в качестве примера приведены графики функций  $q_1(n; r, \alpha, N)$  и  $q_2(n; r, \alpha, N)$  при различных значениях  $r$  и параметра  $\alpha$  для размерности  $N = 2$ . Рассматриваемые функции выпуклы вниз, если ряды являются асимптотическими, и выпуклы вверх в случае сходящихся рядов. Точки экстремума  $n_1^* \equiv n_1^*(r; \alpha, N)$  и  $n_2^* \equiv n_2^*(r; \alpha, N)$  функций  $q_1(n; r, \alpha, N)$  и  $q_2(n; r, \alpha, N)$ , соответственно, определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} n_1^*(r; \alpha, N) &= \{n: \Psi\left(\frac{2n + N}{\alpha}\right) \cdot \frac{2}{\alpha} - \Psi\left(n + \frac{N}{2}\right) - \Psi(n + 1) + 2 \ln\left(\frac{r}{2}\right) = 0\}, \\ n_2^*(r; \alpha, N) &= \{n: \Psi\left(\frac{2\alpha + N}{2}\right) \cdot \frac{\alpha}{2} - \Psi\left(\frac{n\alpha}{2} + 1\right) \cdot \frac{\alpha}{2} - \Psi(n + 1) - \alpha \ln\left(\frac{r}{2}\right) = 0\}, \end{aligned}$$

где  $\Psi(u)$  — дигамма-функция,  $\Psi(u) = \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}$ .

В случае  $\alpha < 1$  асимптотический ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(q_1(n; r, \alpha, N))$  сходится, пока функция  $q_1(n; r, \alpha, N)$  убывает, то есть при  $n < n_1^*$ . Точка экстремума  $n_1^*(r; \alpha, N)$

при заданных значениях параметра  $\alpha$  и размерности  $N$  определяется расстоянием  $r$ : чем дальше  $r$  от нуля, тем меньше становится  $n_1^*$ , следовательно, тем раньше ряд начинает расходиться, что означает меньшее количество учитываемых членов разложения, от которых зависит точность вычислений. Поэтому существует некоторое граничное значение  $r_{\text{гп}}$ , обеспечивающее достаточное количество членов разложения  $n$  для вычислений с заданной точностью, которое ограничивает область применимости рассматриваемого ряда справа и определяется минимальным значением его общего члена: при  $n = n_1^*$  должен достигаться заданный уровень точности вычисления асимптотического ряда  $\varepsilon_{\text{ас}}$ , то есть  $\exp(q_1(n_1^*(r; \alpha, N); r, \alpha, N)) < \varepsilon_{\text{ас}}$ .

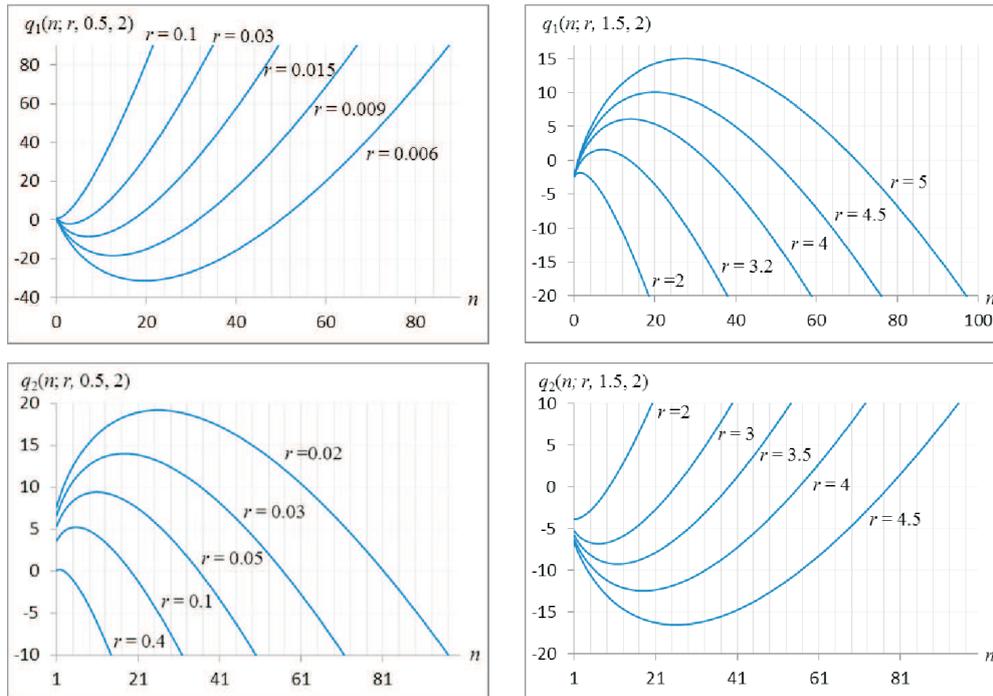


Рис. 1: Графики функций  $q_1(n; r, \alpha, 2)$  и  $q_2(n; r, \alpha, 2)$

Аналогично, при  $\alpha > 1$  область применимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(q_2(n; r, \alpha, N))$  ограничена некоторым значением  $r_{\text{гп}}$  слева. Следовательно, для вычисления плотности сферически симметричных устойчивых распределений с заданной точностью  $\varepsilon_{\text{ас}}$  при  $\alpha < 1$  применим асимптотический ряд  $\tilde{p}_1(r; \alpha, N)$  на интервале  $(0, r_{\text{гп}})$ , при  $\alpha > 1$  — асимптотический ряд  $\tilde{p}_2(r; \alpha, N)$  на интервале  $(r_{\text{гп}}, \infty)$ , где граничное значение  $r_{\text{гп}} \equiv r_{\text{гп}}(\varepsilon_{\text{ас}}, \alpha, N)$  определяется по следующим формулам:

$$r_{\text{гп}} = \begin{cases} \{r: q_1(n_1^*(r; \alpha, N); r, \alpha, N) - \ln \varepsilon_{\text{ас}} = 0\}, & \alpha < 1; \\ \{r: q_2(n_2^*(r; \alpha, N); r, \alpha, N) - \ln \varepsilon_{\text{ас}} = 0\}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

На оставшихся интервалах  $[r_{\text{гп}}, \infty)$  при  $\alpha < 1$  и  $(0, r_{\text{гп}}]$  при  $\alpha > 1$  плотность

вычисляется с помощью сходящихся рядов с точностью  $\varepsilon_{\text{cx}}$ , которая ухудшается по мере приближения расстояния  $r$  к граничному значению  $r_{\text{ГР}}$  из-за возникающих вычислительных сложностей, связанных с увеличением максимальной степени экспоненты  $q_1(n_1^*(r; \alpha, N); r, \alpha, N)$  и  $q_2(n_2^*(r; \alpha, N); r, \alpha, N)$  (см. Рис. 1).

Вычислительная погрешность зависит от типа используемых при программной реализации переменных, которые позволяют хранить числа с ограниченной относительной точностью. Так, переменные типа `double`, предназначенные для хранения данных в формате чисел с плавающей запятой, обеспечивают точность около  $\lg(2^{53}) \approx 15.955$  цифр. При возведении экспоненты в высокую степень возникает необходимость хранения больших чисел, что приводит к существенной потере точности.

Для оценки точности вычисления плотности с помощью сходящихся рядов найдем оценку погрешности, получаемую при возведении экспоненты в степень. Пусть  $a$  — некоторая величина, а  $\tilde{a}$  — ее значение, вычисленное с точностью до  $d$  цифр, где  $d$  зависит от типа используемых переменных, то есть  $a = \tilde{a} \pm \Delta$ , где  $\Delta$  — абсолютная вычислительная погрешность. Поскольку количество цифр дробной части числа  $\tilde{a}$  равно  $d - \lceil \lg |\tilde{a}| \rceil - 1$ , то  $\Delta \leq \Delta^*$ , где  $\Delta^* = 10^{-(d - \lceil \lg |\tilde{a}| \rceil - 1)}$ .

Тогда при возведении экспоненты в степень  $a$  получаемая вычислительная погрешность имеет следующую оценку:

$$|e^{\tilde{a} \pm \Delta} - e^{\tilde{a}}| \leq e^{\tilde{a}} |e^{\Delta} - 1| \leq e^{\tilde{a}} |e^{\Delta^*} - 1|.$$

Поскольку при вычислении плотности с использованием сходящихся рядов наибольшая потеря точности происходит при возведении экспоненты в максимальную степень, оценка погрешности  $\varepsilon_{\text{cx}} \equiv \varepsilon_{\text{cx}}(r, \alpha, N, d)$  имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{\text{cx}}(r, \alpha, N, d) = \exp(q_{\text{max}}(r, \alpha, N)) \cdot |\exp(10^{-(d - \lceil \lg |q_{\text{max}}(r, \alpha, N)| \rceil - 1)}) - 1|, \quad (4)$$

где

$$q_{\text{max}}(r, \alpha, N) = \begin{cases} q_1(n_1^*; r, \alpha, N), & \alpha > 1; \\ q_2(n_2^*; r, \alpha, N), & \alpha < 1. \end{cases}$$

Таким образом, сходящиеся ряды не позволяют находить значения плотности с произвольной заданной точностью: существуют определенные ограничения, связанные с типом используемых программных переменных. Устранить эти ограничения и уменьшить вычислительную погрешность сходящихся рядов  $\varepsilon_{\text{cx}}$  можно за счет увеличения количества хранящихся в переменной значимых цифр  $d$ . Такую возможность предоставляет арифметика произвольной точности (VPA — Variable Precision Arithmetic) (см., например, [4]).

Необходимое количество цифр  $d$ , обеспечивающее вычисление сходящегося ряда с заданной точностью  $\tilde{\varepsilon}$ , выражается из соотношения (4):

$$d = \lceil \lg |q_{\text{max}}(r, \alpha, N)| \rceil + 1 - \lg(\ln(\tilde{\varepsilon}/e^{q_{\text{max}}(r, \alpha, N)} + 1)) + 1.$$

Заметим, что для вычисления  $\ln(\tilde{\varepsilon}/e^{q_{\text{max}}(r, \alpha, N)} + 1)$  необходимо, чтобы используемые при этом программные переменные позволяли хранить числа с точностью не менее, чем  $\lceil \lg(\tilde{\varepsilon}/e^{q_{\text{max}}(r, \alpha, N)}) \rceil + 1$  цифр.

Общая схема применения сходящихся и асимптотических рядов  $\tilde{p}_1(r; \alpha, N)$  и  $\tilde{p}_2(r; \alpha, N)$  для вычисления плотности сферически симметричных устойчивых распределений при  $\alpha \neq 1$  с заданной точностью  $\tilde{\varepsilon}$  представлена на Рис. 2.

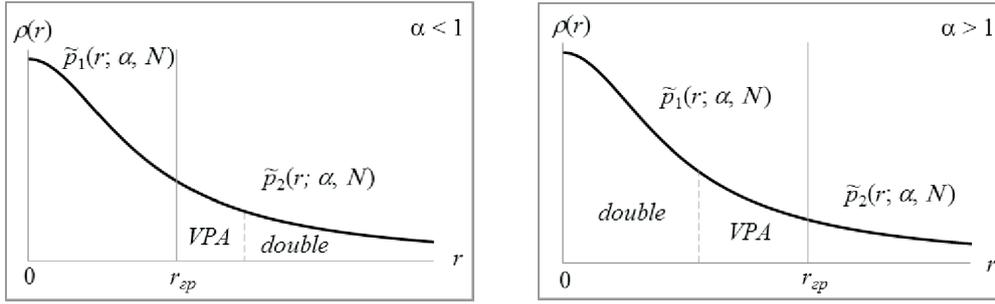


Рис. 2: Схема вычисления плотности сферически симметричных устойчивых распределений с помощью рядов

### 2.2 Случай $\alpha = 1$

В случае  $\alpha = 1$  ряды  $p_1(r; \alpha, N)$  и  $p_2(r; \alpha, N)$  принимают следующий вид:

$$p_1(r; 1, N) := \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + (N + 1)/2)}{\Gamma(n + 1)} r^{2n},$$

$$p_2(r; 1, N) := \frac{1}{(r\sqrt{\pi})^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + (N + 1)/2)}{\Gamma(n + 1)} r^{-2n}.$$

Ряд  $p_1(r; 1, N)$  сходится при  $r < 1$ , ряд  $p_2(r; 1, N)$  сходится при  $r > 1$ , то есть

$$\rho(r; 1, N) = \begin{cases} p_1(r; 1, N), & r < 1; \\ p_2(r; 1, N), & r > 1. \end{cases}$$

Заметим, что в одномерном случае ряды

$$p_1(x; 1, 1) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \text{при } |x| < 1;$$

$$p_2(x; 1, 1) = \frac{1}{\pi x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{-2n}, \quad \text{при } |x| > 1$$

представляют собой разложения в ряд функции плотности распределения Коши  $g(x; 1, 1) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + 1}$ .

В окрестности точки  $r = 1$  скорость сходимости рядов уменьшается и сложность вычислений возрастает, поэтому целесообразным является представление общего члена в виде экспоненты:

$$\tilde{p}_1(r; 1, N) := \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp(\ln \Gamma(n + (N + 1)/2) - \ln \Gamma(n + 1) + 2n \ln r),$$

$$\tilde{p}_2(r; 1, N) := \frac{1}{(r\sqrt{\pi})^{N+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp(\ln \Gamma(n + (N + 1)/2) - \ln \Gamma(n + 1) - 2n \ln r).$$

Таким образом, ряды  $\tilde{p}_1(r; 1, N)$  и  $\tilde{p}_2(r; 1, N)$  позволяют вычислить плотность сферически симметричных устойчивых распределений при  $\alpha = 1$  за исключением точки  $r = 1$ .

### 3. Результаты вычислений значений плотности сферически симметричных устойчивых распределений с помощью рядов

Вычисления плотности сферически симметричных устойчивых распределений с помощью сходящихся и асимптотических рядов были реализованы в среде Matlab с использованием пакета Symbolic Math Toolbox, поддерживающего арифметику произвольной точности (см., например, [2]).

Из-за отсутствия явного аналитического выражения функции плотности результаты вычислений сравнивались с приближенными значениями, полученными по методу, описанному в п. 1. Разработанная Nolan'ом программная реализация указанного метода для двумерного случая (программа MVSTABLE, см. [6]) позволяет вычислять двумерные плотности устойчивых распределений с абсолютной точностью до 4–5 значимых цифр при  $\alpha > 1$  и для малых и средних значений аргумента, в то время как при малых  $\alpha$ , когда плотность принимает большие значения, и для больших значений аргумента, когда плотность уменьшается, точность вычислений не определена.

Расчеты плотности двумерных сферически симметричных устойчивых распределений с использованием рядов производились для различных значений параметра  $\alpha$  с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-10}$  (см. Рис. 3).

При сравнении с результатами, полученными с помощью программы MVSTABLE, рассчитывалась величина абсолютной ошибки АЕ. Результаты вычислений для  $\alpha = 1$  представлены в Таблице 1.

Таблица 1: Сравнение результатов вычислений плотности с помощью рядов и программы MVSTABLE при  $\alpha = 1$

$r$	АЕ	$r$	АЕ	$r$	АЕ	$r$	АЕ
0.05	1.73E-09	0.6	4.25E-09	1.001	3.67E-10	2.5	1.89E-11
0.1	3.78E-09	0.7	6.63E-10	1.01	2.65E-10	3	4.84E-12
0.2	3.19E-11	0.8	1.44E-10	1.1	9.43E-12	3.5	2.44E-11
0.3	1.27E-09	0.9	7.95E-12	1.2	2.75E-10	4	2.53E-11
0.4	2.33E-09	0.99	8.73E-11	1.5	4.38E-10	4.5	1.18E-11
0.5	3.06E-09	0.999	2.89E-10	2	1.49E-10	5	2.09E-11

В случае  $\alpha \neq 1$  вычисления производились для диапазона  $r \in [0, 10]$ , при сравнении с результатами, полученными с помощью программы MVSTABLE, рассчитывались минимальные и максимальные значения абсолютной ошибки АЕ. Результаты вычислений представлены в Таблице 2.

В случае  $\alpha > 1$  наблюдается хорошая сопоставимость полученных результатов, при этом максимальные значения абсолютной ошибки АЕ соответствуют большим значениям  $r$ , в которых плотность уменьшается и вычисления с помощью программы MVSTABLE затруднены.

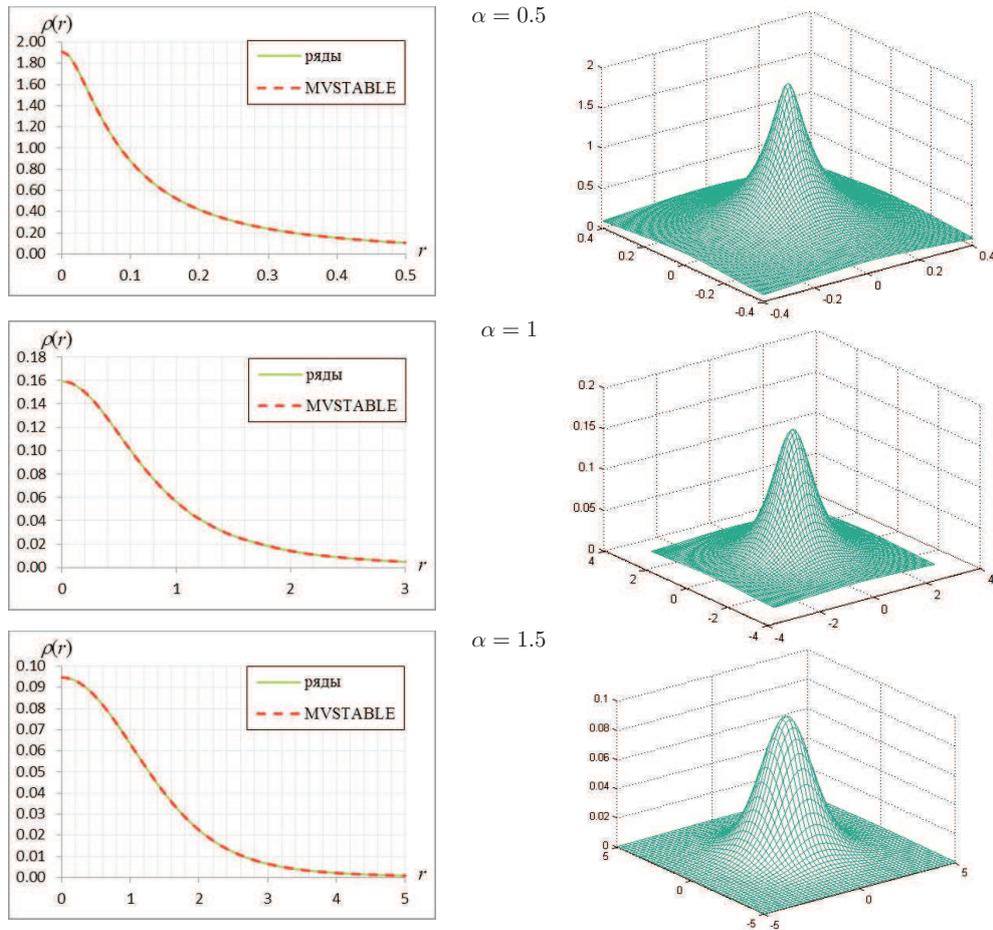


Рис. 3: Результаты вычислений плотности сферически симметричных устойчивых распределений

Таблица 2: Сравнение результатов вычислений плотности с помощью рядов и программы MVSTABLE при  $\alpha \neq 1$

$\alpha$	min AE	max AE	$\alpha$	min AE	max AE
0.1	4.27E+07	1.94E+17	1.1	1.92E-14	5.61E-09
0.2	1.25E-03	7.30E+04	1.2	5.06E-14	5.44E-09
0.3	1.51E-06	2.43E+01	1.3	1.15E-14	4.91E-09
0.4	8.55E-08	1.78E-01	1.4	1.94E-15	5.40E-09
0.5	1.71E-08	1.45E-04	1.5	9.90E-14	9.31E-10
0.6	2.12E-09	1.09E-05	1.6	2.14E-14	9.22E-10
0.7	3.10E-13	4.60E-07	1.7	4.47E-13	5.60E-08
0.8	3.19E-16	5.08E-08	1.8	1.40E-13	2.14E-08
0.9	1.07E-13	1.09E-08	1.9	9.29E-14	8.91E-10

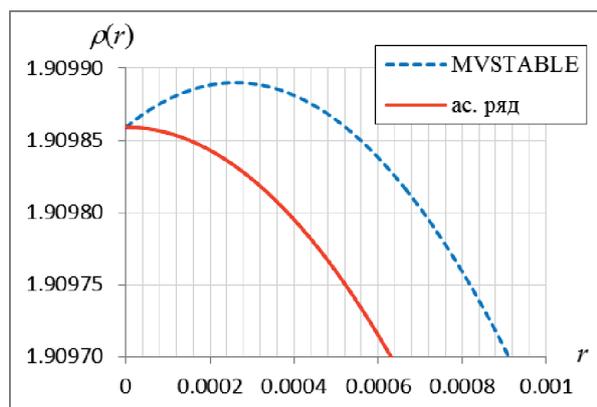


Рис. 4: Результаты вычисления плотности при  $\alpha = 0.5$

При  $\alpha < 1$  полученные ошибки существенно больше, при этом их максимальные значения соответствуют малым значениям  $r$ . На Рис. 4 представлены результаты вычисления плотности рассматриваемыми методами для  $\alpha = 0.5$  в окрестности точки  $r = 0$ . Заметим, что программа MVSTABLE смещает моду распределения, чем и обусловлено расхождение результатов. Таким образом, использование рядов позволяет вычислять плотность многомерных устойчивых распределений с большей точностью.

### Заключение

В статье предлагается алгоритм вычисления значений функции плотности сферически симметричных устойчивых распределений с помощью сходящихся и асимптотических рядов. Сравнение результатов работы алгоритма с приближенными значениями, полученными с помощью программы MVSTABLE, показало, что предлагаемый подход позволяет вычислять значения функции плотности устойчивых распределений с более высокой степенью точности.

### Список литературы

- [1] Бартењев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL: Ч.3. М.: Диалог-МИФИ, 2001. 368 с.
- [2] Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2001. 480 с.
- [3] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.
- [4] Кнут Д. Искусство программирования. В 3 томах. Т. 2. Получисленные алгоритмы. М: Вильямс, 2001. 788 с.

- [5] Abdul-Hamid H., Nolan J.P. Multivariate stable densities as functions of one dimensional projections // Journal of Multivariate Analysis. 1998. Vol. 67, № 1. Pp. 80–89. doi: 10.1006/jmva.1998.1755
- [6] John Nolan's stable distribution page [Электронный ресурс]. URL: <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/stable.html>
- [7] Nolan J.P. An overview of multivariate stable distributions [Электронный ресурс]. URL: <http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/overview.pdf>
- [8] Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications. Utrecht: VSP, 1999. 594 p.
- [9] Zolotarev V.M. Integral transformations of distributions and estimates of parameters of multidimensional spherically symmetric stable laws // In: Contributions to Probability. New York: Academic Press, 1981. Pp. 283–305.

#### Библиографическая ссылка

Алексеева А.Е. О вычислении значений функций плотности сферически симметричных устойчивых распределений с помощью сходящихся и асимптотических рядов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 65–76.

#### Сведения об авторах

**1. Алексеева Александра Евгеньевна**

аспирант кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*

ON CALCULATION OF VALUES OF SPHERICALLY SYMMETRIC  
STABLE DISTRIBUTIONS DENSITY FUNCTIONS USING  
CONVERGENT AND ASYMPTOTIC SERIES

**Alekseyeva Aleksandra Evgenyevna**

PhD student of Mathematical Statistics and System Analysis department,  
Tver State University

*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.*

---

*Received 20.09.2014, revised 27.09.2014.*

---

The paper introduces calculation algorithms of values of spherically symmetric stable distributions density functions using convergent and asymptotic series. Also defined intervals of the series applicability and their calculation accuracy depending on a type of program variables used. Variable precision arithmetic is used to decrease computational error.

**Keywords:** spherically symmetric stable distributions, density approximation, convergent and asymptotic series, variable precision arithmetic.

**Bibliographic citation**

Alekseeva A.E. On calculation of values of spherically symmetric stable distributions density functions using convergent and asymptotic series. *Vestnik TverGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 3, pp. 65–76. (in Russian)