

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ ЖЕСТКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНО-ПРОТЯЖЕННОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ И МЕТОДЫ ЕЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рябова О.А., Зингерман К.М.
Кафедра вычислительной математики

Поступила в редакцию 06.07.2009, после переработки 20.07.2009.

Рассматривается задача о распределении напряжений в упругом теле при изменении размеров возникающих в теле жестких включений для случая конечных плоских деформаций. Решение этой задачи позволяет моделировать возникновение кристаллических областей в резиноподобном материале.

The problem of stress distribution in elastic solids at change of the sizes of rigid inclusions, arising in a solid, is considered under the conditions of finite plain strains. The solution of this problem allows to model the origination of crystal areas in a rubber-like material.

Ключевые слова: конечные плоские деформации, упругое тело, жесткие включения.

Keywords: finite plain strains, elastic solid, rigid inclusions.

Введение

Рассматривается при конечных плоских деформациях задача о напряженно-деформированном состоянии упругого тела при изменении размеров возникших в нем двух жестких круговых включений. Решение этой задачи позволяет моделировать возникновение кристаллических областей в резиноподобном материале при его нагружении и учитывать собственные деформации этих кристаллических областей [1]. При кристаллизации модуль упругости резин возрастает в 100 – 1000 раз [2], что позволяет при расчете напряженно-деформированного состояния рассматривать кристаллические области как жесткие включения. Вместе с тем, кристаллизация сопровождается и собственными деформациями, в частности, изменением объема [2].

1. Постановка задачи

Имеется бесконечно-протяженное нелинейно-упругое тело. В начальном (ненапряженном) состоянии в теле отсутствуют напряжения и деформации. Затем, под воздействием внешней начальной нагрузки, приложенной к телу, в теле возникают начальные большие напряжения и деформации. Тело переходит в промежуточное состояние. В теле возникают жесткие включения. Их возникновение не меняет

напряженно-деформационное состояние в оставшейся части тела. Далее радиус каждого включения меняется на заданную величину. При этом происходит смещение частиц тела на границе включений. В результате этого в теле в окрестности включений возникают большие дополнительные деформации и соответствующие им напряжения, которые накладываются на начальные деформации и напряжения. Тело переходит в конечное состояние. Динамические эффекты, вызванные изменением размера, не учитываются.

Обозначим начальное состояние как нулевое (ему соответствует индекс 0), промежуточное состояние как первое (индекс 1), конечное состояние обозначим индексом 2. Математическую постановку задачи будем рассматривать в координатах промежуточного состояния. Используем следующие обозначения:

- $\overset{1}{\nabla}$ — градиент;
- \mathbf{u}_2 — вектор перемещений;
- $\sigma_{0,2}$ — тензор полных истинных напряжений при переходе из 0-го состояния в 2,
- $\sigma_{0,2}^\infty$ — тензор истинных напряжений на бесконечности;
- $\Psi_{i,j}$ — аффинор деформаций при переходе из i -го состояния в j ;
- $\mathbf{F}_{0,2}$ — тензор меры, характеризующий деформации $\mathbf{F}_{0,2} = \Psi_{0,2}^* \cdot \Psi_{0,2}$;
- $\overset{1}{\Sigma}_{0,2}$ — тензор обобщенных полных напряжений в базисе 1-го состояния; $\overset{1}{\Sigma}_{0,2} = (1 + \Delta_{0,2}) \Psi_{1,2}^{*-1} \cdot \sigma_{0,2} \cdot \Psi_{1,2}^{-1}$;
- Γ — граница включения.

С учетом введенных обозначений математическая постановка задачи имеет вид:

уравнение равновесия

$$\overset{1}{\nabla} \cdot \left[(1 + \Delta_{0,1})^{-1} \overset{1}{\Sigma}_{0,2} \cdot \Psi_{1,2} \right] = 0; \quad (1)$$

граничные условия

$$\mathbf{u}_2|_\Gamma = \tilde{u}_2, \quad (2)$$

где \tilde{u}_2 - заданное перемещение;

$$\sigma_{0,2}|_\infty = \sigma_{0,2}^\infty; \quad (3)$$

определяющее соотношение для потенциала Муни [5]

$$\sigma_{0,2} = \frac{\mu}{2} \{ (1 + \beta) \mathbf{F}_{0,2} + (1 - \beta) [(\mathbf{F}_{0,2} : \mathbf{I}) \mathbf{F}_{0,2} - \mathbf{F}_{0,2}^2] \} - p_{0,2} \mathbf{I}, \quad (4)$$

Частным случаем потенциала Муни при $\beta = 1$ является потенциал Трелоара

$$\sigma_{0,2} = \mu \mathbf{F}_{0,2} - p_{0,2} \mathbf{I}; \quad (5)$$

геометрические соотношения

$$\det \Psi_{i,j} = 1 + \Delta_{i,j}; \quad (6)$$

$$\Psi_{0,2} = \Psi_{0,1} \cdot \Psi_{1,2}. \quad (7)$$

2. Методы решения задачи

Для решения задачи использован метод последовательных приближений. В качестве параметра q выбрано отношение σ_{max}/μ , где $\sigma_{max} = \max|\sigma_{i,j}^\infty|$.

Решение задачи ищется в перемещениях в виде ряда

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} + \dots, \quad \mathbf{u}^{(i)} \sim q^{i-1}, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \dots, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \sim q^{i-1}, \quad (9)$$

$$p = p^{(0)} + p^{(1)} + \dots, \quad p^{(i)} \sim q^{i-1}. \quad (10)$$

Здесь нижний индекс, показывающий номер состояния, не указывается. Таким образом, решение исходной нелинейной задачи сводится к последовательному решению линеаризованных задач.

Эти задачи решаются методом Мусхелишвили [6].

Мусхелишвили вводит в рассмотрение комплексную переменную $z = x + iy$.

Также вводится функция w – комплексное представление вектора перемещения для каждого приближения; $w = u + iv$, где u и v компоненты вектора перемещения для рассматриваемого приближения. Решение задачи ищется в виде

$$w = w_{\text{одн.}} + w_{\text{част.}}, \quad (11)$$

где $w_{\text{одн.}}$ – решение однородного уравнения, а $w_{\text{част.}}$ – некоторое частное решение линеаризованных уравнений равновесия. Решение однородного уравнения ищется в виде

$$w_{\text{одн.}} = \frac{1}{2G} \left[\kappa \int \Phi(z) dz - z \overline{\Phi'(z)} - \int \Psi(z) dz \right], \quad (12)$$

где $\Phi(z), \Psi(z)$ – функции, аналитические в области, занимаемой телом. Здесь и далее индекс, указывающий номер приближения, опущен.

Напряжения ищутся по формулам

$$S_I = (\sigma_{11} + \sigma_{22})_{\text{одн.}} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad (13)$$

$$S_{II} = (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})_{\text{одн.}} = -2[\overline{\Psi(z)} + z\overline{\Phi'(z)}], \quad (14)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{d\varphi}{dz}; \quad \Psi(z) = \frac{d\psi}{dz}.$$

Таким образом, нахождение решения линейной задачи сводится к отысканию функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, которые определяются из граничного условия и условия на бесконечности.

Отобразим бесконечную часть плоскости z на область $|\xi| > 1$ соотношением $z = \omega(\xi)$, окружность $|\xi| = 1$ обозначим γ . Если σ – произвольная точка на окружности γ , а $\varphi(\sigma), \varphi'(\sigma), \psi(\sigma)$ – граничные значения при $\xi \rightarrow \sigma$ извне γ , то граничное условие примет вид:

$$\kappa\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2\mu g, \quad (15)$$

где g – заданная функция на контуре, который определяется заданным перемещением, условием на бесконечности и видом частного решения для данного приближения. [3]

Если найти функцию $\varphi(\xi)$, то функцию $\psi(\xi)$ можно вычислить непосредственно из граничного условия.

Переходя к сопряженным значениям, граничное условие можно записать так:

$$\overline{\kappa\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) - \psi(\sigma) = 2\mu\bar{g}. \quad (16)$$

Тогда, находя интеграл типа Коши от левой и правой части равенства, получим

$$\frac{\kappa}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\varphi(\sigma)}d\sigma}{\sigma - \xi} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}\varphi'(\sigma)d\sigma}{\omega'(\sigma)\sigma - \xi} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\psi(\sigma)d\sigma}{\sigma - \xi} = \frac{\mu}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{g(\sigma)}d\sigma}{\sigma - \xi}. \quad (17)$$

Пусть S^+ конечная часть плоскости, ограниченная γ , а S^- – бесконечная часть плоскости, состоящая из точек, расположенных вне γ . Если в качестве положительного направления выберем то, что оставляет область S^+ слева, то интегралы типа Коши вычисляются по формуле

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(t)dt}{t - z} = -f(z) + f(\infty) \quad \text{при } z \text{ в } S^-, \quad (18)$$

Из свойств интегралов типа Коши вытекает следующее.

Для того чтобы непрерывная на окружности γ функция $f(\sigma)$ была граничным значением функции, голоморфной вне γ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{f(\sigma)}d\sigma}{\sigma - \xi} = 0 \quad \text{для всех } \xi \text{ внутри } \gamma. \quad (19)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\psi(\sigma)d\sigma}{\sigma - \xi} = -\psi(\xi), \quad (20)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\varphi(\sigma)}d\sigma}{\sigma - \xi} = 0 \quad (21)$$

и из условия (17) получим

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}\varphi'(\sigma)d\sigma}{\omega'(\sigma)\sigma - \xi} + \frac{\mu}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\overline{g(\sigma)}d\sigma}{\sigma - \xi}. \quad (22)$$

Остается найти функцию $\varphi(\xi)$.

Из условия (15) получаем уравнение

$$-\kappa\varphi(\xi) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma}{\sigma - \xi} = B(\xi) \quad \text{для всех } \xi \text{ внутри } \gamma, \quad (23)$$

где $B(\xi)$ - известная функция

$$B(\xi) = \frac{\mu}{\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(\sigma)d\sigma}{\sigma - \xi}, \quad (24)$$

откуда

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma}{\sigma - \xi} + B(\xi) \right). \quad (25)$$

Рассмотрим частный случай кругового включения [7]. Тогда

$$\begin{aligned} \omega(\xi) &= a + b\xi, \\ \omega'(\xi) &= b, \quad \overline{\omega'(\xi)} = \bar{b}, \\ \frac{\omega(\xi)}{\omega'(\xi)} &= \frac{a}{b} + \frac{b}{b}\xi. \end{aligned}$$

Так как функция $\varphi(\xi)$ голоморфна вне γ и $\varphi(\infty) = 0$, то

$$\varphi(\xi) = \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi^2} + \dots \quad \text{при } |\xi| > 1.$$

Следовательно,

$$\varphi'(\xi) = -\frac{a_1}{\xi^2} - 2\frac{a_2}{\xi^3} + \dots \quad \text{при } |\xi| > 1,$$

$$\overline{\varphi'(\frac{1}{\xi})} = -\bar{a}_1\xi^2 - 2\bar{a}_2\xi^3 + \dots \quad \text{при } |\xi| < 1,$$

и, значит,

$$\frac{\omega}{\omega'} \overline{\varphi'} = c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + \dots \quad \text{при } |\xi| < 1.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}d\sigma}{\sigma - \xi} = 0 \quad (26)$$

и

$$\varphi(\xi) = -\frac{1}{\kappa} B(\xi). \quad (27)$$

Соотношения (22), (24) и (27) позволяют найти комплексные потенциалы φ и ψ из граничного условия, после чего решение находится по формулам (11) – (14).

В случае двух круговых включений решение однородной задачи может быть получено методом последовательных приближений Шварца [8, 9].

3. Результаты

Численные значения получены с помощью программного комплекса «Наложение» [3, 4], который был модифицирован с учетом приведенных выше соотношений.

Рассмотрен случай, когда первоначально радиус включений $R_1 = R_2 = R = 1$, затем этот радиус уменьшается на 0,2. Взаимное расположение включений и схема их нагружения — на рис. 1. Расчеты выполнены при одноосном растяжении в направлении оси OY $\sigma_{22}^\infty/\mu = 0,8$.

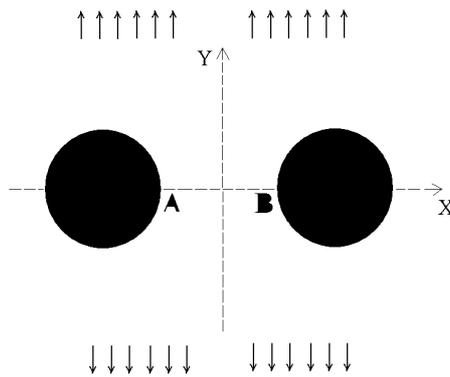


Рис. 1: Схема расположения и нагружения тела с включениями. Одноосное растяжение в направлении оси OY .

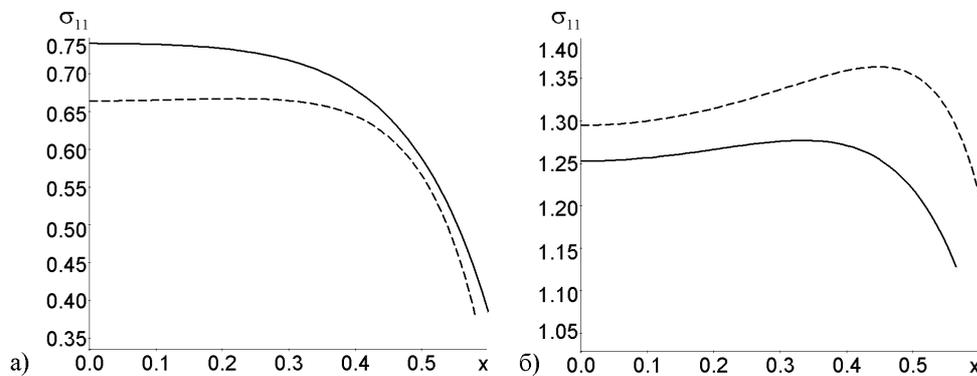


Рис. 2: Зависимость $|\sigma_{11}/\mu|$ от x : а) радиус уменьшается на 0,2; б) радиус не изменяется

На рис. 2 приведена зависимость абсолютной величины компоненты тензора полных истинных напряжений $|\sigma_{11}/\mu|$ от x (а). Для сравнения справа приведена зависимость $|\sigma_{11}/\mu|$ от x для случая, когда размеры включений не изменялись

(б). Пунктирная линия соответствует нелинейному решению задачи. Как видно из сравнения рис. 2 а) и рис. 2 б), изменение размеров существенно влияет на напряженно-деформированное состояние на линии, соединяющей центры включений.

Далее выполнены расчеты при одноосном растяжении в направлении оси OX $\sigma_{11}^\infty/\mu = 0,5$. Взаимное расположение включений и схема их нагружения — на рис. 3.

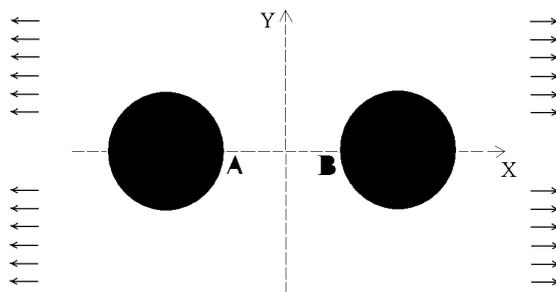


Рис. 3: Схема расположения и нагружения тела с включениями. Одноосное растяжение в направлении оси OX .

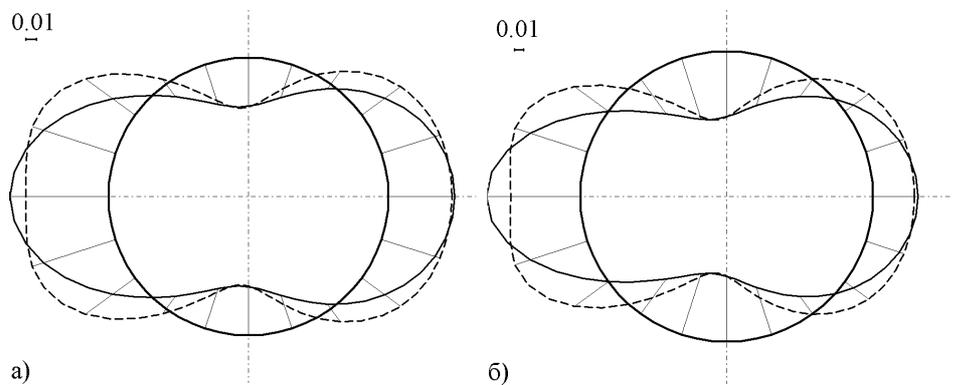


Рис. 4: Эпюры истинных контурных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$: а) радиус уменьшается на 0,1; б) радиус уменьшается на 0,2

На рис. 4 приведены эпюры истинных контурных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$. Отрезки в верхней части рисунка указывают масштаб напряжений, отнесенных к модулю сдвига μ . Сплошная линия соответствует линейному решению задачи, пунктирная — нелинейному. Слева — эпюра истинных контурных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ для правого включения для случая, когда радиус уменьшается на 0,1, справа — эпюра

истинных контурных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ для случая, когда радиус уменьшается на 0,2.

Результаты расчетов показывают, что для рассмотренных задач напряжение уменьшилось в 1,7 раза по сравнению со случаем, когда размеры включения не изменялись (линейное решение задачи), для нелинейного решения — в 2 раза, поправка от учета нелинейности составила примерно 30%.

Заключение

Таким образом, решена в рамках теории наложения больших деформаций задача о влиянии собственных больших деформаций на напряженно-деформированное состояние упругого тела при изменении размеров возникших в нем жестких включений. Построена модель образования жестких включений в нелинейно-упругом теле с учетом их собственных деформаций, разработан аналитический аппарат для решения таких задач, получены численные результаты.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 06 - 01 - 00682.

Список литературы

- [1] Бартенев Г.М., Френкель С.Я. Физика полимеров. Л.: Химия, 1990. 432 с.
- [2] Бухина М.Ф. Кристаллизация каучуков и резин. М.: Химия, 1973. 239 с.
- [3] Левин В.А., Зингерман К.М. Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М.: Физматлит, 2002. 272 с.
- [4] Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. М.: Физматлит, 2007. 392 с.
- [5] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [6] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [7] Рябова О.А. Зингерман К.М. Задача о жестком включении в теле из нелинейно-упругого сжимаемого материала при конечных деформациях // Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация. Тверь: ТГУ, 2004. С. 172 - 180.
- [8] Рябова О.А. Зингерман К.М. Численно-аналитическое моделирование напряженно-деформированного состояния вблизи жестких включений в теле из нелинейно-упругого материала с учетом их взаимовлияния // Вестник Тверского государственного университета. Тверь, 2007. № 27 (55) С. 89–98.
- [9] Свистков А.Л., Евлампиева С.Е. Итерационный метод расчета напряженно-деформированного состояния в ансамблях включений // Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов. Екатеринбург, 1997. С. 171–203.