

**ЗАДАЧИ КОРРЕКТНОЙ ОЦЕНКИ И АЛГОРИТМЫ
МАНИПУЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЕЙ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ НА
ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ**

Драница Ю.П.*, **Драница А.Ю.****, **Алексеевская О.В.****

*Мурманский Государственный Технический Университет, г. Мурманск

**ЗАО «Ланит», г. Москва

Поступила в редакцию 10.05.2009, после переработки 02.07.2009.

В работе рассматриваются и решаются задачи корректной оценки, сглаживания, фильтрации в полосе частот, и экстраполяции функции автоковариации (ФАК). Решена задача оценки ФАК шума в наблюдениях с использованием минимума априорной информации. Основой примененного способа обработки является линейная динамическая модель данных. Использование разработанной методики продемонстрировано на натуральных данных.

Problems of a correct estimation, smoothing, a filtration in a strip of frequencies, and extrapolations function of autocorrelation (FAC) are considered and solved in this work. The problem of estimation FAC of noise in supervision with use of a minimum of the a priori information is solved. A basis of the applied way of processing is the linear dynamic model of data. Use of the developed technique is shown on natural data.

Ключевые слова: линейная динамическая модель, линейные дифференциальные уравнения, оценка параметров, функция автокорреляции, аппроксимация, сглаживание, фильтрация, экстраполяция, параметры шума, белый шум, цветной шум.

Keywords: linear dynamic model, the linear differential equations, an estimation of parameters, autocorrelation function, smoothing, approximation, a filtration, extrapolation, noise parameters, white noise, colour noise.

Введение

Известно, что основополагающим понятием в теории линейных векторных пространств является действительная, симметричная, положительно определенная порождающая матрица (ядро), связанная с базисом пространства и используемая при его линейных преобразованиях [1]. С другой стороны, важнейшим понятием теории случайных временных рядов является матрица ковариаций (корреляций), построенная на базе ФАК. В тоже время любую случайную последовательность можно представить в виде случайного вектора – элемента линейного пространства. Ядро такого пространства можно связать с обратной матрицей ковариаций этого вектора.

Таким образом, формальному понятию ядра линейного пространства ставится в соответствие матрица ковариаций. В то же время ковариация является физическим понятием, с помощью которого можно синтезировать линейную динамическую модель случайной последовательности [1]. Знание ФАК позволяет рассчитать распределение энергии по частотам (построить спектр мощности), выявить наличие в процессе периодичностей, характер их затухания, осуществить прогнозирование и т.д. Из вышеизложенного следует, что задача адекватной интерпретации ФАК является актуальной как с теоретической, так и практических точек зрения.

1. Постановка задачи

В работах [2, 3, 4] поставлена и решена задача корректной интерпретации данных на основе линейной динамической модели. Сущность предлагаемой методики заключается в интерпретации обрабатываемой информации выходным сигналом некоторой линейной динамической системы. Как известно, линейная динамическая система может описываться обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением (ОДУ) или его дискретным разностным аналогом - обыкновенным неоднородным разностным уравнением (ОРУ). В работах рассмотрена и решена задача идентификации параметров ОРУ и ОДУ по анализируемым данным. Отметим, что для вычисления искоемых параметров не требуется какой-либо априорной информации, все основано на оценке текущих данных.

Такая интерпретация позволяет, во-первых, определить действующие в системе динамические параметры (частоты и коэффициенты затухания) и, во-вторых, на этой основе сформировать базис, составляющими которого являются решения однородного ОДУ. Сформулированный базис является мощной основой анализа информации и, в частности, позволяет решить задачу объективной обработки ФАК. Объективность в данном случае заключается в том, что интерпретация может опираться на хорошо проработанную теорию ОДУ и ее выводы. Практическому применению разработанной методики, оценке ее характеристик при интерпретации ФАК и посвящена настоящая работа.

2. Методика решения задачи

Рассмотрим некоторые нормированные данные (с нулевым средним значением и единичной дисперсией) \mathbf{x} , измеренные в n временных точках, с постоянной дискретностью Δt

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1)$$

Будем интерпретировать эти данные как результат дискретных измерений выхода некоторой абстрактной линейной системы. Оценим эмпирическую ФАК ряда (1) с помощью смещенной оценки по следующей формуле

$$r(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-\tau} x_k x_{k+\tau}, \tau = 0, 1, \dots, l, \quad (2)$$

где l - так называемый лаг модели, т.е. максимальная задержка сигнала при расчете ФАК. Отметим, что ФАК является мерой подобия сигнала и его копии, задержанной относительно оригинала на некоторый временной интервал τ . ФАК является четной функцией, т.е. $r(\tau) = r(-\tau)$ и для ее полного определения достаточно использовать только положительные задержки τ сигнала. Отметим также, что для центрированных данных ковариация называется корреляцией.

Более информативные сведения о сигнале можно получить с помощью так называемой авторегрессионной модели $AR(l)$ порядка l с постоянными коэффициентами и вида

$$x_t = \sum_{k=1}^l a_k x_{t-k} + \epsilon_t, t = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где a_k - постоянные коэффициенты авторегрессии; l - лаг модели; ϵ_t - ошибки моделирования и данных; t - дискретный параметр времени.

Отметим, что вычисление коэффициентов авторегрессии (3) является рутинной операцией [3, 4] и для этого достаточно знания ФАК (2) процесса (1). Модель (3) имеет достаточно конструктивные интерпретации, отметим некоторые из них.

Во-первых, уравнение (3) является одношаговым предсказателем и позволяет прогнозировать течение процесса на один дискрет вперед по его l предыдущим значениям. С другой стороны, выражение (3) является дискретной сверткой измеренных значений сигнала с коэффициентами некоторого фильтра. Величина невязки между предсказанным значением ряда и наблюдаемым характеризуется величиной ϵ_t , которая в зависимости от контекста решаемой задачи, показывает или качество прогноза, или степень фильтрации данных.

Однако наиболее полная интерпретация представлена в работах [2, 3, 4], согласно которым уравнение (3) связывается с ОРУ или ОДУ l порядка. В этом случае вектор ϵ_t интерпретируется как внешний шум, воздействующий на вход линейной системы. Переход от уравнения авторегрессии к разностному уравнению или ОДУ позволяет эффективно и на твердой теоретической основе решать многие задачи предобработки, анализа и интерпретации данных. В работах показано, что знание ФАК достаточно как для вычисления коэффициентов авторегрессии (3), так и параметров неоднородного ОДУ вида

$$b_0 X^{(l)}(t) + b_1 X^{(l-1)}(t) + b_2 X^{(l-2)}(t) + \dots + b_{l-1} X(t) + b_l = f(t), \quad (4)$$

с однородной частью

$$b_0 X^{(l)}(t) + b_1 X^{(l-1)}(t) + b_2 X^{(l-2)}(t) + \dots + b_{l-1} X(t) + b_l = 0, \quad (5)$$

где $b_0=1$; $X^{(n)}(t)$ - производная по времени n -ого порядка выходного сигнала линейной системы, но уже с непрерывным временем t ; b_k - коэффициенты ОДУ; $f(t)$ - внешний сигнал, воздействующий на вход системы. Коэффициенты ОДУ (4, 5) по модулю совпадают с соответствующими коэффициентами авторегрессии (3), т.е. $b_k = -a_k$. Решение однородного ОДУ (5), имеет следующий вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^j A_i \exp(\alpha_i t) + \sum_{i=j+1}^m \exp(\alpha_i t) (A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)), \quad (6)$$

где j – число затухающих экспонент; пары (α_i, ω_i) – в теории линейных систем называются соответственно постоянной затухания и собственной круговой частотой линейной системы; A_i, B_i – некоторые константы; m – число принятых к рассмотрению решений уравнения (5).

Отметим, что уравнение (5) имеет ровно l решений, однако не все они могут приниматься к рассмотрению. Некоторые решения должны аннулироваться, если они не соответствуют физическому смыслу задачи. Например, при дискретности данных $\Delta t=1$, частоты имеют размерность рад/с и занимают полосу $\omega \in [0; \pi]$. Предельная частота $\omega = \pi$ является частотой Найквиста и решения, связанные с этой частотой, в основном определяются вычислительными ошибками, возникающими при численном решении характеристического уравнения. Поэтому в процессе анализа частотного состава процесса, частоты, близкие к π следует отфильтровать.

В теории ОДУ различные члены в решении (6) называются собственными колебаниями линейной системы. Организуем с помощью компонент решения (6) ядро преобразования с функциями следующего вида

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= \exp(\alpha_1 t), \dots, Y_j = \exp(\alpha_j t), \\ Y_{j+1}(t) &= \exp(\alpha_{j+1} t) \cos(\omega_{j+1} t), Y_{j+2}(t) = \exp(\alpha_{j+1} t) \sin(\omega_{j+1} t), \dots, \\ Y_{m-1}(t) &= \exp(\alpha_m t) \cos(\omega_m t), Y_m(t) = \exp(\alpha_m t) \sin(\omega_m t), \\ & t = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Если решение характеристического уравнения не имеет кратных корней, то очевидно, что функции (7) линейно независимы и в совокупности образуют фундаментальную систему решений (ФСР) однородного уравнения (5). При необходимости учет кратных корней выполняется в соответствии с теорией ОДУ [5].

Сформированное таким образом ядро можно использовать для различных преобразований информации. Отметим, что для этих целей могут быть применены различные системы функций, например, полиномиальные, тригонометрические и другие. Однако в большинстве случаев эти системы функций имеют чисто формальный характер, мало связанный с существом обрабатываемой информации. И даже если с их помощью успешно решена та или иная задача, интерпретация полученных результатов затруднена. Напротив, данная базисная система имеет четкое физическое обоснование, обусловленное представлением наблюдаемых данных выходом линейной динамической системы, параметры которой однозначно определяются анализируемыми данными.

На основе базиса (7) может быть создан математический аппарат, позволяющий решать достаточно широкий спектр задач обработки информации. Например, аппроксимация ФАК по рассматриваемому базису позволяет представить ее достаточно простыми аналитическими выражениями и облегчить решение многих задач обработки информации. Аналитическое представление ФАК позволяет очень просто выполнить ее экстраполяцию на любой требуемый лаг. Другой областью применения базиса (7) служат задачи фильтрации и разложения ФАК в полосе частот. Ниже рассматриваются алгоритмы решения некоторых задач обработки ФАК.

3. Некоторые алгоритмы обработки ФАК

3.1 Задача аппроксимации ФАК

Рассмотрим решение задачи аппроксимации ФАК посредством следующего алгоритма. По формуле (2) рассчитаем оценки ФАК $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_l)^T$ до максимально возможного сдвига l , где $(*)^T$ - операция транспонирования. Так как погрешность оценок ФАК увеличивается с ростом задержек сигнала, лаг l выбираем таким, чтобы точность оценок была еще достаточно высокой. Для этих целей воспользуемся рекомендациями работы [6]. Используя методику работ [3, 4], рассчитаем собственные частоты и постоянные затухания линейной системы и упорядочим эти пары по возрастанию частоты. И, наконец, на их основе построим базисные функции (7) и сформируем базис в виде следующей матрицы размера $(l + 1) \times m$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} Y_1(0) & Y_2(0) & \dots & Y_m(0) \\ Y_1(1) & Y_2(1) & \dots & Y_m(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_1(l) & Y_2(l) & \dots & Y_m(l) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Матрица \mathbf{A} имеет следующую структуру: число ее столбцов равно количеству решений m однородного уравнения (5) и принятых к рассмотрению, а количество строк равно лагу регрессионной модели (3) $l + 1$. Будем находить аппроксимацию эмпирической ФАК $\mathbf{r} = (r_k), (k = 0, 1, \dots, l)$ в виде следующего разложения по системе базисных функций (7):

$$r_\tau = \sum_{k=1}^j A_k \exp(\alpha_k \tau) + \sum_{i=j+1}^m \exp(\alpha_i \tau) (A_i \cos(\omega_i \tau) + B_i \sin(\omega_i \tau)), \quad \tau = 0, 1, \dots, l, \quad (9)$$

где A_k, B_k – веса соответствующих базисных функций в разложении (9). Для решения этой задачи составим следующее матричное уравнение

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{r}, \quad (10)$$

где \mathbf{z} – вектор-столбец весов (амплитуд) размера m разложения (9). Матричная система (10) имеет m неизвестных и l уравнений. Из-за фильтрации части корней, как правило, $m \leq l$ и решение матричного уравнения (10) будем находить методом наименьших квадратов (МНК). Согласно теории МНК решение матричного уравнения (10) имеет следующий вид

$$\mathbf{z} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{r}, \quad (11)$$

где символом $(*)^{-1}$ обозначена операция обращения матриц. Таким образом, разложение (9) с вектором весов \mathbf{z} (11) и является аппроксимацией эмпирической ФАК наблюдаемых данных по принятой системе базисных функций.

Экспериментами установлено, что матрица $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ в решении (11) может быть плохо обусловленной и в этом случае следует прибегнуть к регуляризации решения

использовав, например, сингулярный анализ данных [8]. В результате численных расчетов установлено, что аппроксимация ФАК по системе фундаментальных решений (7), даже в случае регуляризации решения, выполняется с очень высокой точностью. Этот результат вполне объясним, т.к. на основе ФАК формулируется ядро линейного преобразования случайного процесса, собственными функциями которого является система фундаментальных решений.

3.2 Задача надежной аппроксимации и экстраполяции ФАК

При анализе коротких рядов данных часто возникает задача надежной оценки корреляционных функций. Известно, что достоверная оценка ФАК возможна только для ее смещений в 5-10 раз меньших, чем длина анализируемого ряда [6]. При больших сдвигах оценки становятся неустойчивыми и могут не удовлетворять нужным свойствам. Одним из важнейших требований, которому должна удовлетворять эмпирическая оценка ФАК, является ее положительная определенность [1, 8].

Симметричная матрица \mathbf{A} называется положительно определенной, если для всех векторов \mathbf{x} справедливо неравенство $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$. Только в этом случае ФАК позволяет адекватно рассчитывать спектр и может быть использована в МНК. Нарушение этого соотношения сигнализирует о плохой обусловленности матрицы \mathbf{A} и численной неустойчивости ее обращения. В этом случае, например, амплитудный спектр процесса может иметь отрицательные компоненты, а оценки параметров линейной модели не будут устойчивыми и обладать оптимальными свойствами. Другими словами, такой ФАК не может соответствовать реальному выходу линейной системы.

Другая проблема возникает в некоторых методах обработки информации, например, основанных на коллокационном подходе [1]. Коллокация требует оценки ФАК с лагом, сравнимым, или даже превышающим, длину анализируемого ряда. Единственным способом удовлетворить эти требования является оценка ФАК по короткой выборке с последующей ее экстраполяцией.

Предлагаемый подход к решению этих проблем заключается в следующем. Допустим, что требуется осуществить экстраполяцию ФАК на период $T > l$. Оценим несколько начальных и наиболее достоверных отсчетов ФАК, а также построим систему базисных функций по методике, описанной выше. Разложим достоверную часть ФАК по данному базису, т.е. получим веса базисных функций \mathbf{z} разложения (9). Так как базисные функции представляют простые аналитические выражения, продолжим их на время $T > l$ и сформируем новую матрицу \mathbf{B} размера $(T \times m)$ следующим образом. Первые $(l+1)$ строк матрицы \mathbf{B} совпадают с соответствующими строками \mathbf{A} выражения (8), а остальные $(T-l)$ строк представляют результат экстраполяции базисных функций на требуемый интервал времени. Тогда экстраполяция ФАК на интервал T осуществляется по формуле

$$\mathbf{r}_{ek} = \mathbf{B} \mathbf{z}, \mathbf{r}_{ek} = (r_0, r_1, \dots, r_l, r_{l+1}, \dots, r_T)^T, \quad (12)$$

где \mathbf{r}_{ek} - вектор экстраполированной ФАК. Надежная оценка ФАК получается за счет использования при аппроксимации ее головной части, наименее подверженной ошибкам.

Отметим, что предложенная процедура автоматически гарантирует получение положительно определенной ФАК [1]. Экстраполяцию ФАК можно сопроводить ее фильтрацией от высокочастотного шума по методике, изложенной ниже. Предварительное сглаживание ФАК также способствует повышению надежности ее оценок.

3.3 Задача разложения ФАК по системе базисных функций

Обозначим через $z_i^2 = A_i^2 + B_i^2$ квадрат амплитуды i -ой гармоники разложения ФАК (9) для частоты ω_i и составим сумму $z_o = \sum_{k=1}^m z_k^2$. Тогда относительный вес энергии i -ой гармоники (η_i) в разложении (9) можно определить следующим образом

$$\eta_i = z_i^2 / z_o, i = 1, 2, \dots, m. \quad (13)$$

Выражение (13) показывает относительную дисперсию (или энергию) в разложении (9) i -ой гармоники ФАК. Обозначим символом J мультииндекс, состоящий из набора тех или иных непересекающихся номеров гармоник базисных функций. Базисы, построенные из выбранных гармоник, будем называть частными базисами. Очевидно, что относительный вклад (вес) частного базиса в разложении (9) можно определить отношением

$$\eta_j = \sum_k z_k^2 / z_o, k \subseteq J. \quad (14)$$

Известно, что наиболее информационной частью любой функции является ее низкочастотная часть. Сформируем мультииндекс J , включающий полосу наиболее низких частот $\omega_j \subset (0 < \omega_{jl} \leq \omega \leq \omega_{jr})$ разложения. Отметим, что по причинам, изложенным ниже, мультииндекс не включает нулевые частоты разложения. Составим сформулированному мультииндексу вектор весов \mathbf{z}_j , а также частный базис \mathbf{B}_j . Для формирования вектора \mathbf{z}_j обнулیم все веса вектора \mathbf{z} , не входящие в мультииндекс J и выполним разложение или экстраполяцию по формуле

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{B}_j \mathbf{z}_j. \quad (15)$$

Если мультииндекс J представляет последовательные номера функций (7), то приведенный выше алгоритм, вследствие упорядоченности частот, по существу представляет полосовую фильтрацию ФАК в диапазоне частот ($\omega_{jl} \leq \omega \leq \omega_{jr}$). В частности, мультииндекс J может состоять из номера одной частоты, в этом случае из смеси будет выделена одна компонента ФАК заданной частоты.

3.4 Задача оценки ФАК шума и сглаживания эмпирической ФАК

Наиболее часто задача оценок ФАК шума возникает при конструировании оптимальных линейных фильтров и фильтрации данных. Традиционный подход к решению этой задачи заключается в выдвижении различных априорных соображений, основанных на физике изучаемого явления, относительно статистик шума (белый шум, процесс Пуассона и т.д.). Однако на практике эти предположения могут не оправдываться, что снижает ценность фильтрации.

При разработке оптимальных фильтров, проблема оценки шума является ключевой, т.к. без ее решения фильтр построить нельзя. Наиболее часто считают, что помехи в данных имеют статистику типа белого шума. Это традиционное предположение часто хорошо оправдывается на практике и устраняет проблему при разработке фильтров. Белый шум обладает «хорошими» качествами: его ФАК представляет единичную функцию с амплитудой, равной его дисперсии (мощности), он не коррелирует с полезным сигналом, т.е. представляется выражением

$$r_{nn}(\tau) = \sigma_{nn}^2 \delta(\tau), \quad (16)$$

где σ_{nn}^2 – дисперсия белого шума; $\delta(\tau)$ – дельта функция следующего вида

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau = 0, \\ 0, & \text{если } \tau \neq 0. \end{cases}$$

Такое поведение функции соответствует скачку ФАК измеренных данных, равному дисперсии белого шума σ_{nn}^2 в начале координат [1]. Для выделения этого скачка построим симметричное продолжение $r_{xx}(\tau)$ в отрицательную область аргумента, а затем аппроксимируем ее четным полиномом в окрестности точки $\tau=0$ (за исключением самой этой точки). Энергия шума будет иметь значение разности между отсчетами ФАК в начале координат и интерполированным значением в этой же точке.

Однако на практике часто требуется профильтровать данные, у которых статистика помех сложнее, чем у белого шума. В этом случае говорят о необходимости фильтрации так называемого цветного шума. Фактически в настоящее время нет методики, позволяющей производить оценки параметров шумов со сложной статистикой. Некоторая попытка восполнить этот пробел на основе линейного подхода излагается ниже.

В соответствии с вышеизложенным, для того, чтобы выделить ФАК шума, нужно сформулировать соответствующий мультииндекс J_z , для этого поступим следующим образом. Известно, что ФАК белого шума представляет собой скачок, равный дисперсии белого шума в начале координат. Такому поведению ФАК соответствуют экспоненциальные компоненты разложения (9), т.е. решения с реальными корнями и затухающие гармоники с большими (по модулю) коэффициентами затухания, поэтому отнесем номера этих компонент к мультииндексу J_{z1} .

С другой стороны, из практических соображений обычно бывает известна наивысшая граничная частота ω_{gr} , полезного сигнала. Поэтому отнесем к мультииндексу J_{z2} все номера базисных функций, для которых выполняется условие $\omega_j > \omega_{gr}$. Очевидно, что обобщенный мультииндекс, связанный с компонентами шума, будет $J_z = J_{z1} \cup J_{z2}$. Сформированному мультииндексу J_z поставим в соответствие вектор весов \mathbf{z}_z и частный базис \mathbf{V}_z . По этой информации выполним аппроксимацию, аналогичную п. 2.3, и в результате получим аппроксимацию ФАК шума \mathbf{r}_z .

При формировании ФАК шума было использовано единственное априорное предположение о границе частот между сигналом и шумом. Но можно это предположение и не использовать, если в ФАК шума включить только компоненты с большими (по модулю) коэффициентами затухания. ФАК шума, построенного таким образом, будет слабо коррелируемой функцией.

Вследствие аддитивности функции корреляции, ФАК полезного сигнала r_p будет выражаться следующим образом

$$r_p = r - r_z. \quad (17)$$

В частности выражение (17) можно интерпретировать как операцию сглаживания или фильтрации эмпирической ФАК. Профильтрованная функция затем может быть подвергнута экстраполяции.

Таким образом, сформулированная система базисных функций позволяет достаточно просто выполнять с ФАК основные базовые операции. Разумеется, что над ФАК можно выполнять и другие действия. Например, аппроксимировать ФАК, затем сгладить и сглаженную часть экстраполировать и т.п. действия.

4. Результаты моделирования по натурным данным

Иллюстрацию применения разработанной теории проведем на временном ряде, представленном на рис. 1. Эти данные являются нормированными отсчетами некоторого геофизического параметра, снятые через равные интервалы времени (всего проведено $N=201$ измерение). Для простоты будем считать, что дискретность отсчетов (Δt) равна единице. В этом случае частоты будут измеряться в (рад/сек) и изменяться в диапазоне $[0, \pi]$, а коэффициенты затухания будут иметь размерность (1/сек).

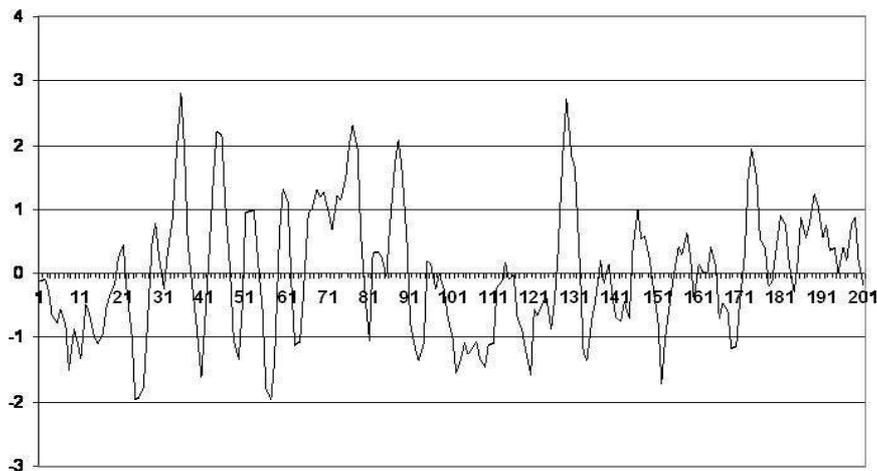


Рис. 1: Исходные данные

Согласно работе [6], эмпирическая ФАК этого ряда с достаточной точностью может быть оценена при лаге $l=0.15N$, т.е. принимаем $l=30$. По формуле (2) рассчитаем эмпирическую ФАК и применим вышеизложенную методику для расчета собственных частот и коэффициентов затухания процесса. Для оценки дисперсии

белого шума произведем аппроксимацию ФАК полиномом четвертого порядка. В результате было обнаружено, что дисперсия белого шума составляет величину ≈ 0.1547 .

Эмпирическая ФАК исследуемого процесса, вычисленная по формуле (2) (за вычетом дисперсии белого шума) изображена на рис. 2 (кривая 1). Анализ исходных данных (рис. 1) показывает, что процесс имеет хорошо выдержанную периодическую компоненту, что отчетливо проявляется и на ФАК процесса. Обнаруженные по ФАК частоты, согласно теории линейных систем, являются и частотами исходной последовательности (1) и позволяют построить спектр мощности процесса.

В результате динамического анализа было получено 15 корней: один реальный корень, а остальные - комплексно - сопряженные. Следовательно, процесс содержит 1 нулевую и 14 ненулевых частот. Упорядочим пары (частота-коэффициент затухания) по возрастанию частот, присвоим каждой паре порядковый номер. Значения упорядоченного набора динамических параметров процесса представлены в табл. 1, а на рис. 3 (кривая 2) изображена зависимость коэффициентов затухания от частоты.

Аппроксимация ФАК по полному базису (табл. 1), осуществляется с очень высокой точностью (коэффициент корреляции между ФАК и ее аппроксимацией составляет $R=0.9995$). Относительный вклад гармоник разложения в зависимости от их порядкового номера, рассчитанных по формуле (13), изображен на рис. 3 (кривая 1). Анализ этого рисунка показывает, что наибольший вес в разложении имеют две базисные функции.

Первая базисная функция (с порядковым номером 2) имеет наиболее низкую ненулевую частоту ($\omega=0.106$, $\alpha=-0.033$) и относительную энергию ≈ 0.35 . Вторая базисная функция (с порядковым номером 6) имеет параметры ($\omega=0.764$, $\alpha=-0.043$) и относительную энергию ≈ 0.44 . Суммарная относительная энергия этих двух компонент ФАК составляет ≈ 0.79 . Расчеты показывают, что на 5 гармоник с порядковыми номерами 2-6 приходится $\approx 97\%$ суммарной энергии сигнала.

Табл.1 Параметры системы базисных функций

	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_i	0.000	0.106	0.418	0.491	0.604	0.764	0.875	0.911
α_i	-0.202	-0.033	-0.046	-0.427	-0.163	-0.043	-0.593	-0.136

продолжение табл. 1

	9	10	11	12	13	14	15
ω_i	1.1165	1.429	1.703	1.939	2.028	2.310	2.557
α_i	-0.043	-0.037	-0.059	-0.164	-0.076	-0.044	-0.074

Таким образом, 97% энергии сигнала сосредоточено в низкочастотном диапазоне равно, $\Omega \in [0.106; 0.764]$ рад/с, а все остальные компоненты разложения можно принять за ФАК коррелируемого шума. В этом случае компоненты ФАК шума включают: 1. энергию белого шума; 2. одну экспоненциальную составляющую раз-

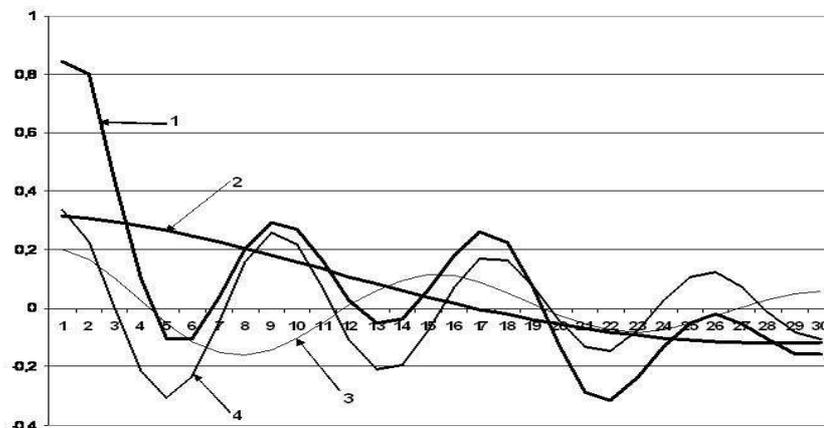


Рис. 2: 1 - эмпирическая ФАК процесса; 2 - вторая гармоника разложения ФАК; 3 - сумма 3 и 4 гармоник разложения; 4 - сумма 5 и 6 гармоник разложения.

ложения (табл. 1); 3. составляющие разложения в частотном диапазоне $\Omega_z \in [0.875; 2.557]$ рад/с.

Аппроксимированная таким образом ФАК шума и затем экстраполированная на интервал $[0; 100]$, изображена на рис. 4. Из анализа этой кривой следует, что в процессе преобладает шум белого типа. Периодическая компонента шума выражена намного слабее, однако она слабо затухает во времени и, следовательно, вносит искажения практически во все оценки ФАК. Выделение ФАК коррелированного шума позволяет повысить точность оценок корреляционной функции на всем интервале ее определения.

Анализ табл.1 и рис. 3 (кривая 1) показывает, что условно информационную часть ФАК можно разделить на три части. Наиболее низкочастотная компонента разложения связана со второй функцией базиса (табл. 1), которая изображена на рис. 2 (кривая 2). Эта компонента ФАК имеет относительно малый коэффициент затухания ($\alpha_2 = -0.033$), поэтому она прослеживается на большом временном участке (рис. 5, кривая 3).

Среднечастотная составляющая разложения (функции 3 и 4 табл. 1) представляет сумму кривых с существенно разными коэффициентами затухания ($\alpha_3 = -0.046$ и $\alpha_4 = -0.427$ соответственно). Изображение этой составляющей ФАК показано на рис. 2 (кривая 3). Очевидно, четвертая гармоника, вследствие большого коэффициента затухания, влияет только на начальную часть эмпирической ФАК, т.е. может быть отнесена к шумовой компоненте. Следовательно, на больших сдвигах поведение этой компоненты определяется функцией 3 базиса (табл. 1), частота которой практически в 4 раза выше, чем у второй гармоники базиса.

Третья компонента информационной части ФАК изображена на рис. 2 (кривая 4). Эта компонента также имеет две гармоники с порядковыми номерами 5, 6 также с существенно разными коэффициентами затухания ($\alpha_5 = -0.163$ и $\alpha_6 = -0.043$ соответственно). Поведение этой компоненты на больших сдвигах определяется

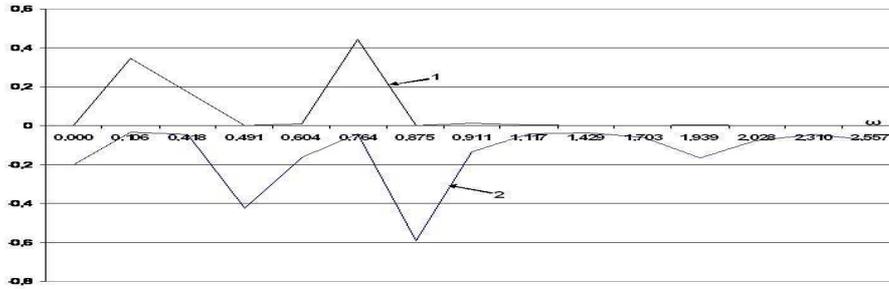


Рис. 3: 1 - зависимость от частоты оценок энергии составляющих процесса; 2 - оценок коэффициентов затухания.

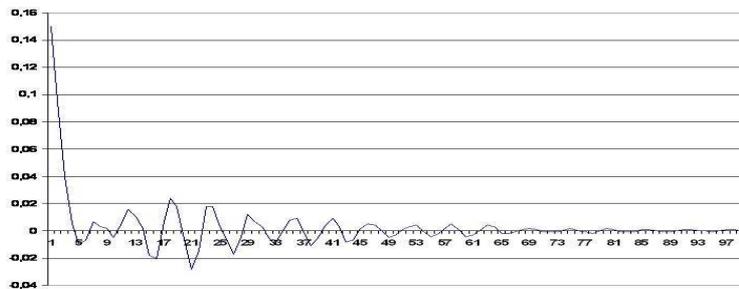


Рис. 4: Аппроксимация и экстраполяция шумовой компоненты ФАК

6-ой функцией базиса, частота которой более чем в 7 раз выше частоты второй компоненты базиса.

Таким образом, проведенный динамический анализ позволил выявить не только частотный состав сигнала, но и провести его разделение на сигнальную и шумовую компоненты. Более того, удалось выявить структуру сигнальной части ФАК. Вся эта информация, в частности, является полезной при конструировании оптимальных линейных фильтров.

Экстраполяционные возможности методики демонстрируются на рис. 5. Оценки параметров базисных функций были получены при значении лага $l=30$. Затем вычисленные динамические параметры были использованы для прогноза ФАК на лаг, равный $T_0=100$. При этом матрица \mathbf{A} выражения (10) была построена по полному базису согласно табл. 1, а затем осуществлялась экстраполяция по формуле (12). Обозначим полученную функцию ФАК1. Для сравнения результатов экстраполяции по формуле (2) была построена эмпирическая ФАК (ФАК2) для максимального сдвига $T_0=100$ (кривая 1). На этом же рис. изображена экстраполяция двух составляющих информационной части ФАК (кривые 3 и 4).

Отметим, что на лаге $0 \leq T \leq 30$, из-за высокой корреляции оценок ФАК и ее аппроксимации, кривые 1 и 2 практически сливаются. Анализ поведения кривой ФАК1 показывает, что продолжение функции в основном отвечает интуитивным предположениям о ее возможной экстраполяции. Поведение эмпирической ФАК на интервале $T_0 \in [30, 100]$, существенно отличается от функции ФАК1. Наиболее значимое различие эмпирической ФАК от функции ФАК1 заключается в уменьшении амплитуды колебаний по мере увеличения временных задержек сигнала.

Такое поведение сигнала ФАК2 противоречит корреляционной теории стохастических сигналов в шуме, по которой ФАК должна являться затухающей функцией. Подобный эффект можно объяснить потерей точности расчета эмпирической ФАК при сдвигах, сравнимых с длиной обрабатываемой реализации. В то же время поведение экстраполированной ФАК определяется начальной, наиболее точной частью кривой и, следовательно, лишено этих недостатков. Кроме того, базисные функции по построению являются строго затухающими.

Анализ продолжений некоторых составляющих разложения, представленных на рис.5 (кривые 3 и 4), показывает, что значимые отсчеты этих функций отмечаются и на сдвигах, превышающих лаг регрессионной модели. Воспроизводство довольно сложного поведения эмпирической ФАК на участке аппроксимации обеспечивается за счет интерференции базисных функций.

Заключение

Рассмотренный подход к аппроксимации ФАК не ограничивается только указанным выше применением. Проведенный анализ показывает, что на основе разработанного метода могут быть построены многие эффективные схемы анализа информации. В частности, методы сепарации (выделения) сигнала с заданными частотными свойствами из смеси, построение фильтров с оптимальными характеристиками, например, фильтров на основе метода коллокации, или Колмогорова-Винера. При построении этих схем используются методически обоснованные параметры, полученные по наблюдаемым данным и минимум априорной информации, что выгодно отличает методику от традиционных подходов.

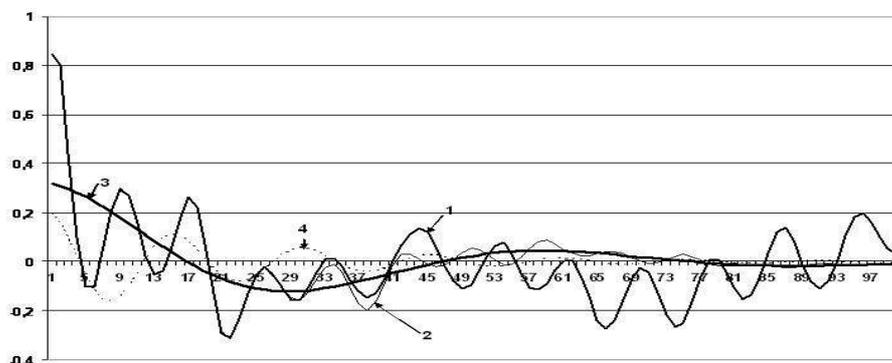


Рис. 5: Экстраполяционные возможности методики. 1 - эмпирическая оценка ФАК по формуле (2); 2 - экстраполяция ФАК по полному базису (табл. 1); 3 - экстраполяция 2-ой базисной функции разложения ФАК; 4 - экстраполяция суммы 3 и 4-ой базисных функций разложения ФАК.

Список литературы

- [1] Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. СПб.: Наука, 1997.
- [2] Драница Ю.П. Моделирование одномерных динамических процессов с целью предварительной обработки результатов. Вестник МГТУ, том 4, № 1, 2001.
- [3] Драница Ю.П., Драница А.Ю. Некоторые аспекты интерпретации экспериментальных данных на основе теории линейных динамических систем. // Вестник МГТУ. Тр. Мурман. гос. технич. ун-та. Т.12, № 1, 2009.
- [4] Драница Ю.П., Драница А.Ю. Некоторые постановки задач интерпретации временных последовательностей на основе линейного моделирования. //электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления», № 3, 2009.
- [5] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1977.
- [6] Котюк А.Ю., Ольшевский В.В., Цветков Э.И. Методы и аппаратура для анализа характеристик случайных процессов. М., "Энергия", 1967.
- [7] Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М., Мир, 584 с., 1990.
- [8] Теребиж В.Ю. - Введение в статистическую теорию обратных задач. М.: Физматлит, 2005.