УДК 510

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ЛОГИКИ КВАЗИАРНЫХ ПРЕДИКАТОВ[1]

Рыбаков М.Н.
Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 22.11.2014, после переработки 05.12.2014.

Строится перевод из языка первого порядка в язык логики квазиарных предикатов. Этот перевод сохраняет выполнимость формул в классах моделей, определенных на тех же множествах элементов. Как следствие, мы получаем, что логика квазиарных предикатов не является разрешимой, теория конечных моделей в языке логики квазиарных предикатов не является рекурсивно перечислимой, и так далее.

Ключевые слова: логика квазиарных предикатов, неразрешимость, рекурсивная перечислимость.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 17–32.

1. Введение

Эта статья возникла как продолжение обсуждений между ее автором и доктором физико-математических наук, профессором Николаем Степановичем Никитченко[2], которые имели место в IRIT[3] в ноябре 2013-го года, и содержит ответы на некоторые вопросы, возникшие в ходе этих обсуждений. Как следует из названия статьи, ее тема связана с логикой квазиарных предикатов [1]; дадим несколько предварительных пояснений.

В качестве формального языка для описания свойств отношений и функций, определенных на том или ином непустом множестве, в математике довольно часто используется язык классической логики предикатов, или, как его еще называют, язык первого порядка. Этот язык, с одной стороны, является довольно мощным средством для формализации многих условий, возникающих в математических исследованиях. Например, формальные аксиоматические системы для теории множеств описаны именно на этом языке (см. [7, 8]), а язык теории множеств лежит в основе, мягко говоря, очень многих математических теорий. Но, с другой стороны, имеется немало важных условий, которые невозможно выразить на языке логики предикатов, и много ситуаций, когда применение других языков оказывается более эффективным. Так, используя игры Эренфойхта (см. [4]) или теорему Мальцева о компактности (см. [5]), можно показать, что на языке первого порядка невозможно выразить, скажем, условие конечности множества элементов, условие

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 13–06–00861, 14–06–00298 и 14–01–93105.

[2]Это «русский» вариант «украинского» имени Микола Степанович Нікітченко.

[3]Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, находится в Тулузе и входит в Université Paul Sabatier.

связности, отношение достижимости в графе, условия четности и нечетности числа элементов в конечном множестве, и др. В качестве же альтернатив языку первого порядка для описания свойств различного рода моделей можно использовать, например, интуиционистский язык, различные модальные языки, дескриптивные языки и др.; эти языки имеют иные – по отношению к языку первого порядка – выразительные возможности, а эффективное использование некоторых из них может быть основано, например, на том, что для них оказываются алгоритмически разрешимы такие проблемы, аналоги которых для языка логики предикатов алгоритмически неразрешимы (см. [2]).

Язык логики квазиарных предикатов как раз и является еще одним из формальных языков, позволяющих описывать модели и их свойства. Укажем его особенности.

При построении языка классической логики предикатов предполагается, что для каждого отношения и каждой функции, описываемых средствами этого языка, определена местность (арность). Другими словами, предполагается, что то или иное отношение выполняется или не выполняется для списков, содержащих заранее зафиксированное число элементов; аналогичная ситуация и с функциями. Тем не менее, иногда возникают ситуации, когда отношение между элементами устанавливается для списков произвольной длины, то есть когда число элементов в списке может варьироваться; более того, значения некоторых элементов в списке могут быть и не определены. Например, такое возможно при работе программ, оперирующих списками элементов, и, скажем, такое свойство списка, как его упорядоченность, не требует заранее определять число элементов этого списка. Число аргументов функции также может быть быть варьируемым: например, функция выбора наибольшего или наименьшего элемента из списка не предполагает какого-либо определенного числа элементов этого списка.

Выходов из описанной ситуации много. Например, вместо одного отношения или одной функции можно использовать бесконечно много: для каждого натурального n – отдельное n-местное отношение или, соответственно, отдельную n-местную функцию. Или, например, можно считать, что значениями аргументов отношений и функций являются не сами объекты предметной области, а списки таких объектов. А можно – и именно этот подход мы будем рассматривать здесь – ввести понятие отношения и понятие функции без использования понятия местности.

Квазиарный предикат как раз и отличается от обычного тем, что не имеет определенной местности, и его истинностное значение определяется для произвольных списков элементов, а не только для списков, состоящих из фиксированного их числа. При этом предполагается, что элементы в списке имеют номера (или, как вариант, являются значениями определенных переменных) и допускается, что элементы с некоторыми номерами могут отсутствовать (в случае переменных – их значение может быть не определено). В этом смысле, скажем, три элемента a, b, c могут образовывать разные списки в зависимости от того, какие места в этих списках занимают, даже если они встречаются в том же порядке и по одному разу: так, если мы будем использовать `NULL` для обозначения элемента списка, значение которого не определено, то списки $\langle a, b, \mathtt{NULL}, c\rangle$, $\langle a, b, c, \mathtt{NULL}\rangle$ и $\langle \mathtt{NULL}, a, b, c\rangle$ считаются попарно различными. Для описания подобных моделей и можно использовать язык логики квазиарных предикатов.

Несмотря на отличия в подходе к определению понятия предиката, известно, что логика квазиарных предикатов погружается в классическую логику предикатов [1]. Это, по сути, означает, что любое условие, выразимое на языке логики квазиарных предикатов, можно промоделировать на классическом языке первого порядка. Здесь мы покажем, что верно и обратное: классическая логика предикатов погружается в логику квазиарных предикатов. При этом мы построим такой перевод формул, который сохраняет истинность формул в моделях с тем же множеством элементов, и, как следствие, извлечем результаты об алгоритмической неразрешимости некоторых проблем для логики квазиарных предикатов.

Отметим, что предложенный здесь подход к определению логики квазиарных предикатов несколько отличается от того, который используется, например, в [1]. Во-первых, мы не будем рассматривать многосортный язык, что избавит нас от большого количества технических деталей, не влияющих на приводимые результаты. Во-вторых, мы чуть иначе определим понятие квазиарного предиката: единственное отличие будет состоять в том, что мы исключим из рассмотрения ситуацию, когда значение квазиарного предиката на списке элементов не определено. Такой подход немного не соответствует «духу» [1], но все эти технические упрощения не понижают выразительности языка, а значит, если отказаться от них, то результаты тем более сохранятся.

2. Логика квазиарных предикатов

В этом разделе мы опишем синтаксис и семантику логики квазиарных предикатов; отметим, что хотя приводимые ниже определения и отличаются «по духу» от тех, что используются в работах [1], по сути же, мы меняем лишь систему обозначений.

2.1 Язык

Будем рассматривать язык логики квазиарных предикатов, который включает в себя следующее:

- существенные предметные переменные $x_1, x_2, x_3, \ldots$;
- несущественные предметные переменные $y_1, y_2, y_3, \ldots$;
- предикатные буквы $p_1, p_2, p_3, \ldots$;
- символы $\bot, \wedge, \vee, \to, \forall, R$;
- технические символы (скобки и запятая).

Множество существенных переменных обозначим посредством X, множество несущественных – посредством Y. Пусть также $V = X \cup Y$. Элементы множества V будем называть предметными переменными.

Забегая вперед, отметим, что несущественные переменные нужны для технических целей: они выполняют роль, близкую к роли «новых переменных» для формул классической логики предикатов, и требуются для некоторых преобразований формул, сохраняющих определенные семантические свойства. Механизм, позволяющий использовать несущественные переменные должным образом, будет описан ниже, когда мы перейдем к описанию семантики.

Понятие формулы в этом языке определяется рекурсивно следующим образом:

- выражение $\bot$ является формулой;
- если p_i – предикатная буква, то выражение p_i является формулой;
- если φ и ψ – формулы, то выражения $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ – тоже формулы;
- если φ – формула и $v \in V$, то выражение $\forall v\, \varphi$ – тоже формула;
- если φ – формула, $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n \in V$ и при этом $v_1, \ldots, v_n$ попарно различны, то выражение $R^{v_1,\ldots,v_n}_{u_1,\ldots,u_n}\varphi$ – тоже формула.

Формулы $\neg\varphi$, $\top$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ и $\exists v\, \varphi$ определяем как сокращения: $\neg\varphi = (\varphi \to \bot)$, $\top = \neg\bot$, $(\varphi \leftrightarrow \psi) = ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$, $\exists v\, \varphi = \neg\forall v\, \neg\varphi$.

Выражения вида $\forall v$ и $\exists v$ называем кванторами (соответственно, всеобщности и существования) по переменной v; выражение вида $R^{v_1,\ldots,v_n}_{u_1,\ldots,u_n}$ называем реноминацией переменных $v_1, \ldots, v_n$ переменными $u_1, \ldots, u_n$.

Множество всех формул в этом языке обозначим посредством FOq.

2.2 Семантика

Определение 1. *Пусть $D \neq \varnothing$. Частичной интерпретацией предметных переменных во множестве D будем называть функцию $\alpha : V \to D$.*

Замечание 1. Для частичной интерпретации не требуется, чтобы ее значение было определено для каждой переменной.

Если значение α на переменной v определено, то пишем «$!\alpha(v)$», если оно при этом равно a, то пишем «$\alpha(v) = a$», а если оно не определено, то пишем «$\neg!\alpha(v)$».

Множество всех частичных интерпретаций переменных из V во множестве D обозначим посредством ${}^{V}\!D$.

Определение 2. *Пусть $D \neq \varnothing$ и α и β – две частичные интерпретации предметных переменных в D. Будем говорить, что α и β различаются несущественно, если для всякой переменной $x_i \in X$*

- $!\alpha(x_i) \iff !\beta(x_i)$;
- $!\alpha(x_i) \implies \alpha(x_i) = \beta(x_i)$.

Отношение несущественного различия интерпретаций обозначим посредством $\simeq$, и утверждение, что α и β различаются несущественно, будем записывать как $\alpha \simeq \beta$.

Предложение 1. *Отношение $\simeq$ является эквивалентностью на множестве ${}^{V}\!D$.*

Доказательство. Следует непосредственно из определения отношения $\simeq$. □

Для каждой частичной интерпретации $\alpha \in {}^V\!D$ определим класс эквивалентности $[\alpha]$, положив

$$[\alpha] = \{\beta \in {}^V\!D : \beta \simeq \alpha\}.$$

Определение 3. *Пусть $D \neq \varnothing$. Подмножество $\boldsymbol{p}$ множества ${}^V\!D$ будем называть квазиарным предикатом на множестве D, если для всяких $\alpha, \beta \in {}^V\!D$ таких, что $\alpha \simeq \beta$, выполнена следующая эквивалентность:*

$$\alpha \in \boldsymbol{p} \iff \beta \in \boldsymbol{p}.$$

Другими словами, квазиарный предикат $\boldsymbol{p}$ – это объединение некоторого семейства классов эквивалентности по отношению $\simeq$, поскольку, как следует из определения,

$$\alpha \in \boldsymbol{p} \iff [\alpha] \subseteq \boldsymbol{p}.$$

Замечание 2. Возможно другое определение квазиарного предиката: функцию $\boldsymbol{p} : {}^V\!D \to \{0, 1\}$ называем квазиарным предикатом на непустом множестве D, если для всяких $\alpha, \beta \in {}^V\!D$ таких, что $\alpha \simeq \beta$, выполнено равенство $\boldsymbol{p}(\alpha) = \boldsymbol{p}(\beta)$. Здесь важно, что при этом не требуется, чтобы значение квазиарного предиката было определено для каждой частичной интерпретации, то есть квазиарный предикат рассматривается как частичная функция; именно такой подход используется в [1]. Но поскольку в конечном итоге будет важно определение отношения истинности, можно безо всякого ущерба ограничиться «всюду определенными» предикатами, что мы, по сути, и сделали.

Замечание 3. Отметим, что без ограничений общности можно было бы считать, что квазиарный предикат определен не на множестве ${}^V\!D$, а на множестве классов эквивалентности по отношению $\simeq$, то есть на множестве ${}^V\!D/\simeq$. При таком подходе квазиарный предикат являлся бы произвольным подмножеством множества ${}^V\!D/\simeq$.

Определение 4. *Пусть $D \neq \varnothing$. Интерпретацией предикатных букв языка логики квазиарных предикатов на множестве D будем называть функцию I, которая сопоставляет каждой предикатной букве p_i некоторый квазиарный предикат на D.*

Определение 5. *Упорядоченная пара $\mathfrak{M} = \langle D, I\rangle$ называется моделью языка логики квазиарных предикатов, если $D \neq \varnothing$ и I – интерпретация предикатных букв языка логики квазиарных предикатов на D.*

Определение 6. *Пусть $D \neq \varnothing$, пусть α и β – интепретации предметных переменных в D и пусть $U \subseteq V$. Интерпретации α и β называем неразличимыми вне множества U, если для всякой переменной $v \in V \setminus U$ выполнено равенство $\alpha(v) = \beta(v)$.*

Если α и β неразличимы вне множества U, то будем писать $\alpha \overset{U}{=} \beta$. Если при этом $U = \{v_1, \ldots, v_n\}$, то будем писать $\alpha \overset{v_1,\ldots,v_n}{=} \beta$.

В частности, получаем, что

$$\alpha \overset{\varnothing}{=} \beta \iff \alpha = \beta;$$
$$\alpha \overset{V}{=} \beta \iff \alpha \simeq \beta.$$

Теперь определим отношение истинности.

Определение 7. *Пусть* $\mathfrak{M} = \langle D, I\rangle$ *– модель языка логики квазиарных предикатов,* α *– интерпретация предметных переменных в* D, φ *– формула языка логики квазиарных предикатов. Рекурсией по построению формулы* φ *определим отношение* $\mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi$*:*

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{M} \not\models^{\alpha} \bot; & & \\
\mathfrak{M} \models^{\alpha} p_i & \leftrightharpoons & \alpha \in I(p_i); \\
\mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi' \wedge \varphi'' & \leftrightharpoons & \mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi' \text{ и } \mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi''; \\
\mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi' \vee \varphi'' & \leftrightharpoons & \mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi' \text{ или } \mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi''; \\
\mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi' \to \varphi'' & \leftrightharpoons & \mathfrak{M} \not\models^{\alpha} \varphi' \text{ или } \mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi''; \\
\mathfrak{M} \models^{\alpha} \forall v\, \varphi' & \leftrightharpoons & \text{для всякой интерпретации } \beta \text{ такой, что } \beta \overset{v}{=} \alpha \text{ и } !\beta(v), \text{ выполнено } \mathfrak{M} \models^{\beta} \varphi'; \\
\mathfrak{M} \models^{\alpha} R^{v_1,\ldots,v_n}_{u_1,\ldots,u_n}\, \varphi' & \leftrightharpoons & \text{для интерпретации } \beta \text{ такой, что } \beta \overset{v_1,\ldots,v_n}{=} \alpha \text{ и } \beta(v_i) = \alpha(u_i) \text{ для каждого } i \in \{1,\ldots,n\}, \text{ выполнено } \mathfrak{M} \models^{\beta} \varphi'.
\end{array}$$

Если $\mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi$, то говорим, что формула φ истинна в модели $\mathfrak{M}$ при интерпретации α; если $\mathfrak{M} \not\models^{\alpha} \varphi$, то говорим, что φ опровергается в $\mathfrak{M}$ при α.

Определение 8. *Пусть* $\mathfrak{M} = \langle D, I\rangle$ *– модель языка квазиарной логики предикатов. Тогда полагаем*

$$\mathfrak{M} \models \varphi \quad \leftrightharpoons \quad \mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi \text{ для каждой интерпретации } \alpha \in {}^{V}\!D.$$

Если $\mathfrak{M} \models \varphi$, то говорим, что формула φ истинна в модели $\mathfrak{M}$. Если же $\mathfrak{M} \not\models \varphi$, то говорим, что φ опровергается в $\mathfrak{M}$.

Теперь определим две логики квазиарных предикатов:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{QCLq} & = & \{\varphi \in FOq : \mathfrak{M} \models \varphi \text{ для каждой модели } \mathfrak{M}\}; \\
\mathbf{QCLq}_{fin} & = & \{\varphi \in FOq : \mathfrak{M} \models \varphi \text{ для каждой конечной модели } \mathfrak{M}\}.
\end{array}$$

3. Классическая логика предикатов

Для полноты изложения определим классическую логику предикатов, сохранив тот же «стиль» определений, что и выше.

3.1 Язык

Будем рассматривать язык логики предикатов, который включает в себя следующее:

- предметные переменные $x_1, x_2, x_3, \ldots$;
- предикатные буквы P^m_i, где $i, m \in \mathbb{N}^+$;
- символы $\bot, \wedge, \vee, \to, \forall$;

- технические символы (скобки и запятая).

Понятие формулы языка логики предикатов определяется рекурсивно следующим образом:

- выражение $\perp$ является формулой;
- если P_i^m – предикатная буква, $v_1, \ldots, v_m$ – предметные переменные (быть может, повторяющиеся), то выражение $P_i^m(v_1, \ldots, v_m)$ является формулой;
- если φ и ψ – формулы, то выражения $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ – тоже формулы;
- если φ – формула и v – предметная переменная, то выражение $\forall v\, \varphi$ – тоже формула.

Как и раньше, формулы $\neg\varphi$, $\top$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ и $\exists v\, \varphi$ определяем как обычные сокращения.

Множество всех формул в этом языке обозначим посредством FO.

3.2 Семантика

Определение 9. *Пусть $D \neq \varnothing$. Интерпретацией предикатных букв языка классической логики предикатов будем называть функцию I, которая сопоставляет каждой предикатной букве P_i^m некоторое m-местное отношение на D, то есть $I(P_i^m) \subseteq D^m$.*

Определение 10. *Упорядоченная пара $\mathfrak{M} = \langle D, I\rangle$ называется моделью языка классической логики предикатов, если $D \neq \varnothing$ и I – интерпретация предикатных букв языка классической логики предикатов.*

Определение 11. *Пусть $D \neq \varnothing$. Интерпретацией предметных переменных во множестве D будем называть функцию α, которая каждой предметной переменной сопоставляет элемент множества D.*

Для интерпретаций α и β и множества предметных переменных U определим отношение $\alpha \stackrel{U}{=} \beta$ так же, как это сделано выше.

Теперь определим отношение истинности.

Определение 12. *Пусть $\mathfrak{M} = \langle D, I\rangle$ – модель языка классической логики предикатов, α – интерпретация предметных переменных в D, φ – формула языка классической логики предикатов. Индукцией по построению формулы φ определим отношение $\mathfrak{M} \models^\alpha \varphi$:*

$$
\begin{array}{lcl}
\mathfrak{M} \not\models^\alpha \perp; & & \\
\mathfrak{M} \models^\alpha P_i^m(v_1, \ldots, v_m) & \leftrightharpoons & \langle \alpha(v_1) \ldots, \alpha(v_m)\rangle \in I(P_i^m); \\
\mathfrak{M} \models^\alpha \varphi' \wedge \varphi'' & \leftrightharpoons & \mathfrak{M} \models^\alpha \varphi' \text{ и } \mathfrak{M} \models^\alpha \varphi''; \\
\mathfrak{M} \models^\alpha \varphi' \vee \varphi'' & \leftrightharpoons & \mathfrak{M} \models^\alpha \varphi' \text{ или } \mathfrak{M} \models^\alpha \varphi''; \\
\mathfrak{M} \models^\alpha \varphi' \to \varphi'' & \leftrightharpoons & \mathfrak{M} \not\models^\alpha \varphi' \text{ или } \mathfrak{M} \models^\alpha \varphi''; \\
\mathfrak{M} \models^\alpha \forall v\, \varphi' & \leftrightharpoons & \text{для всякой интерпретации } \beta \text{ такой, что } \beta \stackrel{v}{=} \alpha, \text{ выполнено } \mathfrak{M} \models^\beta \varphi'.
\end{array}
$$

Если $\mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi$, то говорим, что формула φ истинна в модели $\mathfrak{M}$ при интерпретации α, если $\mathfrak{M} \not\models^{\alpha} \varphi$, то говорим, что φ опровергается в $\mathfrak{M}$ при α.

Определение 13. *Пусть $\mathfrak{M} = \langle D, I \rangle$ – модель языка классической логики предикатов. Тогда полагаем*

$$\mathfrak{M} \models \varphi \quad \leftrightharpoons \quad \mathfrak{M} \models^{\alpha} \varphi \text{ для каждой интерпретации } \alpha.$$

Если $\mathfrak{M} \models \varphi$, то говорим, что формула φ истинна в модели $\mathfrak{M}$. Если же $\mathfrak{M} \not\models \varphi$, то говорим, что φ опровергается в $\mathfrak{M}$.

Теперь определим две классические логики предикатов:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{QCL} & = & \{\varphi \in FO : \mathfrak{M} \models \varphi \text{ для каждой модели } \mathfrak{M}\}; \\ \mathbf{QCL}_{fin} & = & \{\varphi \in FO : \mathfrak{M} \models \varphi \text{ для каждой конечной модели } \mathfrak{M}\}. \end{array}$$

4. Перевод языка FO в язык FOq

Перевод из FOq в FO можно найти, например, в [1]. Наличие такого перевода показывает, что, по сути, все, что можно выразить на языке логики квазиарных предикатов, выражается и на языке классической логики предикатов. Таким образом, логика квазиарных предикатов устроена «не сложнее», чем классическая логика предикатов. Здесь мы построим «обратный» перевод.

Прежде всего, заметим, что достаточно рассматривать формулы языка логики предикатов от одной бинарной предикатной буквы, поскольку логика предикатов погружается в соответствующий фрагмент. Идею построения такого погружения можно найти, например, [3]. Именно, в [3] детально описано, как промоделировать несколько двухместных букв одной трехместной, а также, как промоделировать трехместную букву одной двухместной. В целом, из этого описания можно извлечь способ моделирования нескольких букв, местность каждой из которых не превосходит n, с помощью одной $(n+1)$-местной буквы, а также способ моделирования одной $(n+1)$-местной буквы с помощью одной n-местной буквы, при условии, что $n \geqslant 2$. Как следствие, получаем погружение классической логики предикатов в ее фрагмент от одной двухместной буквы. Детали оставляем читателю.

Теперь опишем перевод фрагмента FO от одной бинарной предикатной буквы P в FOq. Пусть p – предикатная буква языка логики квазиарных предикатов. Определим индуктивно перевод Tr:

$$\begin{array}{lcl} Tr(\bot) & = & \bot; \\ Tr(P(x_i, x_j)) & = & R^{x_1, x_2}_{y_i, y_j}\, p; \\ Tr(\varphi \wedge \psi) & = & Tr(\varphi) \wedge Tr(\psi); \\ Tr(\varphi \vee \psi) & = & Tr(\varphi) \vee Tr(\psi); \\ Tr(\varphi \to \psi) & = & Tr(\varphi) \to Tr(\psi); \\ Tr(\forall x_i\, \varphi) & = & \forall y_i\, Tr(\varphi). \end{array}$$

Перевод $Tr : FO \to FOq$ сохраняет такие свойства формул, как истинность во всех моделях языка, опровержимость в некоторой модели, опровержимость в некоторой конечной модели. Покажем это.

Лемма 1. *Пусть φ – замкнутая формула языка классической логики предикатов, $\mathfrak{M} = \langle D, I \rangle$ – модель для этого языка и $\mathfrak{M} \not\models \varphi$. Тогда существует модель $\mathfrak{M}' = \langle D, I' \rangle$ языка логики квазиарных предикатов такая, что $\mathfrak{M}' \not\models Tr(\varphi)$.*

Доказательство. Определим интерпретацию I' на букве p следующим образом:

$$I'(p) = \{\alpha \in {}^{V}D : !\alpha(x_1),\ !\alpha(x_2) \text{ и } \langle \alpha(x_1), \alpha(x_2) \rangle \in I(P)\}.$$

Для остальных предикатных букв полагаем значение I' равным пустому множеству (для определенности).

Заметим, что определение интерпретации I' корректно: если $\alpha \simeq \beta$ и $\alpha \in I'(p)$, то $!\alpha(x_1)$, $!\alpha(x_2)$ и $\langle \alpha(x_1), \alpha(x_2) \rangle \in I(P)$, а поскольку x_1 и x_2 – существенные переменные, то $\beta(x_1) = \alpha(x_1)$ и $\beta(x_2) = \alpha(x_2)$, откуда получаем, что $\beta \in I'(p)$.

Пусть a – некоторый элемент множества D. Для каждой интерпретации α предметных переменных языка классической логики предикатов во множестве D определим интерпретацию $\overline{\alpha}$ предметных переменных языка логики квазиарных предикатов, положив для каждого $i \in \mathbb{N}^+$

$$\overline{\alpha}(x_i) = a, \quad \overline{\alpha}(y_i) = \alpha(x_i).$$

Покажем, что для всякой подформулы ψ формулы φ и всякой интерпретации α

$$\mathfrak{M} \models^{\alpha} \psi \iff \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi).$$

Доказательство проведем индукцией по построению ψ.

Пусть $\psi = \bot$. Тогда $Tr(\psi) = \bot$, и требуемая эквивалентность выполняется тривиально.

Пусть $\psi = P(x_i, x_j)$. Тогда $Tr(\psi) = R^{x_1, x_2}_{y_i, y_j}\, p$. В этом случае получаем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models^{\alpha} P(x_i, x_j) &\iff \langle \alpha(x_i), \alpha(x_j) \rangle \in I(P) \\ &\iff \langle \overline{\alpha}(y_i), \overline{\alpha}(y_j) \rangle \in I(P) \\ &\iff \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} R^{x_1, x_2}_{y_i, y_j}\, p. \end{aligned}$$

Пусть теперь формулы ψ' и ψ'' таковы, что для всякой интерпретации α

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models^{\alpha} \psi' &\iff \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi'); \\ \mathfrak{M} \models^{\alpha} \psi'' &\iff \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi''). \end{aligned}$$

Если $\psi = \psi' \wedge \psi''$, то $Tr(\psi) = Tr(\psi') \wedge Tr(\psi'')$, и тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models^{\alpha} \psi' \wedge \psi'' &\iff \mathfrak{M} \models^{\alpha} \psi' \ \text{ и } \ \mathfrak{M} \models^{\alpha} \psi'' \\ &\iff \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi') \ \text{ и } \ \mathfrak{M} \models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi'') \\ &\iff \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi') \wedge Tr(\psi''). \end{aligned}$$

Если $\psi = \psi' \vee \psi''$, то $Tr(\psi) = Tr(\psi') \vee Tr(\psi'')$, и тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models^{\alpha} \psi' \vee \psi'' &\iff \mathfrak{M} \models^{\alpha} \psi' \ \text{ или } \ \mathfrak{M} \models^{\alpha} \psi'' \\ &\iff \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi') \ \text{ или } \ \mathfrak{M} \models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi'') \\ &\iff \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi') \vee Tr(\psi''). \end{aligned}$$

Если $\psi = \psi' \to \psi''$, то $Tr(\psi) = Tr(\psi') \to Tr(\psi'')$, и тогда

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \models^{\alpha} \psi' \to \psi'' &\iff \mathfrak{M} \not\models^{\alpha} \psi' \ \text{ или } \ \mathfrak{M} \models^{\alpha} \psi'' \\
&\iff \mathfrak{M}' \not\models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi') \ \text{ или } \ \mathfrak{M} \models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi'') \\
&\iff \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} Tr(\psi') \to Tr(\psi'').
\end{aligned}$$

Пусть теперь $\psi = \forall x_i\, \psi'$. Тогда $Tr(\psi) = \forall y_i\, Tr(\psi')$.

Если $\mathfrak{M} \not\models^{\alpha} \forall x_i\, \psi'$, то существует интерпретация β такая, что $\beta \stackrel{x_i}{=} \alpha$ и $\mathfrak{M} \not\models^{\beta} \psi'$. Но тогда, во-первых, $\mathfrak{M}' \not\models^{\overline{\beta}} Tr(\psi')$, а во-вторых, $\overline{\beta} \stackrel{y_i}{=} \overline{\alpha}$, поэтому $\mathfrak{M}' \not\models^{\overline{\alpha}} \forall y_i\, Tr(\psi')$.

Если $\mathfrak{M}' \not\models^{\overline{\alpha}} \forall y_i\, Tr(\psi')$, то существует γ такая, что $\gamma \stackrel{y_i}{=} \overline{\alpha}$, $!\gamma(y_i)$ и $\mathfrak{M}' \not\models^{\gamma} Tr(\psi')$. Пусть β – интерпретация, определенная следующим образом: $\beta(x_k) = \gamma(y_k)$ для каждого $k \in \mathbb{N}^+$. Тогда $\overline{\beta} = \gamma$, то есть $\mathfrak{M}' \not\models^{\overline{\beta}} Tr(\psi')$, а значит, $\mathfrak{M} \not\models^{\beta} \psi'$. Осталось заметить, что $\beta \stackrel{x_i}{=} \alpha$, и поэтому $\mathfrak{M} \not\models^{\alpha} \forall x_i\, \psi'$.

Как следствие получаем, что $\mathfrak{M}' \not\models Tr(\varphi)$. □

Теперь докажем, что если $Tr(\varphi)$ опровергается в некоторой модели для языка логики квазиарных предикатов, то φ опровергается в некоторой модели для языка классической логики предикатов, причем можно потребовать, чтобы мощности носителей этих моделей совпадали. Нам потребуются вспомогательные определения и утверждения.

Пусть ψ – некоторая формула фрагмента языка классической логики предикатов от бинарной буквы P и пусть D – непустое множество. Частичные интерпретации $\alpha, \beta \in {}^{V}\!D$ будем называть ψ-согласованными, если

- $\alpha \simeq \beta$;
- для каждого $i \in \mathbb{N}^+$ такого, что переменная x_i входит свободно в ψ, выполняется равенство $\alpha(y_i) = \beta(y_i)$.

Другими словами, в согласованных интерпретациях происходит «согласование» значений не только на существенных переменных языка, но и на тех несущественных переменных, которыми были «заменены» свободные переменные формулы ψ при построении формулы $Tr(\psi)$.

Лемма 2. *Пусть ψ – формула языка классической логики предикатов, $\mathfrak{M} = \langle D, I\rangle$ – модель для языка логики квазиарных предикатов. Тогда для любых частичных ψ-согласованных интерпретаций α и β*

$$\mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi) \iff \mathfrak{M} \models^{\beta} Tr(\psi).$$

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по построению формулы ψ.

Если $\psi = \bot$, то $Tr(\psi) = \bot$, и требуемая эквивалентность выполняется тривиально.

Если $\psi = P(x_i, x_j)$, то $Tr(\psi) = R^{x_1,x_2}_{y_i,y_j}\, p$. Пусть α и β – произвольные ψ-согласованные интерпретации. Реноминация вынуждает менять значения только на существенных переменных x_1 и x_2, при этом в силу ψ-согласованности α и β, эти значения меняются одинаково. На других же существенных переменных языка значения α и β не различаются, так как $\alpha \simeq \beta$, а поэтому

$$\mathfrak{M} \models^{\alpha} R^{x_1,x_2}_{y_i,y_j}\, p \iff \mathfrak{M} \models^{\beta} R^{x_1,x_2}_{y_i,y_j}\, p.$$

Индукционный шаг, когда ψ является конъюнкцией, дизъюнкцией и импликацией формул, тривиален, поскольку не требует изменения интерпретаций; его рассмотрение опускаем.

Пусть $\psi = \forall x_i\, \psi'$. Тогда $Tr(\psi) = \forall y_i\, Tr(\psi')$. Пусть α и β – произвольные ψ-согласованные интерпретации. Если $\mathfrak{M} \not\models^{\alpha} \forall y_i\, Tr(\psi')$, то существует интерпретация α' такая, что $\alpha' \overset{y_i}{=} \alpha$, $!\alpha'(y_i)$ и $\mathfrak{M} \not\models^{\alpha'} Tr(\psi')$. Определим интерпретацию β', положив $\beta' \overset{y_i}{=} \beta$ и $\beta'(y_i) = \alpha'(y_i)$. Тогда α' и β' оказываются ψ'-согласованными, а поэтому $\mathfrak{M} \not\models^{\beta'} Tr(\psi')$, а следовательно, $\mathfrak{M} \not\models^{\beta} \forall y_i\, Tr(\psi')$. Аналогично доказывается, что если $\mathfrak{M} \not\models^{\beta} \forall y_i\, Tr(\psi')$, то $\mathfrak{M} \not\models^{\alpha} \forall y_i\, Tr(\psi')$. □

Лемма 3. *Пусть φ – замкнутая формула языка классической логики предикатов, $\mathfrak{M} = \langle D, I\rangle$ – модель для языка логики квазиарных предикатов и $\mathfrak{M} \not\models Tr(\varphi)$. Тогда существует модель $\mathfrak{M}' = \langle D, I'\rangle$ языка классической логики предикатов такая, что $\mathfrak{M}' \not\models \varphi$.*

Доказательство. Пусть α_0 – частичная интерпретация такая, что $\mathfrak{M} \not\models^{\alpha_0} Tr(\varphi)$. При этом, в силу леммы 2 и замкнутости формулы φ, можем считать, что $!\alpha(y_i)$ для каждой несущественной переменной y_i.

Определим интерпретацию I' на предикатной букве P, положив для всяких $a, b \in D$

$$\langle a,b\rangle \in I'(P) \;\leftrightharpoons\; \mathfrak{M} \models^{\alpha} p, \text{ где } \alpha \text{ определяется следующим образом: } \alpha \overset{x_1,x_2}{=} \alpha_0,\ \alpha(x_1) = a \text{ и } \alpha(x_2) = b.$$

Для остальных предикатных букв полагаем значение I' равным пустому множеству (для определенности).

Для каждой интерпретации α такой, что $\alpha \simeq \alpha_0$, определим интерпретацию $\overline{\alpha}$, положив $\overline{\alpha}(x_i) = \alpha(y_i)$ для каждого $i \in \mathbb{N}^+$.

Покажем, что для всякой подформулы ψ формулы φ и для всякой интерпретации α такой, что $\alpha \simeq \alpha_0$,

$$\mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi) \iff \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} \psi.$$

Доказательство проведем индукцией по построению ψ.

Пусть $\psi = \bot$. Тогда $Tr(\psi) = \bot$, и требуемая эквивалентность выполняется тривиально.

Пусть $\psi = P(x_i, x_j)$. Тогда $Tr(\psi) = R^{x_1,x_2}_{y_i,y_j}\, p$. Пусть частичная интерпретация α такова, что $\alpha \simeq \alpha_0$. В этом случае получаем:

$$\mathfrak{M} \models^{\alpha} R^{x_1,x_2}_{y_i,y_j}\, p \iff \mathfrak{M} \models^{\beta} p, \text{ где } \beta \text{ определяется следующим образом: } \beta \overset{x_1,x_2}{=} \alpha,\ \beta(x_1) = \alpha(y_i) \text{ и } \beta(x_2) = \alpha(y_j).$$

Определим интерпретацию β', положив $\beta' \overset{x_1,x_2}{=} \alpha_0$, $\beta'(x_1) = \beta(x_1)$ и $\beta'(x_2) = \beta(x_2)$. Заметим, что $\beta' \simeq \beta$. Действительно, на существенных переменных x_1 и x_2 значения интерпретаций β' и β совпадают по определению β', а если $i \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1,2\}$, то

$$\beta'(x_i) = \alpha_0(x_i) = \alpha(x_i) = \beta(x_i),$$

откуда и следует, что $\beta' \simeq \beta$. Тогда

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{M} \models^{\beta} p & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M} \models^{\beta'} p, & \text{так как } \beta' \simeq \beta, \\
& \Longleftrightarrow & \langle \beta'(x_1), \beta'(x_2) \rangle \in I'(P), & \text{так как } \beta' \overset{x_1,x_2}{=} \alpha_0, \\
& \Longleftrightarrow & \langle \alpha(y_i), \alpha(y_j) \rangle \in I'(P), & \text{так как } \beta'(x_1) = \alpha(y_i),\ \beta'(x_2) = \alpha(y_j), \\
& \Longleftrightarrow & \langle \overline{\alpha}(x_i), \overline{\alpha}(x_j) \rangle \in I'(P), & \text{так как } \overline{\alpha}(x_i) = \alpha(y_i),\ \overline{\alpha}(x_j) = \alpha(y_j), \\
& \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} P(x_i, x_j). &
\end{array}$$

Таким образом, мы получаем, что

$$\mathfrak{M} \models^{\alpha} R^{x_1,x_2}_{y_i,y_j}\, p \iff \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} P(x_i, x_j).$$

Пусть теперь формулы ψ' и ψ'' таковы, что для всякой интерпретации α такой, что $\alpha \simeq \alpha_0$,

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi') & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} \psi'; \\
\mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi'') & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} \psi''.
\end{array}$$

Пусть α – частичная интерпретация и при этом $\alpha \simeq \alpha_0$.

Если $\psi = \psi' \wedge \psi''$, то $Tr(\psi) = Tr(\psi') \wedge Tr(\psi'')$, и тогда

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi' \wedge \psi'') & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi') \text{ и } \mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi'') \\
& \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} \psi' \ \text{ и } \ \mathfrak{M} \models^{\overline{\alpha}} \psi'' \\
& \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} \psi' \wedge \psi''.
\end{array}$$

Если $\psi = \psi' \vee \psi''$, то $Tr(\psi) = Tr(\psi') \vee Tr(\psi'')$, и тогда

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi' \vee \psi'') & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi') \text{ или } \mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi'') \\
& \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} \psi' \ \text{ или } \ \mathfrak{M} \models^{\overline{\alpha}} \psi'' \\
& \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} \psi' \vee \psi''.
\end{array}$$

Если $\psi = \psi' \to \psi''$, то $Tr(\psi) = Tr(\psi') \to Tr(\psi'')$, и тогда

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi' \to \psi'') & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M} \not\models^{\alpha} Tr(\psi') \text{ или } \mathfrak{M} \models^{\alpha} Tr(\psi'') \\
& \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}' \not\models^{\overline{\alpha}} \psi' \ \text{ или } \ \mathfrak{M} \models^{\overline{\alpha}} \psi'' \\
& \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}' \models^{\overline{\alpha}} \psi' \to \psi''.
\end{array}$$

Пусть теперь $\psi = \forall x_i\, \psi'$. Тогда $Tr(\psi) = \forall y_i\, Tr(\psi')$.

Если $\mathfrak{M} \not\models^{\alpha} \forall y_i\, Tr(\psi')$, то существует интерпретация β такая, что $\beta \overset{y_i}{=} \alpha$, $!\beta(y_i)$ и $\mathfrak{M} \not\models^{\beta} \psi'$. Но тогда $\beta \simeq \alpha \simeq \alpha_0$, и поэтому $\mathfrak{M}' \not\models^{\overline{\beta}} \psi'$. Кроме того, $\overline{\beta} \overset{x_i}{=} \overline{\alpha}$, а значит, $\mathfrak{M}' \not\models^{\overline{\alpha}} \forall x_i\, \psi'$.

Если $\mathfrak{M}' \not\models^{\overline{\alpha}} \forall x_i\, \psi'$, то существует γ такая, что $\gamma \stackrel{x_i}{=} \overline{\alpha}$ и $\mathfrak{M}' \not\models^{\gamma} \psi'$. Пусть β – интерпретация, определенная следующим образом: $\beta \stackrel{y_i}{=} \alpha$, $\beta(y_i) = \gamma(x_i)$. Тогда $\overline{\beta} = \gamma$, то есть $\mathfrak{M}' \not\models^{\overline{\beta}} \psi'$, а значит, $\mathfrak{M} \not\models^{\beta} Tr(\psi')$, и следовательно, $\mathfrak{M} \not\models^{\alpha} \forall y_i\, Tr(\psi')$.

Как следствие получаем, что $\mathfrak{M}' \not\models^{\alpha_0} \varphi$. □

Сделанные наблюдения позволяют получить следующую теорему, которая, с одной стороны, является «технической», но, с другой стороны, по сути, является ключевым утверждением в контексте данной работы.

Теорема 1. *Пусть φ – замкнутая формула фрагмента языка логики предикатов, содержащего лишь одну бинарную предикатную букву. Тогда*

$$\begin{array}{lcl} \varphi \in \mathbf{QCL} & \iff & Tr(\varphi) \in \mathbf{QCLq}; \\ \varphi \in \mathbf{QCL}_{fin} & \iff & Tr(\varphi) \in \mathbf{QCLq}_{fin}. \end{array}$$

Доказательство. Следует непосредственно из лемм 1 и 3. □

5. Аналоги теоремы Черча и теоремы Трахтенброта

Как обычно, если определена некоторая логика (множество формул) L, то формулу φ языка логики L называем L-выполнимой, если $\neg\varphi \notin L$. Теорема 1 позволяет сделать вывод о том, что проблемы истинности и выполнимости классических формул в различных классах моделей рекурсивно сводятся к проблемам истинности и выполнимости формул языка логики квазиарных предикатов в «почти тех же» классах моделей (по крайней мере, мы можем говорить моделях с теми же носителями).

Ниже мы покажем, что для логики квазиарных предикатов справедливы аналоги теоремы Черча и теоремы Трахтенброта. Для этого нам понадобятся понятия алгоритмической разрешимости и рекурсивной перечислимости множеств; напомним их. Пусть X – подмножество некоторого универсального множества U. Множество X называется разрешимым, если существует алгоритм A такой, что для всякого $x \in U$

$$A(x) \quad = \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{если } x \in X, \\ 0, & \text{если } x \notin X. \end{array} \right.$$

Множество X называется рекурсивно перечислимым, если $X = \varnothing$ или существует алгоритм A, последовательно выписывающий (быть может, с повторениями) все элементы множества X, то есть $X = \{A(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Замечание 4. Когда мы имеем дело с формулами, то в качестве U можно брать множество всех формул рассматриваемого языка (или, как вариант, множество всех слов в этом языке). При этом возникает техническое затруднение: алгоритмы работают со словами в конечных алфавитах, в то время как для определения понятия формулы мы использовали бесконечно много переменных и бесконечно много предикатных букв. Это затруднение легко снимается, если закодировать индексы предметных переменных и предикатных букв в некотором конечном алфавите (например, десятичными записями).

Более детальную информацию о теории алгоритмов и, в частности, об используемых здесь понятиях алгоритмической разрешимости и рекурсивной перечислимости читатель может найти, например, в [3, 6, 10, 11].

Первая эквивалентность теоремы 1 позволяет получить для **QCLq** аналог теоремы Черча о неразрешимости классической логики предикатов, см. [3, 6].

Теорема 2. *Проблема принадлежности формул логике* **QCLq** *алгоритмически неразрешима. При этом проблема* **QCLq***-выполнимости не является рекурсивно перечислимой.*

Замечание 5. Проблема принадлежности формул логике **QCLq** является рекурсивно перечислимой, так как существует погружение логики **QCLq** в рекурсивно перечислимую логику **QCL**, см., например, [1].

Вторая эквивалентность теоремы 1 позволяет получить для $\mathbf{QCLq}_{fin}$ аналог теоремы Трахтенброта [9].

Теорема 3. *Проблема* $\mathbf{QCLq}_{fin}$*-выполнимости алгоритмически неразрешима. При этом проблема принадлежности формул логике* $\mathbf{QCLq}_{fin}$ *не является рекурсивно перечислимой.*

Замечание 6. Проблема $\mathbf{QCLq}_{fin}$-выполнимости является рекурсивно перечислимой, так как существует погружение логики $\mathbf{QCLq}_{fin}$ в логику $\mathbf{QCL}_{fin}$, что следует, например, из [1].

6. Несколько замечаний

Конечно, перевод Tr можно расширить на весь язык, а не только на фрагмент от одной бинарной буквы. Тогда мы получим погружение классической логики предикатов в логику квазиарных предикатов «напрямую». Расширение этого погружения позволит получить разрешимые фрагменты логики квазиарных предикатов. Так, например, если расширить Tr, положив для всякой одноместной буквы P_i

$$Tr(P_i(x_j)) \;=\; R^{x_1}_{y_j}\, p_i,$$

то мы сможем погрузить логику одноместных предикатов в **QCLq**. Соответствующий фрагмент **QCLq**, как следствие, оказывается разрешимым; см. [3].

Другое обобщение – включить в язык функциональные знаки и константы. Результаты в этом случае также ожидаемы, поскольку функциональные знаки можно моделировать в языке без оных.

Отметим, что во всех указанных случаях можно модифицировать доказательства, распространив их на случай определений моделей для языка логики квазиарных предикатов, данных в [1]. Отличие состоит в том, что в [1] допускается ситуация, когда значение квазиарного предиката на частичной интерпретации не определено, но, как уже отмечалось, существенных изменений в приведенные выше рассуждения такое отличие не вносит.

7. Благодарности

Автор благодарен Н. С. Никитченко за интересные обсуждения, связанные с рассмотренной здесь тематикой, в частности, за знакомство автора с логикой квазиарных предикатов и за обсуждение представленных здесь результатов. Автор благодарен всем участникам научного семинара по математической логике, руководителем которого является А. В. Чагров, за их внимание и проявленный интерес к представленным в данной работе результатам, за интересные обсуждения и полезные замечания. Автор благодарен М. И. Дехтярю за его внимание к результатам работы и советы по улучшению текста. Автор благодарен В. Б. Шехтману и С. В. Соловьеву за возможности, открывшиеся автору в связи с участием в руководимом ими научном проекте: благодаря им автор познакомился со многими интересными учеными и проблематикой, которой они занимаются; в их числе и Н. С. Никитченко.

Список литературы

[1] Nokitchenko M.S., Timofieiev V.G. Satisfiability and validity problems in many-sorted composition-nominative pure predicate logics // Communications in Computer and Information Science. Vol. 347. ICT in Education, Research, and Industrial Applications. Springer, 2013. Pp. 89–110.

[2] Handbook of Modal Logic. Ed. by P. Blackburn, J. van Benthem, F. Wolter. Elsevier, 2007. 1231 p.

[3] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994. 396 с.

[4] Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. 4-е изд., испр. М.: Издательство МЦНМО, 2012. 240 с.

[5] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

[6] Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973. 480 с.

[7] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

[8] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971. 320 с.

[9] Трахтенброт Б.А. Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах // Доклады Академии Наук СССР. 1950. Т. 70, № 4. С. 569–572.

[10] Успенский В.А., Семенов А.Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М.: Наука, 1987. 288 с.

[11] Шенфилд Дж. Степени неразрешимости. М., Наука, 1977. 192 с.

Библиографическая ссылка

Рыбаков М.Н. Неразрешимость логики квазиарных предикатов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 17–32.

Сведения об авторах

1. **Рыбаков Михаил Николаевич**
доцент кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

ON UNDECIDABILITY OF LOGIC OF QUASIARY PREDICATES

Rybakov Mikhail Nikolaevich
Associate professor of Functional Analysis and Geometry department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 22.11.2014, revised 05.12.2014.

A translation from the first-order language to the language of the logic of quasiary predicates is constructed. The translation preserves satisfiability of formulas in classes of models defined on the same sets of elements. As a corollary we obtain that the logic of quasiary predicates is undecidable, the finite model theory of quasiary predicates is not recursively enumerable, etc.

Keywords: logic of quasiary predicates, undecidability, recursive enumerability.

Bibliographic citation

Rybakov M.N. On undecidability of logic of quasiary predicates. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 4, pp. 17–32. (in Russian)