

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.216

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ХЁРСТА ДЛЯ СМЕШАННОГО ТРАФИКА<sup>1</sup>

Сидорова О.И.\* , Хохлов Ю.С.\*\*

\*Тверской государственный университет, г. Тверь

\*\*МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

---

*Поступила в редакцию 25.08.2019, после переработки 16.09.2019.*

---

В данной статье рассматривается проблема оценки параметра Хёрста для процесса, представляющего собой композицию независимых фрактального броуновского движения и  $\alpha$ -устойчивого движения Леви. Предложенная оценка базируется на частотно-временном разложении изучаемого процесса с помощью вейвлета Хаара и применении взвешенного метода наименьших квадратов к сумме логарифмов модулей вейвлет-коэффициентов. Предложенный подход не требует коррекции ни зависимой переменной, ни размера октавы  $j$  (факторной переменной) и обеспечивает асимптотическую эффективность получаемой оценки. Мы иллюстрируем его работоспособность на нескольких модельных примерах.

**Ключевые слова:** долговременная зависимость, распределения с тяжёлыми хвостами, дробный гауссовский шум,  $\alpha$ -устойчивое движение Леви, взвешенный метод наименьших квадратов.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 3. С. 20–39.*  
<https://doi.org/10.26456/vtppmk537>

### Введение

Самоподобный характер, долгая память и сильная вариабельность длин соединений от очень коротких (в миллисекундах) до экстремально длинных (в часах) в современных телекоммуникационных системах подтверждены многочисленными эмпирическими и аналитическими исследованиями [2, 7]. Наиболее популярными моделями такого типа являются **дробное броуновское движение** и **устойчивое движение Леви**. Оказалось, что эти модели тесно связаны с тяжёлыми хвостами у распределений длин сообщений [3] и скоростью соединения удаленных источников с сервером: при быстром соединении получаем дробное броуновское движение, при медленном — устойчивое движение Леви [8, 14].

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-07-00678).

В ряде эмпирических исследований [12] было показано, что трафик может содержать обе отмеченные выше компоненты. Относительно недавно появились работы, посвященные теоретическому описанию моделей смешанных процессов [4] и оценке их влияния на вероятность переполнения буфера для однородного и неоднородного по параметру  $H$  входящего потока [5, 6].

Оценка параметра самоподобия  $H$  для моделей смешанного типа является отдельной интересной задачей. К настоящему времени разработано достаточно много методов для оценки параметра  $H$  для «чистых» процессов, включая  $R/S$ -анализ, метод агрегированной дисперсии, метод максимального правдоподобия и т.п. Особый интерес у исследователей вызывают подходы, основанные на методах вейвлет-декомпозиции, в силу свойства декорреляции изучаемых процессов в области вейвлет-коэффициентов [17].

«Классический» алгоритм оценки  $H$  для дробного броуновского движения, основанный на анализе выборочной дисперсии вейвлет-коэффициентов, описан в работе [15]. В [10] было показано, что метод Абри-Вейча неустойчив к присутствию в сигналах нестационарных компонент, и предложен робастный метод оценки экспоненты Хёрста, базирующийся на применении логарифмических моментов для вейвлет-коэффициентов. Аналогичный подход применялся в [13] для оценки  $H$  в случае устойчивых процессов.

В рамках данной статьи будет рассмотрен алгоритм оценки показателя  $H$  для смешанного процесса с независимыми компонентами, однородными по параметру самоподобия, основанный на применении вейвлет-анализа и линейной регрессии.

## 1. Самоподобные процессы

### 1.1. Устойчивые распределения и их свойства

**Определение 1.** *Распределение вероятностей  $F$  называется **устойчивым**, если для любых н.о.р.с.в.  $X_1, X_2, X_3$ , имеющих распределение  $F$  и любых положительных  $a_1$  и  $a_2$  существуют  $a_3 > 0$  и  $c \in R^1$  такие, что*

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 \stackrel{d}{=} a_3 X_3 + c,$$

где символ  $\stackrel{d}{=}$  означает равенство по распределению.

Если  $c = 0$  для всех  $a_1, a_2 > 0$ , то распределение называется **строго устойчивым**.

Устойчивые распределения абсолютно непрерывны, но за исключением трех специальных случаев:  $\alpha = 2$  (гауссовское распределение),  $\alpha = 1$  (распределение Коши),  $\alpha = 0.5, \beta = 1$  (распределение Леви) у их плотностей нет явного аналитического выражения. Поэтому обычно такие распределения описываются в терминах характеристических функций:

$$M(e^{itX}) = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) + i\mu t\right\}, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{-\sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln |t|\right) + i\mu t\right\}, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

где  $0 < \alpha \leq 2$  — показатель устойчивости;  $\beta \in [-1, 1]$  — параметр асимметрии;  $\sigma > 0$  — параметр масштаба;  $\mu \in R^1$  — параметр сдвига. Т.о. мы имеем 4-х параметрический закон распределения, который в литературе обычно обозначают как  $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ .

При  $\beta = 0$  имеем симметричное относительно  $\mu$  устойчивое распределение, характеристическая функция которого при  $\mu = 0$  имеет вид

$$M(e^{itX}) = \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha\}.$$

**Характеристическая экспонента**  $\alpha$  отвечает за скорость убывания хвоста распределения. Случай  $\alpha = 2$  соответствует **нормальному распределению** — единственному из устойчивых законов с конечными математическим ожиданием и дисперсией. При  $0 < \alpha < 2$  распределение с.в.  $X$  имеет **тяжёлый хвост**, поскольку при  $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P(X > x) &\sim C_\alpha \cdot \sigma^\alpha \cdot (1 + \beta) \cdot x^{-\alpha}, \\ P(X < -x) &\sim C_\alpha \cdot \sigma^\alpha (1 - \beta) \cdot x^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (1)$$

где константа  $C_\alpha$  имеет вид

$$C_\alpha = \frac{1}{\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin(x) dx} = \begin{cases} \frac{1 - \alpha}{\Gamma(2 - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{2}\right)}, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

В силу соотношения

$$\Gamma(1 - x) \cdot \Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi \cdot \alpha)} = \frac{\pi}{2 \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right)}$$

получаем

$$C_\alpha = \frac{2 \cdot \Gamma(\alpha)}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{2}\right).$$

Если  $0 < \alpha < 1$ ,  $\mu = 0$  и  $\beta = 1$ , то случайная величина  $X$  положительна с вероятностью 1. В дальнейшем будем говорить, что случайная величина  $X$  имеет стандартное  $\alpha$ -устойчивое распределение, если  $\mu = 0$  и  $\sigma = 1$ .

Сформулируем несколько важных результатов, на которые мы будем опираться при дальнейших выкладках. Их доказательства можно найти в литературе, указанной в библиографии.

**Теорема 1.** Если  $Y_1$  имеет симметричное  $\alpha_1$ -устойчивое распределение,  $0 < \alpha_1 \leq 2$ ,  $Y_2$  имеет одностороннее  $\alpha_2$ -устойчивое распределение ( $\beta = 1$ ),  $0 < \alpha_2 < 1$ , причём  $Y_1$  и  $Y_2$  независимы. Тогда с.в.  $Y = Y_1 \cdot Y_2^{1/\alpha_1}$  имеет симметричное  $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ -устойчивое распределение.

Нам понадобится также важное следствие из данной теоремы.

*Следствие 1.* Положим  $\alpha_1 = 2$  и  $\alpha_2 = \alpha/2$ . Тогда любая случайная величина  $X$  с  $\alpha$ -устойчивым симметричным распределением представима в виде:

$$X = Y_1 \cdot \sqrt{Y_2}, \quad (2)$$

где  $Y_2$  — односторонняя  $\frac{\alpha}{2}$ -устойчивая с.в., а с.в.  $Y_1$  имеет стандартное нормальное распределение.

Хорошо известен следующий результат.

**Лемма 1.** Пусть с.в.  $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, 0)$ , где  $0 < \alpha < 2$ . Тогда справедливо

$$\begin{aligned} M|X|^p &< \infty, & \forall 0 < p < \alpha, \\ M|X|^p &= \infty, & \forall p \geq \alpha. \end{aligned}$$

Поэтому при  $0 < \alpha < 2$  дисперсия с.в.  $X$  и моменты порядка  $p > \alpha$  бесконечны и, кроме того, при  $0 < \alpha < 1$  математическое ожидание с.в.  $X$  также бесконечно. В этой связи для нахождения оценок параметров устойчивых законов вместо выборочных средних и дисперсий используют величины  $(M(|X|^p))$ , которые в литературе называют дробными моментами младших порядков (fractional lower order moment, FLOM).

**Теорема 2.** (см. [11], утверждение 1.2.17) Пусть с.в.  $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, 0)$  где  $0 < \alpha < 2$  и  $\beta = 0$  при  $\alpha = 1$  и  $X_0 \sim S_\alpha(\beta, 1, 0)$ . Тогда для любого  $0 < p < \alpha$  справедливо

$$M(|X|^p) = (c_{\alpha, \beta}(p))^p \cdot \sigma^p,$$

где константа  $(c_{\alpha, \beta}(p))^p$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} (c_{\alpha, \beta}(p))^p &= M(X_0^p) = \\ &= \frac{2^{p-1} \Gamma(1 - \frac{p}{\alpha})}{p \int_0^\infty \frac{\sin^2(u)}{u^{p+1}} du} \cdot \left(1 + \beta^2 \tan^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^{\frac{p}{2\alpha}} \cdot \cos\left(\frac{p}{\alpha} \arctg\left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и делая замену переменной, мы получим

$$\frac{p}{2^{p-1}} \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^{p+1}} dx = \int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u^p} du = \begin{cases} \frac{\Gamma(2-p) \cdot \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)}{1-p}, & 1 < p < 2, \\ \Gamma(1-p) \cdot \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right), & 0 < p < 1, \end{cases} \quad \alpha \neq 1.$$

Следовательно, при  $0 < p < \alpha$  для с.в.  $X \sim S_\alpha(0, \sigma, 0)$  имеем

$$M(|X|^p) = \begin{cases} \frac{(1-p) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)}{\Gamma(2-p) \cdot \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)} \cdot \sigma^p, & 1 < \alpha < 2, \\ \frac{\Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)}{\Gamma(1-p) \cdot \cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)} \cdot \sigma^p, & 0 < \alpha < 1. \end{cases} \quad (3)$$

При  $0 < \alpha < 1$  для  $\alpha$ -устойчивой положительной односторонней с.в.  $X$  справедливо (см. [9], следствие 4)

$$M(X^p) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)}{\Gamma(1-p)}, \quad \forall 0 < p < \alpha. \quad (4)$$

Чтобы избежать сложностей, связанных с вычислением гамма функции от нецелочисленных  $p$  и выбором подходящих  $p$  можно перейти к логарифмическим

моментам  $M(\log |X|^p)$ , которые существуют для любых  $p > 0$ . Действительно, в силу (1)

$$M(\log |X|^p) = \int_0^{\infty} P(\log |X|^p > x) dx = \int_0^{\infty} P(|X| > e^{\frac{x}{p}}) dx < \infty, \quad \forall p > 0.$$

### 1.2. Фрактальное броуновское движение и $\alpha$ -устойчивый процесс Леви

**Определение 2.** *Случайный процесс  $Y = (Y(t), t \geq 0)$  называется **процессом Леви**, если выполнены условия:*

1.  $Y(0) = 0$  почти наверное;
2.  $Y$  имеет независимые и однородные (по времени) приращения;
3.  $Y$  является стохастически непрерывным;
4. траектории  $Y$  непрерывны справа и имеют конечные пределы слева при  $t > 0$ .

В силу независимости и однородности приращений, распределение процесса  $Y$  полностью и единственным образом определяется распределением с.в.  $Y(1)$ , которое обладает свойством безграничной делимости.

Наиболее известным примером процесса Леви является броуновское движение (Винеровский процесс).

**Определение 3.** *Процесс Леви  $B = (B(t), t \geq 0)$  называется **броуновским движением** (Brownian Motion = BM), если для любых  $t \geq 0, h > 0$  случайная величина  $B(t+h) - B(t)$  имеет гауссовское распределение со средним 0 и дисперсией  $\sigma^2 \cdot h$ .*

Если  $\sigma^2 = 1$ , то говорят, что соответствующее броуновское движение является стандартным. Нетрудно показать, что

$$K(t, s) = Cov(B(t), B(s)) = \sigma^2 \min(t, s).$$

Приращения броуновского движения имеют нормальное распределение. В силу центральной предельной теоремы такие распределения получаются асимптотически для нормированных сумм независимых и одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией. В случае бесконечных дисперсий приходим к понятию устойчивого распределения. Впервые такие законы были рассмотрены П. Леви.

**Определение 4.** *Случайный процесс  $L_\alpha = (L_\alpha(t), t \geq 0)$  называется  $\alpha$ -устойчивым процессом Леви, если это процесс Леви такой, что  $L_\alpha(1)$  имеет заданное  $\alpha$ -устойчивое распределение. Если  $\alpha = 2, \mu = 0$ , то мы имеем броуновское движение  $B$ .*

**Самоподобие** (self-similarity) или **масштабная инвариантность** — это важнейшее свойство, присущее трафику в современных компьютерных сетях.

**Определение 5.** Случайный процесс  $X = (X(t), t \geq 0)$  называется **самоподобным** с параметром Херста  $0 < H < 1$ , если он удовлетворяет условию

$$X(t) \stackrel{d}{=} c^{-H} X(ct), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall c > 0, \quad (5)$$

где символ  $\stackrel{d}{=}$  означает равенство конечномерных распределений.

Можно показать, что ковариационная функция самоподобного процесса с конечными моментами второго порядка и имеет вид:

$$\gamma(t, s) = \frac{\sigma^2}{2} \left( |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H} \right), \quad 0 < H < 1. \quad (6)$$

Одним из наиболее известных и наиболее популярных примеров таких процессов является дробное броуновское движение.

**Определение 6.** Дробным броуновским движением (*fractal brownian motion, FBM*) с параметром  $H$  называется гауссовский процесс  $(B_H(t), t \geq 0)$  с нулевым средним и ковариационной функцией заданной в (6).

Однородность ковариационной функции обуславливает самоподобие дробного броуновского движения

$$B_H(at) \sim |a|^H \cdot B_H(t).$$

Из (6) также следует, что при  $H = 0.5$  приращения процесса независимы (обычное броуновское движение); при  $0.5 < H < 1$  — приращения процесса положительно коррелированы; при  $0 < H < 0.5$  — приращения процесса отрицательно коррелированы.

Другим примером является  $\alpha$ -устойчивое движение Леви, определение которого было дано выше. Используя выражение для характеристической функции, легко показать, что  $\alpha$ -устойчивое движение Леви является самоподобным процессом с параметром  $H = 1/\alpha$ .

### 1.3. Фрактальное броуновское движение и $\alpha$ -устойчивый процесс Леви

Феномены долгой (long-range dependence) и короткой памяти (short-range dependence) у случайных процессов обычно связывают со скоростями убывания их корреляционных или спектральных функций.

**Определение 7.** Говорят, что процесс  $X(t)$  обладает свойством **короткой памяти**, если при  $n \rightarrow \infty$  имеет место экспоненциальное убывание корреляционной функции, то есть существуют постоянные  $0 < a < 1$  и  $0 < b < \infty$  такие, что

$$|\rho(n)| \leq b \cdot a^n. \quad (7)$$

**Определение 8.** Говорят, что процесс  $X(t)$  обладает свойством **долгой памяти**, если его корреляционная функция  $\rho(n)$  имеет асимптотику вида:

$$\rho(n) \sim n^{-\beta} \cdot L(n), \quad 0 < \beta = 2 - 2H < 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где  $L(n)$  есть медленно меняющаяся на бесконечности функция.

У процессов с короткой памятью корреляционная функция является суммируемой, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\rho(n)| < \infty,$$

а у процессов с долгой памятью — несуммируемой

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho(n) = \infty.$$

Из (6) и (8) следует, что наиболее интересными с практической точки зрения являются самоподобные процессы с  $0.5 < H < 1$ , т.к. именно они обладают свойством долгой памяти.

## 2. Вейвлет–анализ смешанного трафика

Очень важная практическая проблема при изучении поведения смешанного сетевого трафика заключается в оценке параметров Хёрста для его компонент. Для оценки соответствующих параметров будем использовать вейвлет–разложение сигнала с последующим применением к нему регрессионного анализа.

### 2.1. Основы вейвлет–анализа

Вейвлет–анализ так же как и классический анализ Фурье относится к области гармонического анализа. Он опирается на «малые волны» или вейвлеты, представляющие собой систему математических функций определенной формы (базисных функций), ограниченных по времени/пространству и частоте для сигналов/изображений. Это позволяет получить одновременно как временные/пространственные так и частотные характеристики изучаемого сигнала/изображения, при гораздо меньшем числе коэффициентов по сравнению с анализом Фурье. Поскольку анализ проводится сразу на нескольких масштабах разложения, вейвлет–анализ также называют кратномасштабным анализом.

Пусть  $\psi_0(t) \in L^2(\mathbb{R})$  есть **материнский (порождающий) вейвлет**. Вейвлет–базис строится на основе функции  $\psi_0(t)$  посредством её сдвигов и растяжений по оси времени, т.е. по правилу

$$\psi_{j,k}(t) = a^{-j/2} \cdot \psi_0(a^{-j}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad a = \text{const} > 0,$$

где  $j$  — параметр масштаба,  $k$  — параметр сдвига,  $\psi_{j,k}(t)$  — **дочерний вейвлет**. Тем самым анализирующее семейство проявляет масштабно–инвариантное свойство. Поскольку свойство «долгой памяти», присущее современным телекоммуникационным процессам — это, по сути, инвариантность данных к масштабу агрегирования, этим и обуславливается эффективность вейвлетов при анализе данного феномена.

Если для семейства функций  $\psi_{j,k}(t)$  выполняется условие ортогональности,

$$\langle \psi_{j,k}(t), \psi_{i,m}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) \cdot \psi_{i,m}^*(t) dt = \delta_{jk} \cdot \delta_{im},$$

где  $\delta_{jk}$  есть символ Кронеккера, а  $*$  означает комплексное сопряжение, то мы получаем ортонормированный базис в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$ .

Финитность вейвлет-функций означает их равенство нулю за пределами некоторого конечного интервала, причём для локализации спектра вейвлета в частотной области они также должны иметь нулевое среднее значение по интервалу задания. На практике часто накладывается более «жёсткое» требование о равенстве нулю первых  $M$  моментов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \cdot \psi_0(t) dt = 0, \quad (9)$$

где  $m = 0, \dots, M - 1, M$ .

В этом случае любая функция  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  разложима по этому базису

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t), \quad (10)$$

где коэффициенты  $d_{j,k}$  — проекции сигнала на новый ортогональный базис функций — определяются скалярным произведением

$$d_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi_{j,k}(t) dt. \quad (11)$$

Ряд в (10) равномерно сходится, то есть

$$\lim_{L, K \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \sum_{j=-L}^L \sum_{k=-K}^K d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t) \right\| = 0.$$

Существуют непрерывное и дискретное вейвлет-преобразования. В рамках нашего исследования мы будем работать с **дискретным вейвлет-преобразованием (ДВП)** поскольку для него существуют быстрые алгоритмы вычислений, экономные как по числу операций так и по требуемой памяти.

ДВП основано на ортонормированном базисе функций вида

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi_0(2^{-j}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

известным в литературе как **диадное вейвлет-преобразование**. Здесь  $1 \leq j \leq J$  отвечает за глубину разложения или уровень декомпозиции сигнала, причём за нулевой уровень  $j = 0$  обычно принимается уровень максимального временного разрешения сигнала, т.е. сам сигнал,  $J = \lceil \log_2 N \rceil$  — число октав,  $k = \overline{1, n_j}$  — номер коэффициента, а  $n_j = \lfloor 2^{-j} \cdot N \rfloor$  — число доступных вейвлет-коэффициентов на масштабе  $j$ .

В силу (9) коэффициенты  $d_{j,k}$  являются центрированными. Поэтому обратное ДВП (10) не способно выполнить восстановление нецентрированных сигналов. Поэтому вейвлет-функции  $\psi_{j,k}(t)$  используются в паре с так называемыми **масштабирующими** или **скейлинг-функциями**  $\varphi_k(t)$ . Скейлинг-функции имеют с вейвлетами общую область задания и определенное соотношение между значениями (формой), но их первый момент равен 1. С практической точки зрения

вейвлеты можно рассматривать как аналоги высокочастотных фильтров, выделяющих локальные особенности или «детали» сигнала, а скейлинг-функции — как аналоги низкочастотных фильтров, с помощью которых можно выделить «общую тенденцию его развития».

Скейлинг-функции образуют дополнительный базис в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$  и порождают коэффициенты

$$a_k = \langle f(t), \varphi_k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \varphi_k(t) dt. \quad (12)$$

Совокупность вейвлет-коэффициентов  $d_{j,k}$  и скейлинг-коэффициентов  $a_k$  позволяет выполнять точную реконструкцию сигналов по формуле

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \varphi_k(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t), \quad (13)$$

где  $a_k$  называют **коэффициентами аппроксимации сигнала**, а  $d_{j,k}$  — **коэффициентами детализации**.

Простейшая ортогональная система функций, подходящая для ДВП, была предложена венгерским математиком Альфредом Хааром в 1909 году. Материнская  $\psi_{0,k}(t)$  и масштабирующая  $\varphi_{0,k}(t)$  функции для **вейвлета Хаара** задаются соотношениями:

$$\psi_{0,k}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.5, \\ -1, & 0.5 \leq t < 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \varphi_{0,k}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (14)$$

Тогда для дочерних-вейвлетов  $\psi_{j,k}(t)$  справедливо правило:

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(t) &= 2^{-0.5 \cdot j} \cdot \psi_{0,k}(2^{-j}t - k) = 2^{-0.5 \cdot j} \cdot \psi_{0,k}(u - k) = \\ &= \begin{cases} 2^{-0.5 \cdot j}, & k \leq u < k + 0.5, \\ -2^{-0.5 \cdot j}, & k + 0.5 \leq u < k + 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Вейвлеты Хаара просты в построении и анализе. Они обладают хорошей локализацией во временной области, не локализованы в области частот и плохо анализируют гладкие сигналы.

Самое известное семейство дискретных вейвлет-преобразований с компактным носителем — **вейвлеты Добеши** было построено бельгийским математиком Ингрид Добеши в 1988 году. Оно включает вейвлет Хаара как частный случай при  $M = 2$ . Вейвлеты из этого семейства при  $M > 2$  основаны на неявно заданной материнской функции  $\psi_0(t)$  и вычисляются рекуррентно, в силу чего не очень удобны для аналитического исследования.

## 2.2. Структура вейвлет-коэффициентов для смешанного трафика

Предполагается, что входящий сигнал есть композиция двух независимых самоподобных процессов: фрактального броуновского движения (ФБМ) и  $\alpha$ -устойчивого движения Леви с одинаковыми параметрами Херста  $H$ , т.е.

$$X(t) = B_H(t) + L_\alpha(t), \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (16)$$

где  $0.5 < H < 1$ ,  $1 < \alpha = 1/H < 2$  — в этом случае у устойчивого распределения есть конечное среднее, но дисперсия бесконечна,  $N = 2^J$  — длина сигнала.

Устойчивый процесс Леви самоподобен и имеет независимые приращения с тяжёлыми хвостами. Фрактальное броуновское движение при  $0.5 < H < 1$  — самоподобный процесс с долгой памятью, приращения которого характеризуются лёгкими хвостами. Т.о. модель, комбинирующая оба этих процесса, позволяет отразить все характерные особенности современного сетевого трафика: самоподобие, долгую память и тяжёлые хвосты.

В силу самоподобия имеем

$$X(ct) = c^H B_H(t) + c^H L_\alpha(t), \quad c > 0. \quad (17)$$

В силу линейности вейвлет-преобразования, независимости процессов  $L_\alpha(t)$  и  $B_H(t)$  и свойства (17) получаем следующее

$$\begin{aligned} d_{j,k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) dX(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-0.5 \cdot j} \cdot \psi_{j,0}(2^{-j} \cdot t - k) dX(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-0.5 \cdot j} \cdot \psi_{j,0}(u - k) dX(2^j \cdot u) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{j \cdot (H-0.5)} \cdot \psi_{j,0}(u - k) dB_H(u) + \int_{-\infty}^{\infty} 2^{j \cdot (H-0.5)} \cdot \psi_{j,0}(u - k) dL_\alpha(u) = \\ &= 2^{j \cdot (H-0.5)} \cdot \left[ \int_k^{k+0.5} dB_H(u) - \int_{k+0.5}^{k+1} dB_H(u) + \int_k^{k+0.5} dL_\alpha(u) - \int_{k+0.5}^{k+1} dL_\alpha(u) \right] = \\ &= 2^{j \cdot (H-0.5)} \cdot \left( [2 \cdot B_H(k+0.5) - B_H(k) - B_H(k+1)] + [2 \cdot L_\alpha(k+0.5) - L_\alpha(k) - L_\alpha(k+1)] \right), \end{aligned}$$

где  $\nu = H - 0.5$ .

Вновь используя свойство самоподобия процессов  $B_H(t)$  и  $L_\alpha(t)$ , мы получаем следующее представление для

$$\begin{aligned} d_{j,k} &\stackrel{d}{=} 2^{j \cdot \nu} \cdot [2 \cdot (k+0.5)^H - k^H - (k+1)^H] \cdot [B(1) + L(1)] = \\ &= 2^{j \cdot \nu} \cdot c_k \cdot [B(1) + L(1)], \end{aligned} \quad (18)$$

где  $c_k = 2 \cdot (k+0.5)^H - k^H - (k+1)^H$ ,  $B(1)$  — гауссовская с.в. с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2 = 1$ , а  $L(1) = L_\alpha(1)$  — устойчивая симметричная с.в. с нулевым средним. Причём для каждого  $k$  имеем свои независимые с.в.  $B(1)$  и  $L(1)$ .

Вследствие ортонормированности базиса Хаара и свойства (9) коэффициенты  $\{d_{j,k}\}$  образуют совокупность квази-декоррелированных случайных величин. В частности, долговременная зависимость, присутствующая во временной области

для фрактального броуновского движения, практически полностью отсутствует в плоскости вейвлет–коэффициентов  $(j, k)$ . Более точно [17], скорость убывания автокорреляционной функции вейвлет–коэффициентов для ФВМ на всех масштабных шкалах пропорциональна величине

$$|k - s|^{2(H-M)}, \quad 1 \leq j \leq J,$$

где  $M$  — число нулевых моментов у выбранного материнского вейвлета. Следовательно, можно считать, что

1. для фиксированного  $j$  с.в.  $\{d(j, k)\}_{k \in Z}$  независимы;
2. последовательности  $\{d(j, k)\}_{k \in Z}$  при разных  $j$  независимы.

### 3. Оценка параметра $H$

Поскольку для устойчивого распределения существуют логарифмические моменты любых порядков мы будем строить оценки, следуя [13] и опираясь на поведение суммы логарифмов  $\log_2 |d_{j,k}|$  модулей отдельных коэффициентов.

В силу того, что

$$L_\alpha(1) \stackrel{d}{=} Y_1 \sqrt{Y_2}, \quad Y_1 \sim N(0, 1), \quad Y_2 \sim S_{\frac{\alpha}{2}}(1, 1, 0),$$

по формуле полной вероятности получаем, что

$$|d_{j,k}| \stackrel{d}{=} 2^{j \cdot (H-0.5)} \cdot |c_k| \cdot |Y_{1,k}| \cdot \sqrt{1 + Y_{2,k}}, \quad (19)$$

где  $\{Y_{1,k}\}$  и  $\{Y_{2,k}\}$  — независимые и одинаково распределённые с.в. со стандартным нормальным и односторонним устойчивым распределением соответственно.

Поскольку с.в.  $Y_2$  имеет одностороннее положительное  $\alpha/2$ -устойчивое распределение, справедливо

$$\log_2 |d_{j,k}| \stackrel{d}{\sim} (H - 0.5) \cdot j + \log_2 |c_k| + \log_2 |Y_{1,k}| + \log_2 \sqrt{1 + Y_{2,k}}.$$

По факту мы имеем дело с моделью

$$\begin{aligned} z_{j,k} &= \gamma_{j,k} + \beta \cdot j + \lambda_{j,k} = [\gamma_{j,k} + M(\lambda_{j,k})] + \beta \cdot j + [\lambda_{j,k} - M(\lambda_{j,k})] = \\ &= \alpha_{j,k} + \beta \cdot j + \varepsilon_{j,k}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\beta = H - 0.5$ , константа  $\alpha_{j,k}$  имеет вид

$$\alpha_{j,k} = \log_2 |c_k| + M(\log_2 |Y_{1,k}|) + M(\log_2 \sqrt{1 + Y_{2,k}}), \quad (21)$$

случайные ошибки  $\varepsilon_{j,k}$  — некоррелированы и имеют одинаковое распределение с нулевым средним и постоянной дисперсией

$$\sigma_{j,k}^2 = D(\varepsilon_{j,k}) = D(\log_2 |Y_{1,k}|) + D(\log_2 \sqrt{1 + Y_{2,k}}). \quad (22)$$

Для избавления от  $k$  перейдём к усреднённым величинам

$$z_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} z_{j,k} = \alpha_j + \beta \cdot j + \varepsilon_j, \quad (23)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \alpha_{j,k} = c_1(H), \quad (24)$$

$$\varepsilon_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \varepsilon_{j,k}, \quad \sigma_j^2 = \frac{c_2(H)}{n_j}, \quad (25)$$

где  $c_1(H)$  и  $c_2(H)$  есть некоторые константы, зависящие от  $H$  и независящие от номера октавы  $j$ , а ошибки  $\varepsilon_j$  независимы при разных  $j$  и имеют распределение с нулевым средним 0 и дисперсией, обратно пропорциональной числу коэффициентов  $n_j$ .

Следовательно, в (23) нарушено требование гомоскедастичности ошибок и для оценки коэффициентов этой модели можно использовать взвешенный МНК с весами  $w_j = n_j$ , т.е.

$$\arg \min_{\theta=(\alpha,\beta)} \sum_{j=1}^J n_j \cdot (z_j - \beta \cdot j - \alpha)^2. \quad (26)$$

В векторно-матричном представлении решение данной задачи имеет вид

$$\hat{\theta} = (X^T W^{-1} X)^{-1} X^T W^{-1} z,$$

где  $z_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \log_2 |d_{j,k}|$ , в качестве фактора  $x_j$  выступает номер октавы  $x_j = j$ , а  $W$  — диагональная матрица вида

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & J \end{pmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{pmatrix} n_J & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n_{J-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n_1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы ковариаций оценок справедливо

$$\Sigma(\hat{\theta}) = \hat{\sigma}^2 \cdot (X^T W^{-1} X)^{-1},$$

где состоятельная и несмещенная оценка для  $\sigma^2$  вычисляется по формуле

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{J-2} \cdot (z - X\hat{\beta})^T W^{-1} (z - X\hat{\beta}).$$

По теореме Эйткена оценка  $\hat{\beta}$  является несмещенной, состоятельной и эффективной в классе линейных несмещенных оценок. Поскольку  $\beta = H - 0.5$ , для  $H$  справедливо

$$\hat{H} = \hat{\beta} + 0.5. \quad (27)$$

*Замечание 1.* В силу нерегулярного поведения  $z_j$  на «грубых» уровнях разложения их можно исключать при построении регрессии, т.е. полагать  $1 \leq j \leq j_0 < J$ .

#### 4. Численное моделирование

На основе предложенной методики, разработана численная процедура оценки параметра  $0.5 < H < 1$  для смешанного трафика, а также её программная реализация. В качестве исходных данных используются смоделированные процессы, состоящие из независимых дробного броуновского движения с параметром  $0.5 < H < 1$  и  $\alpha = H^{-1}$ -устойчивого движения Леви.

Ниже на графиках типа «ящик с усами» представлены результаты оценки для трёх «смешанных» процессов с  $H = 0.58$ ,  $H = 0.75$  и  $H = 0.92$  по  $K = 100$  смоделированным траекториям. Нас интересует поведение оценки  $\hat{H}$  в зависимости от длины сигнала  $N = 2^{11} : 2^{18}$  и числа уровней декомпозиции  $11 - 18$  при фиксированной длине сигнала  $N = 2^{18}$ .

Анализ Рис. 1 подтверждает, что с увеличением длительности сигнала возрастает и точность получаемой оценки  $\hat{H}$ . Относительная «нерегулярность» величин  $z_j$  на грубых уровнях разложения существенно на точность оценки не влияет, средние и медианы оценок  $\hat{H}$  ведут себя стабильно и по величине близки к своим теоретическим значениям.

Стандартная теория линейной регрессии предполагает нормальное распределение для величины ошибки  $\varepsilon_j$  или эквивалентно  $d_j$ . Но на практике при большом числе наблюдений и конечных дисперсиях метод наименьших квадратов мало чувствителен к конкретному виду распределения и статистика  $\hat{H}$  оказывается в пределе распределена по нормальному закону. Этот факт иллюстрируется на графиках гистограмм и квантилей (Рис. 2), где уровень разложения  $j$  выбран в соответствии с минимальным значением  $\chi^2$ -критерия согласия с нормальным законом.

Таблица 1: Результаты численного моделирования

Статистики для $\hat{H}$	$H = 0.58,$ $j = 16$	$H = 0.75,$ $j = 16$	$H = 0.92,$ $j = 12$
среднее	0.5803	0.7503	0.9204
ст. откл.	0.0032	0.0043	0.0058
медиана	0.5802	0.7503	0.9202
квантиль, 1/4	0.5781	0.7474	0.9167
квантиль, 3/4	0.5826	0.7530	0.9240
макс.	0.5881	0.7616	0.9337
мин.	0.5739	0.7395	0.9069
$\chi^2, df = 6$	2.9114	1.4051	0.3793

#### Заключение

В настоящей статье описан метод оценки параметра  $H$  для смешанного процесса, являющегося суммой независимых фрактального броуновского движения и  $\alpha$ -устойчивого движения Леви. Процедура оценивания заключается в

частотно–временной декомпозиции сигнала с помощью вейвлета Хаара с последующим применением взвешенной линейной регрессии к сумме модулей вейвлет–коэффициентов. Работоспособность алгоритма проверена на искусственно смоделированных данных.

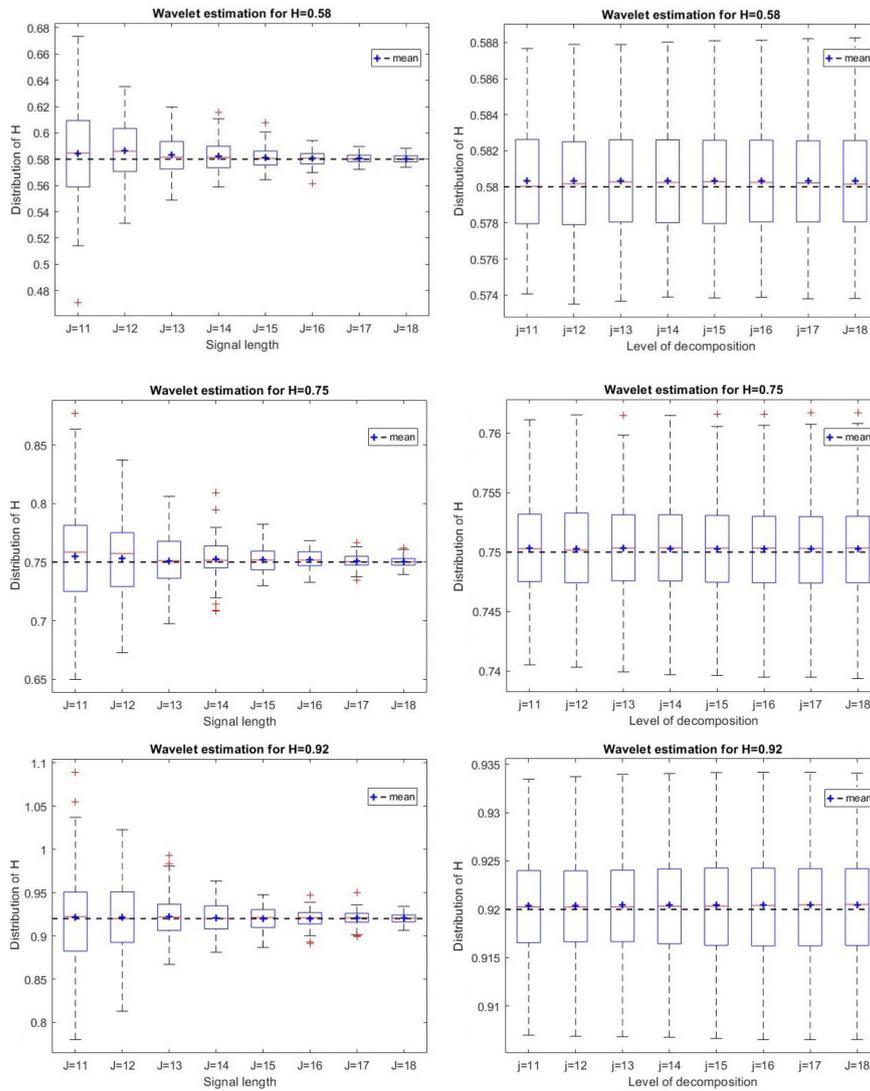


Рис. 1: Характеристики оценок  $\hat{H}$  для 100 независимых траекторий при  $H = 0.58; 0.75; 0.92$

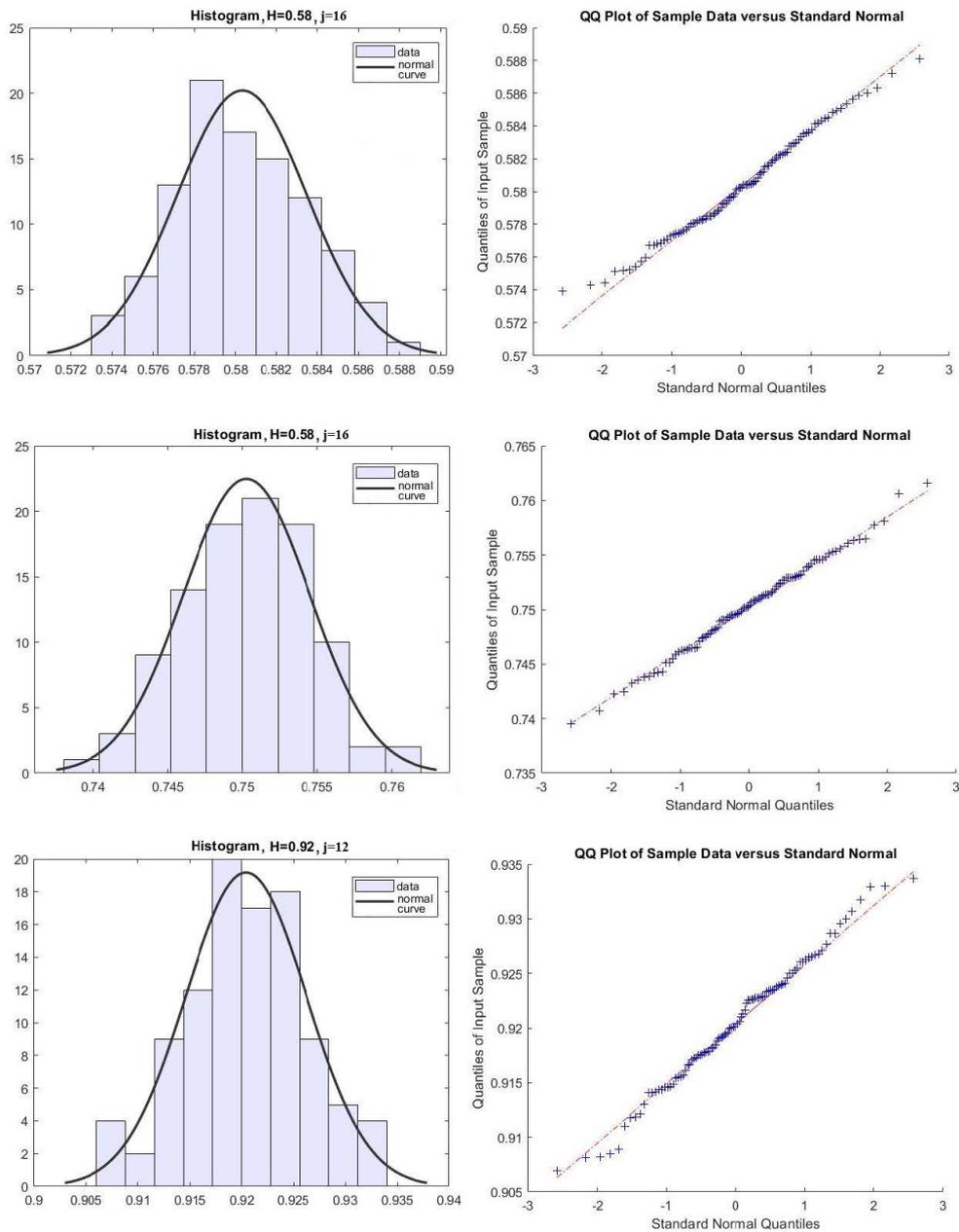


Рис. 2: Гистограмма и график квантилей для распределения  $\hat{H}$  при  $N = 2^{18}$  и уровне разложения  $j$

### Список литературы

- [1] Abry P., Sellan F. The wavelet-based synthesis for the fractional Brownian motion

- proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and fast implementation // *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 1996. Vol. 3, № 4. Pp. 377–383.
- [2] Crovella M., Bestavros A. Self-similarity in world wide web traffic: evidence and possible cases // *Proceedings of the 1996 ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modelling of Computer Systems*. Vol. 4. 1996. Pp. 160–169.
- [3] Crovella M., Kim G., Park K. On the relationship between file sizes, transport protocols, and self-similar network traffic // *Proceedings of the Fourth International Conference on Network Protocols, ICNP'96*. 1996. Pp. 171–180.
- [4] Галактионова О.В., Хохлов Ю.С. Модель телеграфика, объединяющая устойчивое движение Леви и дробное броуновское движение // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2006. № 4 (21). С. 163–167.
- [5] Гончаров Б.А., Сидорова О.И., Хохлов Ю.С. Оценка качества обслуживания в неоднородных моделях трафика // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2018. № 4. С. 50–63. <https://doi.org/10.26456/vtprm517>
- [6] Khokhlov Yu.S., Lukashenko O.V., Morozov E.V. On a lower asymptotic bound of the overflow probability in a fluid queue with a heterogeneous fractional input // *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 237, № 5. Pp. 667–672.
- [7] Leland W.E., Taqqu M.S., Willinger W., Willson D.V. On the self-similar nature of Ethernet traffic (Extended version) // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 1994. Vol. 2. Pp. 1–15.
- [8] Mikosch Th., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A. Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? // *Annals of Applied Probability*. 2002. Vol. 12, № 1. Pp. 23–68.
- [9] Korolev V.Yu. Product representation for random variables with Weibul distribution and their application // *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 218, № 3. Pp. 298–313. <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3031-7>
- [10] Park J., Park C. Robust estimation of the Hurst parameter and selection of an onset scaling // *Statistica Sinica*. 2009. Vol. 19. Pp. 1531–1555.
- [11] Samorodnitsky G., Taqqu M.S. *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman and Hall, 1994.
- [12] Sarvotham S., Riedi R., Baraniuk R. Connection-level Analysis and Modeling of Network Traffic // *Proceedings of the 1st ACM SIGCOMM Workshop on Internet measurement, IMW '01 (San Francisco, California, USA)*. 2001. Pp. 99–103. <http://dx.doi.org/10.1145/505202.505215>
- [13] Stoev S., Taqqu M. Wavelet estimation for the Hurst parameter in stable processes // *Processes with long-range correlations: theory and applications*. Eds. by G. Rangarajan, M. Ding. Berlin: Springer-Verlag, 2003. Pp. 61–87.

- [14] Taqqu M., Willinger W., Sherman R. Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling // Computer Communications Review. 1997. Vol. 27, № 2. Pp. 5–23.
- [15] Veitch D., Abry P. A wavelet-based joint estimator of the parameters of long-range dependence // IEEE Transactions on Information Theory. 1999. Vol. 45, № 3. Pp. 878–897.
- [16] Weron R. On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables // Statistics & Probability Letters. 1996. Vol. 28. Pp. 165–171.
- [17] Wang Y. Function estimation via wavelet shrinkage for long-memory data // Annals of Statistics. 1996. Vol. 24, № 2. Pp. 466–484.
- [18] Zolotarev V.M. One-dimensional stable distributions. Translations of Mathematical Monographs. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1986.

#### Образец цитирования

Сидорова О.И., Хохлов Ю.С. Оценка параметра Хёрста для смешанного трафика // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 3. С. 20–39. <https://doi.org/10.26456/vtprm537>

#### Сведения об авторах

**1. Сидорова Оксана Игоревна**

доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*

*E-mail: [oksana.i.sidorova@yandex.ru](mailto:oksana.i.sidorova@yandex.ru)*

**2. Хохлов Юрий Степанович**

профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

*Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.*

*E-mail: [yshokhlov@yandex.ru](mailto:yshokhlov@yandex.ru)*

## ESTIMATION OF THE HURST EXPONENT IN THE MIXED TRAFFIC MODELS

**Sidorova Oksana Igorevna**

Associate Professor in the Department of Mathematical Statistics and System  
Analysis, Tver State University  
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.  
E-mail: [oksana.i.sidorova@yandex.ru](mailto:oksana.i.sidorova@yandex.ru)

**Khokhlov Yuri Stepanovich**

Professor in the Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational  
Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University  
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.  
E-mail: [yshokhlov@yandex.ru](mailto:yshokhlov@yandex.ru)

---

Received 25.08.2019, revised 16.09.2019.

---

In this paper we consider the problem of the Hurst parameter estimation for the input flow generated by the composition of independent fractal brownian motion and  $\alpha$ -stable Lévy motion. We use the time–frequency decomposition of the process by Haar wavelet and apply the weighted least square regression to the sum of logarithms of the wavelet–coefficients absolute values. Proposed method doesn't require any additional corrections neither dependent variable nor octave's number  $j$  (factor variable) and provides an asymptotically efficient estimation. Several simulated examples are used for its illustration.

**Keywords:** long-range dependence, heavy-tailed distributions, fractal brownian noise,  $\alpha$ -stable Lévy motion, Hurst parameter, weighted least square regression.

### Citation

Sidorova O.I., Khokhlov Yu.S., “Estimation of the Hurst exponent in the mixed traffic models”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 3, 20–39 (in Russian).  
<https://doi.org/10.26456/vtpmk537>

### References

- [1] Abry P., Sellan F., “The wavelet-based synthesis for the fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and fast implementation”, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **3:4** (1996), 377–383.
- [2] Crovella M., Bestavros A., “Self-similarity in world wide web traffic: evidence and possible cases”, *Proceedings of the 1996 ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modelling of Computer Systems*. V. 4, 1996, 160–169.

- [3] Crovella M., Kim G., Park K., “On the relationship between file sizes, transport protocols, and self-similar network traffic”, *Proceedings of the Fourth International Conference on Network Protocols, ICNP’96*, 1996, 171–180.
- [4] Galaktionova O.V., Khokhlov Yu.S., “A new teletraffic model that combines stable Levy motion and fractional Brownian motion”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2006, № 4 (21), 163–167 (in Russian).
- [5] Goncharov B.A., Sidorova O.I., Khokhlov Yu.S., “Performance estimation in non-homogeneous traffic models”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2018, № 4, 50–63 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk517>.
- [6] Khokhlov Yu.S., Lukashenko O.V., Morozov E.V., “On a lower asymptotic bound of the overflow probability in a fluid queue with a heterogeneous fractional input”, *Journal of Mathematical Sciences*, **237**:5 (2019), 667–672.
- [7] Leland W.E., Taqqu M.S., Willinger W., Willson D.V., “On the self-similar nature of Ethernet traffic (Extended version)”, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, **2** (1994), 1–15.
- [8] Mikosch Th., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A., “Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion?”, *Annals of Applied Probability*, **12**:1 (2002), 23–68.
- [9] Korolev V.Yu., “Product representation for random variables with Weibul distribution and their application”, *Journal of Mathematical Sciences*, **218**:3 (2016), 298–313, <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3031-7>.
- [10] Park J., Park C., “Robust estimation of the Hurst parameter and selection of an onset scaling”, *Statistica Sinica*, **19** (2009), 1531–1555.
- [11] Samorodnitsky G., Taqqu M.S., *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall, 1994.
- [12] Sarvotham S., Riedi R., Baraniuk R., “Connection-level Analysis and Modeling of Network Traffic”, *Proceedings of the 1st ACM SIGCOMM Workshop on Internet measurement, IMW ’01* (San Francisco, California, USA), 2001, 99–103, <http://dx.doi.org/10.1145/505202.505215>.
- [13] Stoev S., Taqqu M., “Wavelet estimation for the Hurst parameter in stable processes”, *Processes with long-range correlations: theory and applications*, eds. G. Rangarajan, M. Ding, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 61–87.
- [14] Taqqu M., Willinger W., Sherman R., “Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling”, *Computer Communications Review*, **27**:2 (1997), 5–23.
- [15] Veitch D., Abry P., “A wavelet-based joint estimator of the parameters of long-range dependence”, *IEEE Transactions on Information Theory*, **45**:3 (1999), 878–897.

- 
- [16] Weron R., “On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables”, *Statistics & Probability Letters*, **28** (1996), 165–171.
- [17] Wang Y., “Function estimation via wavelet shrinkage for long-memory data”, *Annals of Statistics*, **24:2** (1996), 466–484.
- [18] Zolotarev V.M., *One-dimensional stable distributions*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986.