СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.22

ОЦЕНКА УСРЕДНЕННОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФФИЦИЕНТОВ В МОДЕЛИ С ДОЛГОСРОЧНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ[1]

Кудрявцев А.А.*, **Шестаков О.В.***,**
*МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
**Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва

Поступила в редакцию 25.12.2019, после переработки 27.01.2020.

Методы подавления шума в сигналах и изображениях, основанные на процедуре пороговой обработки коэффициентов вейвлет-разложения, стали популярными благодаря своей простоте, скорости и возможности адаптации к функциям сигналов, имеющим на разных участках различную степень регулярности. Анализ погрешностей этих методов является важной практической задачей, поскольку дает возможность оценивать качество как самих методов, так и используемого для обработки оборудования. В работе рассматривается задача оценивания функции сигнала по наблюдениям, содержащим коррелированный шум, и вычисляются асимптотические порядки порога и функции потерь при минимизации усредненной вероятности ошибки вычисления вейвлет-коэффициентов.

Ключевые слова: вейвлеты, пороговая обработка, коррелированный шум, функция потерь.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 20–28.
https://doi.org/10.26456/vtpmk553

Введение

Статистические методы широко применяются при анализе и обработке сигналов и изображений при решении таких задач, как подавление шума и/или сжатие данных. В задачах статистической обработки данных часто предполагается, что наблюдения независимы. Однако существует множество физических процессов, демонстрирующих долгосрочную зависимость. Такая зависимость часто наблюдается, например, при исследовании геофизических процессов, в которых она принимает форму длительных периодов больших или маленьких значений наблюдений. Схожие явления демонстрируют помехи в коммуникационных каналах.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №19-07-00352).

При анализе и обработке сигналов, регистрируемых при изучении таких процессов, широко применяются методы вейвлет-анализа. К вектору отсчетов сигнала применяется вейвлет-преобразование и осуществляется пороговая обработка получившихся вейвлет-коэффициентов [1]. Порог обычно зависит от уровня разложения, и его можно выбирать различными способами исходя из постановки задачи и целей обработки данных. В работах [2–7] для разных классов функций приведены стратегии выбора порога, ориентированные на минимизацию среднеквадратичного риска и функции потерь, основанной на вероятностях ошибок вычисления вейвлет-коэффициентов. В данной работе предполагается, что функция полезного сигнала принадлежит классу Липшица с некоторым положительным показателем, а шум является гауссовым и коррелированным. Получены соотношения, позволяющие вычислить порог, обеспечивающий асимптотически оптимальный порядок функции потерь, основанной на вероятностях ошибок вычисления вейвлет-коэффициентов, и приведена оценка указанного порядка.

1. Модель с долгосрочной зависимостью

Пусть сигнал описывается функцией f, определенной на конечном отрезке $[a,b]$, и равномерно регулярной по Липшицу с некоторым показателем $\gamma > 0$ и константой Липшица L: $f \in \mathrm{Lip}(L,\gamma)$. Вейвлет-разложение f представляет собой ряд

$$f = \sum_{j,k\in Z} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}, \tag{1}$$

где $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, а $\psi(x)$ – некоторая вейвлет-функция. Функция ψ должна удовлетворять определенным требованиям, однако ее можно выбрать таким образом, чтобы она обладала некоторыми полезными свойствами, например была M раз дифференцируемой, имела заданное число M нулевых моментов и достаточно быстро убывала на бесконечности. Известно [1], что если $M \geqslant \gamma$, то найдется такая положительная константа A, что

$$|\langle f, \psi_{j,k}\rangle| \leqslant \frac{A}{2^{j(\gamma+1/2)}}. \tag{2}$$

Всюду далее предполагается, что ψ обладает нужным числом нулевых моментов и непрерывных производных.

На практике регистрируются дискретные отсчеты функции сигнала f_i, $i = 1,\ldots,N$. Пусть $N = 2^J$ при некотором $J > 0$. Тогда дискретное вейвлет-преобразование представляет собой умножение вектора из значений f_i на ортогональную матрицу, определяемую вейвлет-функцией ψ. При этом дискретные вейвлет-коэффициенты связаны с непрерывными коэффициентами разложения в (1) следующим образом: $\mu_{j,k} \approx 2^{J/2}\langle f, \psi_{j,k}\rangle$ [1].

В реальных наблюдениях всегда присутствует шум. Рассмотрим следующую модель данных:

$$X_i = f_i + \epsilon_i, \qquad i = 1,\ldots,2^J,$$

где $\{\epsilon_i, i \in Z\}$ – стационарный гауссовский процесс с ковариационной последовательностью $r_k = \mathbf{cov}(\epsilon_i, \epsilon_{i+k})$. Будем полагать, что ϵ_i имеют нулевое среднее и единичную дисперсию.

В данной работе предполагается модель долгосрочной зависимости $r_k \sim Ck^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $C > 0$. В [8,9] показано, что в модели с долгосрочной зависимостью после применения дискретного вейвлет-преобразования получается следующая модель зашумленных вейвлет-коэффициентов:

$$Y_{j,k} = \mu_{j,k} + \sigma_\alpha 2^{\frac{(J-j)(1-\alpha)}{2}} \varepsilon_{j,k}, \quad j = 0, \ldots, J-1, \; k = 0, \ldots, 2^j - 1, \tag{3}$$

где $\varepsilon_{j,k} = 2^{\frac{j(1-\alpha)}{2}} \int \psi_{jk} d\mathbf{B}_H$, $\mathbf{B}_H(t)$ – процесс дробного броуновского движения с $H = 1 - \alpha/2$, а значение σ_α зависит от C и α. Шумовые коэффициенты $\varepsilon_{j,k}$ имеют стандартное нормальное распределение, но не являются независимыми. Легко видеть, что дисперсия коэффициентов модели (3) имеет вид $\sigma_j^2 = \sigma_\alpha^2 2^{(1-\alpha)(J-j)}$.

2. Пороговая обработка

Для подавления шума обычно используется пороговая обработка, смысл которой заключается в обнулении коэффициентов, чьи абсолютные значения не превышают заданного порога.

Через $\hat{Y}_{j,k}$ обозначим оценку вейвлет-коэффициента, которая получается с помощью пороговой обработки, задаваемой для порога T_j некоторой функцией $\rho_{T_j}(x)$: $\hat{Y}_{j,k} = \rho_{T_j}(Y_{j,k})$. Наиболее популярными являются функции жесткой пороговой обработки $\rho_{T_j}^{(h)}(x) = x\mathbf{1}(|x| > T_j)$ и мягкой пороговой обработки $\rho_{T_j}^{(s)}(x) = \mathbf{sgn}(x)(|x| - T_j)_+$.

Рассмотрим функцию потерь, основанную на вероятностях ошибок вычисления вейвлет-коэффициентов и определяемую для заданного $\varepsilon > 0$ как

$$r_J(f) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{J-1} \sum\limits_{k=0}^{2^j-1} \mathrm{P}\left(\left|\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k}\right| > \varepsilon\right)}{2^J}.$$

Для модели с белым шумом такая функция потерь рассматривалась в работе [6]. В [5] показано, что оценки, целью которых является минимизация функции потерь, основанной на вероятностях ошибок вычисления вейвлет-коэффициентов, дают сравнимые, а иногда и лучшие результаты, чем оценки, минимизирующие среднеквадратичный риск.

Целью данной работы является поиск оптимального порога и оценивание максимального порядка риска r_J пороговой обработки наблюдаемого сигнала в классе функций $f \in \mathrm{Lip}(L, \gamma)$:

$$R_J = \sup_{f \in \mathrm{Lip}(L,\gamma)} r_J(f). \tag{4}$$

3. Асимптотический порядок функции потерь

Пусть функция $g_1(J) > 0$ сколь угодно медленно убывает по J к нулю, а $g_2(J) > 0$ неограниченно возрастает по J, причем

$$\ln g_2(J) = o(\sqrt{\ln 2^J}), \quad J \to \infty. \tag{5}$$

Теорема 1. *При выборе асимптотически оптимального порога для жесткой и мягкой пороговой обработки функция потерь (4) удовлетворяет неравенствам*

$$C_1 \cdot 2^{-\frac{2\gamma}{2\gamma+1}J} g_1(J) \leq R_J \leq C_2 \cdot 2^{-\frac{2\gamma}{2\gamma+1}J} g_2(J),$$

где C_1 и C_2 – некоторые положительные константы. Для асимптотически оптимального значения порога, минимизирующего порядок функции потерь (4) при жесткой и мягкой пороговой обработке, начиная с некоторого J справедливо неравенство $T_* - T_2 \leq T_j \leq T_* - T_1$, где

$$T_* = \sigma_\alpha 2^{(J-j)(1-\alpha)/2} \sqrt{\frac{4\gamma}{2\gamma+1} \ln 2^j};$$

$$T_i = \sigma_\alpha 2^{(J-j)(1-\alpha)/2} \sqrt{\frac{2\gamma+1}{4\gamma}} \frac{\ln((\ln 2^j)^{1/2} g_i(j))}{\sqrt{\ln 2^j}}, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Рассмотрим случай жесткой пороговой обработки. Пусть $\hat{Y}_{j,k} = \rho_{T_j}^{(h)}(Y_{j,k})$.

Из (2) следует, что

$$|\mu_{j,k}| \leqslant \frac{A 2^{J/2}}{2^{j(\gamma+1/2)}}, \quad j = 0, \ldots, J-1, \quad k = 0, \ldots, 2^j - 1, \tag{6}$$

где A – некоторая константа, зависящая от γ и L и не зависящая от J.

Неравенство (6) позволяет разбить все множество индексов $\{0, \ldots, J-1\}$ на три класса в зависимости от величины $|\mu_{j,k}|$. Пусть индексы j_1 и j_2 ($j_1 < j_2$) таковы, что:

$$|\mu_{j,k}| \leq (g_1(J))^{-(\gamma+1/2)}, \qquad j_1 \leq j \leq j_2 - 1;$$

$$|\mu_{j,k}| \leq (g_2(J))^{-(\gamma+1/2)}, \qquad j_2 \leq j \leq J - 1.$$

При этом в силу (6) для $i = 1, 2$

$$j_i = \frac{J}{2\gamma+1} + \log_2 g_i(J) + \frac{\log_2 A}{\gamma + 1/2}. \tag{7}$$

Разобьем сумму в числителе (4) на три составляющие:

$$\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathrm{P}\left(\left|\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k}\right| > \varepsilon\right) = \sum_{j=0}^{j_1-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathrm{P}\left(\left|\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k}\right| > \varepsilon\right) +$$
$$+ \sum_{j=j_1}^{j_2-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathrm{P}\left(\left|\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k}\right| > \varepsilon\right) + \sum_{j=j_2}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathrm{P}\left(\left|\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k}\right| > \varepsilon\right) \equiv$$
$$\equiv S_1 + S_2 + S_3. \tag{8}$$

Рассмотрим S_3. Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $J_0 = J_0(\varepsilon)$, что $(g_2(J))^{-(\gamma+1/2)} \leq \varepsilon$ и $\varepsilon \leq cT_j$, $0 < c < 1$, $j_2 \leq j \leq J-1$, для всех $J > J_0$, и найдется такое $J_1 = J_1(\varepsilon, c) \geq J_0$, что для всех $J > J_1$ имеют место соотношения:

$$\mu_{j,k} + \varepsilon \geq 0, \quad \mu_{j,k} - \varepsilon \leq 0, \quad \mu_{j,k} + \varepsilon \leq T_j, \quad \mu_{j,k} - \varepsilon \geq -T_j$$

для $j_2 \le j \le J-1$. Следовательно, для одного слагаемого из S_3 имеем при $J > J_1$

$$\mathrm{P}\left(\left|\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k}\right| > \varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(\left|\rho^{(h)}_{T_j}(Y_{j,k}) - \mu_{j,k}\right| > \varepsilon\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(\mathbf{1}\left(|Y_{j,k}| > T_j\right) Y_{j,k} > \mu_{j,k} + \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(\mathbf{1}\left(|Y_{j,k}| > T_j\right) Y_{j,k} < \mu_{j,k} - \varepsilon\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(Y_{j,k} > T_j, Y_{j,k} > \mu_{j,k} + \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(Y_{j,k} < -T_j, Y_{j,k} < \mu_{j,k} - \varepsilon\right) =$$

$$= \mathrm{P}\left(|Y_{j,k}| > T_j\right) \asymp \frac{\sigma_j \exp\{-\frac{(T_j+\mu_{j,k})^2}{2\sigma_j^2}\}}{T_j} + \frac{\sigma_j \exp\{-\frac{(T_j-\mu_{j,k})^2}{2\sigma_j^2}\}}{T_j}, \qquad (9)$$

поскольку $Y_{j,k}$ имеют нормальное распределение со средним $\mu_{j,k}$ и дисперсией σ_j^2, а для стандартной нормальной функции распределения при достаточно больших x справедливо соотношение $1 - \Phi(x) \asymp \Phi'(x)/x$.

Заметим, что при $j_2 \le j \le J-1$ величины $|\mu_{j,k}|$ не влияют на порядок правой части (9). Применяя порог $T_* - T_2$, имеем

$$S_3 \asymp \sum_{j=j_2}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{\sigma_j}{T_j} \exp\left\{-\frac{T_j^2}{2\sigma_j^2}\right\} \asymp 2^{\frac{J}{2\gamma+1}} g_2(J). \qquad (10)$$

Найдем верхнюю оценку для функции потерь (4) при жесткой пороговой обработке. Для этого предположим, что все слагаемые в суммах S_1 и S_2 из (8) отделены от нуля некоторой константой. Тогда из (7) получаем, что

$$S_1 + S_2 = \sum_{j=0}^{j_2-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathrm{P}\left(\left|\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k}\right| > \varepsilon\right) \asymp 2^{j_2} \asymp 2^{\frac{J}{2\gamma+1}} g_2(J). \qquad (11)$$

Как видно, порядки в (10) и (11) одинаковые, следовательно, порог $T_* - T_2$ обеспечивает равенство порядков правых частей (10) и (11) и, таким образом, является нижней границей для асимптотически оптимального в смысле функции потерь R_J порога.

Теперь найдем нижнюю границу для функции потерь (4). Заметим, что найдется такая функция $f \in \mathrm{Lip}(L,\gamma)$, что в неравенстве (6) будет достигаться равенство для $0 \le j \le j_1 - 1$ [1]. Следовательно, существует такое $J_2 > 0$, что для всех $\varepsilon > 0$ и $J > J_2$ выполняется $|\mu_{j,k}| > \varepsilon$ при $0 \le j \le j_1 - 1$. Тогда

$$\mathrm{P}\left(\left|\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k}\right| > \varepsilon\right) \ge \mathrm{P}\left(|Y_{j,k} - \mu_{j,k}| > \varepsilon\right) \ge 2 - 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_j}\right) =$$

$$= 2 - 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_\alpha 2^{(J-j)(1-\alpha)/2}}\right) \ge 2 - 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_\alpha}\right).$$

В этом случае порядок суммы S_1 в (8) равен числу слагаемых, т.е.

$$S_1 = \sum_{j=0}^{j_1-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathrm{P}\left(\left|\hat{Y}_{j,k} - \mu_{j,k}\right| > \varepsilon\right) \asymp 2^{j_1} \asymp 2^{\frac{J}{2\gamma+1}} g_1(J).$$

Выберем порог таким образом, чтобы уравнять порядки S_1 и S_3. Получаем, что в этом случае порог равен $T_* - T_1$. Заметим, что сумма S_2 в данных рассуждениях не присутствует. Это означает, что истинное значение R_J имеет порядок не ниже данного, т.е. рассматриваемый порядок является нижней оценкой для истинного порядка функции потерь, а $T_* - T_1$ – верхней границей для асимптотически оптимального порога T_j, поскольку, чтобы не удалить важные компоненты функции сигнала, следует выбирать наименьший порог, не ухудшающий порядок функции потерь.

Утверждение для мягкой пороговой обработки доказывается полностью аналогично.

Теорема доказана. □

Заключение

Рассмотрен метод подавления шума в сигнале, основанный на процедурах пороговой обработки. В модели с коррелированным гауссовым шумом вычислены асимптотические порядки оптимальных порогов и функции потерь при минимизации усредненной вероятности ошибки вычисления вейвлет-коэффициентов.

Список литературы

[1] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. New York: Academic Press, 1999. 857 p.

[2] Donoho D., Johnstone I. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // Journal of the American Statistical Association. 1995. Vol. 90. Pp. 1200–1224.

[3] Donoho D., Johnstone I.M. Minimax estimation via wavelet shrinkage // Annals of Statistics. 1998. Vol. 26, № 3. Pp. 879–921.

[4] Jansen M. Noise Reduction by Wavelet Thresholding. Series: Lecture Notes in Statistics. Vol. 161. New York: Springer-Verlag, 2001. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0145-5

[5] Sadasivan J., Mukherjee S., Seelamantula C.S. An optimum shrinkage estimator based on minimum-probability-of-error criterion and application to signal denoising // 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP. 2014. Pp. 4249–4253. https://doi.org/10.1109/ICASSP.2014.6854403

[6] Кудрявцев А.А., Шестаков О.В. Асимптотическое поведение порога, минимизирующего усредненную вероятность ошибки вычисления вейвлет-коэффициентов // Доклады Академии наук. 2016. Т. 468, № 5. С. 487–491.

[7] Kudryavtsev A.A., Shestakov O.V. The asymptotic behavior of the optimal threshold minimizing the probability-of-error criterion // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 234, № 6. Pp. 810–815.

[8] Johnstone I.M., Silverman B.W. Wavelet threshold estimates for data with correlated noise // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology). 1997. Vol. 59. Pp. 319–351.

[9] Johnstone I.M. Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems adaptivity results // Statistica Sinica. 1999. Vol. 9. Pp. 51–83.

Образец цитирования

Кудрявцев А.А., Шестаков О.В. Оценка усредненной вероятности ошибки вычисления вейвлет-коэффициентов в модели с долгосрочной зависимостью // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 20–28. https://doi.org/10.26456/vtpmk553

Сведения об авторах

1. **Кудрявцев Алексей Андреевич**
доцент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: nubigena@mail.ru

2. **Шестаков Олег Владимирович**
профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова; старший научный сотрудник Института проблем информатики ФИЦ ИУ РАН.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: oshestakov@cs.msu.su

ESTIMATION OF THE AVERAGE ERROR PROBABILITY WHEN CALCULATING WAVELET COEFFICIENTS IN THE MODELS WITH A LONG-TERM DEPENDENCE

Kudryavtsev Alexey Andreevitch
Associate Professor at Mathematical Statistics department, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: nubigena@mail.ru

Shestakov Oleg Vladimirovich
Professor at Mathematical Statistics department, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University
Senior researcher at Institute of Computer Science Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: oshestakov@cs.msu.su

Received 25.12.2019, revised 27.01.2020.

The de-noising methods based on the threshold processing of wavelet decomposition coefficients have become popular due to their simplicity, speed, and the ability to adapt to signal functions with a varying regularity. The analysis of the errors of these methods is an important practical task, since it makes it possible to evaluate the quality of both the methods themselves and the equipment used for processing. We consider the problem of estimating the signal function from observations containing correlated noise, and evaluate the asymptotic orders of the threshold and loss functions while minimizing the average probability of the error in calculating the wavelet coefficients.

Keywords: wavelets, threshold processing, correlated noise, loss function.

Citation

Kudryavtsev A.A., Shestakov O.V., "Estimation of the average error probability when calculating wavelet coefficients in the models with a long-term dependence", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 1, 20–28 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk553

References

[1] Mallat S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, New York, 1999, 857 pp.

[2] Donoho D., Johnstone I., "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage", *Journal of the American Statistical Association*, **90** (1995), 1200–1224.

[3] Donoho D., Johnstone I.M., "Minimax estimation via wavelet shrinkage", *Annals of Statistics*, **26**:3 (1998), 879–921.

[4] Jansen M., *Noise Reduction by Wavelet Thresholding.* V. 161, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York, 2001, https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0145-5.

[5] Sadasivan J., Mukherjee S., Seelamantula C.S., "An optimum shrinkage estimator based on minimum-probability-of-error criterion and application to signal denoising", *2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ICASSP, 2014, 4249–4253, https://doi.org/10.1109/ICASSP.2014.6854403.

[6] Kudryavtsev A.A., Shestakov O.V., "Asymptotic Behavior of the Threshold Minimizing the Average Probability of Error in Calculation of Wavelet Coefficients", *Doklady Mathematics*, **93**:3 (2016), 295–299.

[7] Kudryavtsev A.A., Shestakov O.V., "The asymptotic behavior of the optimal threshold minimizing the probability-of-error criterion", *Journal of Mathematical Sciences*, **234**:6 (2018), 810–815.

[8] Johnstone I.M., Silverman B.W., "Wavelet threshold estimates for data with correlated noise", *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, **59** (1997), 319–351.

[9] Johnstone I.M., "Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems adaptivity results", *Statistica Sinica*, **9** (1999), 51–83.