УДК 519.216.8, 519.216.22

# УСЛОВИЯ КОМПАКТНОСТИ СЕМЕЙСТВА МЕР ГИЛЬБЕРТОВОЗНАЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СЕМИМАРТИНГАЛОВ

**Лаврентьев В.В.***, **Бугримов А.Л.****
*МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
**Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина, г. Москва

*Поступила в редакцию 01.08.2019, после переработки 13.10.2019.*

В данной статье рассматриваются условия относительной компактности для семейства мер гильбертовозначных непрерывных семимартингалов. Условия формулируются для триплета локальных характеристик семимартингала, который определяется по семимартингалу единственным образом.

**Ключевые слова:** семимартингал, гильбертово пространство, компактность мер, стохастически непрерывные процессы.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 39–51.*
https://doi.org/10.26456/vtpmk545

## Введение

Липцер Р.Ш. и Ширяев А.Н. в [1, 2] исследовали достаточные условия слабой сходимости последовательности семимартингалов к произвольному стохастически непрерывному процессу с независимыми приращениями. Техника интегрирования по семимартингалам и стохастическим мерам позволила единым образом рассматривать как случай непрерывного, так и дискретного времени. В частности, эта «семимартингальная схема» включает в себя традиционную схему серий, изученную во многих работах (см. библиографию в [1, 2]).

При обобщении этих результатов на бесконечномерный случай возникают не только технические, но и совершенно новые принципиальные трудности, которые, в основном, связаны с тем фактом, что ограниченные множества в бесконечномерных пространствах не являются, вообще говоря, компактными множествами. Важный шаг в преодолении этих трудностей при исследовании в гильбертовом пространстве связан с фундаментальной теоремой Ю.В.Прохорова [3], в которой были получены условия относительной компактности семейства распределений в терминах вторых моментов. Эти результаты послужили основой для вывода условий слабой сходимости распределений сумм независимых гильбертовозначных случайных величин к безгранично делимым распределениям, которые изучались рядом авторов.

Напомним (см. [2, 3]), что семейство вероятностных мер называется *относительно компактным,* если любая последовательность мер из этого семейства содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой вероятностной мере (хотя может и не принадлежащей исходному семейству).

Проверка относительной компактности не совсем простое дело, поэтому напомним ещё одно определение. Семейство мер $\mathcal{P} = \{P_\alpha; \alpha \in \mathfrak{U}\}$ на измеримом пространстве $\mathbb{E}$ называется *плотным,* если для каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subseteq \mathbb{E}$ такой, что

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{U}} P_\alpha(\mathbb{E} \setminus K) \leq \varepsilon.$$

Согласно теореме Прохорова, семейство мер на полном сепарабельном метрическом пространстве относительно компактно тогда и только тогда, когда оно является плотным [3].

Для гильбертового пространства известны условия относительной компактности семейства мер локально квадратично интегрируемых мартингалов [4]. Данная работа распространяет эти результаты на случай гильбертовозначных семимартингалов и доказательство утверждений во многом основано на статье [4].

Рассмотренные в данной работе условия относительной компактности семейства мер гильбертовозначных семимартингалов позволяют в дальнейшем исследовать условия слабой сходимости семимартингалов из работы [1] для семимартингалов со значениями в гильбертовом пространстве.

## 1. Основные определения и вспомогательные результаты

Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ выделено неубывающее непрерывное справа семейство $\sigma$-алгебр $F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ и $X = (X_t, \mathfrak{F}_t; \mathbb{H})$ – семимартингал, принимающий значения в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$.

Обозначим через $\mu = \mu\,(dt, dx)$ целочисленную случайную меру скачков семимартингала $X$ и $\nu = \nu(ds, dx)$ – ее компенсатор [5]:

$$\mu\left((0,t], \Gamma\right) = \sum_{0<s\leq t} I\left(\Delta X_s \in \Gamma\right), \quad \Gamma \in \mathcal{B}\left(\mathbb{H} \setminus \{0\}\right),$$

где $\mathcal{B}$ – $\sigma$-алгебра борелевских множеств.

Напомним, что для гильбертовозначного семимартингала $X$ справедливо следующее каноническое разложение [6]:

$$X_t = X_0 + B_t + M_t + \int_0^t \int_{\|x\|\leq 1} x d(\mu - \nu) + \int_0^t \int_{\|x\|>1} x\,\mu\,(ds, dx)\,, \tag{1}$$

где $B = (B_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ – предсказуемый процесс с локально интегрируемой вариацией, $M = (M_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ – непрерывный локальный мартингал, $\mu = \mu(ds, dx)$ – мера скачков семимартингала $X$ и $\nu = \nu(ds, dx)$ – ее компенсатор.

Для гильбертовозначного процесса $X$ при $i \geq 1$ через $x_i$ будем обозначать действительные процессы, определяемые равенствами $(x_i)_t = (e_i, X_t)$, где $\{e_i\}$ – ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, т.е. $X_t = ((x_1)_t, (x_2)_t, \cdots)$.

Тогда локально квадратично интегрируемому гильбертовозначному мартингалу $M$ соответствует набор предсказуемых действительных процессов локально интегрируемой вариации $(< m_i, m_j >)_{i,j\geq 1}$ таких, что $m_i m_j - < m_i, m_j >$ – локальный мартингал; $< m_i > \equiv < m_i, m_i >$ . Заметим [7], что

$$< M >_t = \sum_{i=1}^{\infty} < m_i >_t .$$

По аналогии с конечномерным случаем набор $(B, (< m_i, m_j >)_{i,j\geq 1}, \nu)$ будет называться триплетом локальных характеристик семимартингала $X$. Следует отметить, что этот триплет определяется по процессу $X$ единственным образом.

## 2. Основные результаты

**Теорема 1.** *Пусть* $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$, $X^n = (X^n_t, \mathcal{F}^n_t; \mathbb{H}), n \geq 1$ *– семимартингалы с траекториями в измеримом пространстве* $(\mathbf{D}(\mathbb{H}), \mathcal{D})$ *с топологией Скорохода.*

*Пусть семимартингал* $X$*, принимающий значения в гильбертовом пространстве* $\mathbb{H}$*, является стохастически непрерывным процессом и выполнено условие*

$$X^n_0 \xrightarrow{d} X_0. \tag{2}$$

*A) Если для любых* $t = T$ *выполнены условия*

$$B^n_t \xrightarrow{P} B_t, \tag{3}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n \mathbf{P}(|< m^{n\epsilon}_i, m^{n\epsilon}_j >_t - < m_i, m_j >_t| > a) = 0,\ a > 0,\ i, j \geq 1; \tag{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_n \mathbf{P}(|< M^{n\varepsilon} >_t - < M >_t| > a) = 0,\ a > 0; \tag{5}$$

*для любой непрерывной ограниченной функции* $f = f(x)$ *равной нулю в некоторой окрестности нуля*

$$\int_0^t \int_{\mathbb{H}\setminus\{0\}} f(x)\nu^n(ds, dx) \xrightarrow{P} \int_0^t \int_{\mathbb{H}\setminus\{0\}} f(x)\nu(ds, dx), \tag{6}$$

*то семейство распределений случайных элементов* $X^n_T, n \geq 1$*, относительно компактно.*

*B) Если для любых* $t \in \mathbb{R}_+$ *выполнено условие*

$$\sup_{o<s\leq t} \|B^n_s - B_s\| \xrightarrow{P} 0, \tag{7}$$

*и условия (4),(5),(6), то семейство мер процессов* $X^n, n \geq 1$*, относительно компактно.*

*Доказательство.* A) Для доказательства первой части теоремы достаточно проверить выполнение условий a) и b) теоремы 1 в [4].

Для гильбертовозначных семимартингалов $X^n$ справедливо следующее разложение [6]:

$$X_t^n = X_0^n + B_t^n + M_t^{n\varepsilon} + \int_0^t \int_{\|x\|>\varepsilon} x\, d\mu^n - \int_0^t \int_{\varepsilon<\|x\|\le 1} x d\nu^n \tag{8}$$

где $M^\varepsilon = (M_t^\varepsilon, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ – локально квадратично интегрируемый мартингал (как процесс со скачками ограниченнными $\varepsilon$).

Рассмотрим непрерывные функции $g_c(x)$ и $f(x)$ такие, что при $c > 1$

$$0 \le g_c(x) \le c,\ I(\|x\| > \frac{\varepsilon}{2}) g_c(x) = g_c(x) \ge (\|x\| \wedge c) I(\|x\| > \varepsilon), \tag{9}$$

$$0 \le f(x) \le 1,\ I(\|x\| > \frac{\varepsilon}{2}) f(x) = f(x) \ge I(\varepsilon < \|x\| \le 1). \tag{10}$$

Тогда для проверки условия а) (теоремы 1 в [4]) можно воспользоваться схемой, предложенной в работе [1] для одномерного $\mathbb{H}$, и использовать следующую оценку, вытекающую из (8) -(10):

$$\|X_T^n\| \le \|X_0^n\| + \|B_T\| + \|B_T^n - B_T\| + \|M_T^{n\varepsilon}\| + \tag{11}$$
$$+ \int_0^T \int_{\|x\|>c} \|x\| d\mu^n + \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x) d\mu^n + \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} f(x) d\mu^n.$$

Обозначим через $\alpha^n$ любое слагаемое в правой части неравенства (11), тогда для проверки условия а) теоремы 1 в [4] достаточно показать, что для любого $\eta > 0$ существует такое $a > 0$, что

$$\sup_n \mathbf{P}(\alpha^n > a) < \eta. \tag{12}$$

Так как из условия (2) вытекает, что $\|X_0^n\| \xrightarrow{d} \|X_0\|$, то для случая $\alpha^n = \|X_0^n\|$ соотношение (12) доказано в работе [1] (с. 345). Случай $\alpha^n = \|B_T\|$ очевиден, а при $\alpha^n = \|B_T^n - B_T\|$ соотношение (12) вытекает из условия (3). Для $\alpha^n = \|M_T^{n\varepsilon}\|$ заметим, что процесс $\|M^{n\varepsilon}\|^2$ мажорируется процессом $< M^{n\varepsilon} >$, поэтому можно воспользоваться неравенством Ленгляра и тогда из условия (5), как показано в [1] (с. 345), вытекает соотношение (12).

При $\alpha^n = \int_0^T \int_{\|x\|>c} \|x\| d\mu^n$ или $\alpha^n = \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} \|f(x)\| d\mu^n$ доказательство соотношения (12) полностью (если заменить $|.|$) на $\|.\|$) совпадает с доказательством аналогичных случаев в [1] (с. 345-346).

Пусть $\alpha^n = \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} \|g_c(x)\| d\mu^n$. Применяя неравенство Ленгляра [8], получаем, что

$$\mathbf{P}(\alpha^n > a) \le \frac{b}{a} + \mathbf{P}(\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x) d\nu^n \ge b) \le \frac{b}{a} + \mathbf{P}(\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x) d\nu \ge \frac{b}{2}) +$$
$$+ \mathbf{P}(|\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x) d\nu^n - \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x) d\nu| \ge \frac{b}{2}).$$

В соответствии с леммой [6] выберем такое $b > 0$, что

$$\mathbf{P}(\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x) d\nu \ge \frac{b}{2}) < \frac{\eta}{4},$$

тогда в силу условия (6) существует $n_0 = n_0(\eta)$ такое, что

$$\sup_{n\geq n_0} \mathbf{P}(|\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x)d\nu^n - \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x)d\nu| \geq \frac{b}{2}) < \frac{\eta}{4}.$$

Таким образом, $\sup_{n\geq n_0} \mathbf{P}(\alpha^n > a) < \dfrac{b}{a} + \dfrac{\eta}{2}$ и число $a > 0$ выбирается из условий $\dfrac{b}{a} < \dfrac{\eta}{4}$ и $\sum_{k=1}^{n_0-1} \mathbf{P}(\alpha^n > a) < \dfrac{\eta}{4}$.

Для доказательства условия b) теоремы 1 в [4] введём некоторые обозначения. Через $\mathbb{G}_r$ (для $r \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ ) будем обозначать подпространство в $\mathbb{H}$, порожденное первыми $r$ базисными векторами $\{e_1, ..., e_r\}$ в $\mathbb{H}$. Для $h \in \mathbb{H}$ будем обозначать

$$\Delta_r h \equiv h - \sum_{i=1}^{r} (h, e_i)e_i, \tag{13}$$

где $\{e_i\}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{H}$.

Из (8) вытекает, что

$$\Delta_r X_t^n = \Delta_r X_0^n + \Delta_r B_t^n + \Delta_r M_t^{n\varepsilon} + \int_0^t \int_{\|x\|>\varepsilon} \Delta_r x\, d\mu^n - \int_0^t \int_{\varepsilon<\|x\|\leq 1} \Delta_r x d\nu^n. \tag{14}$$

Так как $\inf(\|X_T^n - g\| : g \in \mathbb{G}_r) = \|\Delta_r X_T^n\|$, то для проверки условия b) теоремы 1 в [4] достаточно показать, что для любых $\eta > 0, \delta > 0$ существует такое $r_0$, что

$$\sup_n \mathbf{P}\{\|\Delta_{r_0} X_T^n\| > \delta\} < \eta. \tag{15}$$

Для этого будет использоваться следующая оценка, вытекающая из (14) ($c > 1$):

$$\|\Delta_r X_T^n\| \leq \|\Delta_r X_0^n\| + \|\Delta_r B_T\| + \|\Delta_r (B_T^n - B_T)\| + \|\Delta_r M_T^{n\varepsilon}\| + \tag{16}$$

$$+ \int_0^T \int_{\|x\|>c} \|\Delta_r x\|\, d\mu^n + \int_0^T \int_{\varepsilon<\|x\|\leq c} \|\Delta_r x\|\, d\mu^n + \int_0^T \int_{\varepsilon<\|x\|\leq 1} \|\Delta_r x\| d\nu^n.$$

Пусть $\beta_r^n$ обозначает любой из членов в правой части неравенства (16), тогда для справедливости (15) достаточно показать, что для любых $\eta > 0, \delta > 0$ существует такое $r_0 \geq 1$, что

$$\sup_n \mathbf{P}\{\beta_{r_0}^n > \delta\} < \eta. \tag{17}$$

1) $\beta_r^n = \|\Delta_r X_0^n\|$. В силу условия (2) и обратной теоремы Прохорова [3] существует компакт $K$ такой, что $\sup_n \mathbf{P}\{X_0^n \notin K\} < \eta$.

Пусть $G_r^\delta = \{h \in \mathbb{H} : \inf(\|h - g\| : g \in G_r) < \delta\}$, тогда $\bigcup_{r\geq 1} G_r^\delta = \mathbb{H} \supset K$ и можно выбрать такое $r_0$, что $G_{r_0}^\delta = \bigcup_{r=1}^{r_0} G_r^\delta \supset K$. Таким образом

$$\sup_n \mathbf{P}(\|\Delta_{r_0} X_0^n\| > \delta) \leq \sup_n \mathbf{P}(X_0^n \notin G_{r_0}^\delta) \leq \sup_n \mathbf{P}(X_0^n \notin K) < \eta.$$

2) $\beta_r^n = \|\Delta_r B_T\|$. Выберем такой компакт $K$, что $\mathbf{P}\{B_T \notin K\} < \eta$ и такое $r_o$, что $G_{r_0}^\delta = \bigcup_{r=1}^{r_0} G_r^\delta \supset K$. Тогда для $r \geq r_0$

$$\mathbf{P}(\|\Delta_r B_T\| > \delta) \leq \mathbf{P}(B_T \notin K) < \eta. \tag{18}$$

3) $\beta_r^n = \|\Delta_r(B_T^n - B_T)\|$. Выберем такое $n_0$, что $\sup_{n\ge n_0}\mathbf{P}(\|B_T^n - B_T\| > \delta) < \dfrac{\eta}{2}$, тогда $\sup_n \mathbf{P}(\|B_T^n - B_T\| > \delta) \le \sum_{k=1}^{n_0-1}\mathbf{P}(\beta_r^k > \delta) + \dfrac{\eta}{2}$ и достаточно выбрать (см. (18)) такое $r_0$, чтобы выполнялось соотношение $\sum_{k=1}^{n_0-1}\mathbf{P}(\beta_r^k > \delta) < \dfrac{\eta}{2}$. 4) $\beta_r^n = \|\Delta_r M_T^{n\varepsilon}\|$. Неравенство (17) достаточно проверить для некоторого $\varepsilon_0 = \varepsilon_o(\eta)$. В силу неравенства Ленгляра [8] $\mathbf{P}(\|\Delta_r M_T^{n\varepsilon}\| > \delta) \le \dfrac{b}{\delta^2} + \mathbf{P}(<\Delta_r M^{n\varepsilon}>_T \ge b)$. Заметим, что для любого $r \ge r_1 > 0$

$$\mathbf{P}(<\Delta_r M^{n\varepsilon}>_T \ge b) \le \mathbf{P}(<\Delta_{r_1} M^{n\varepsilon}>_T \ge b) \le$$

$$\le \mathbf{P}(<\Delta_{r_1} M>_T \ge \frac{b}{2}) + \mathbf{P}(|<\Delta_{r_1} M^{n\varepsilon}>_T - <\Delta_{r_1} M>_T| \ge \frac{b}{2}).$$

Выберем $b > 0$ таким, что $\dfrac{b}{\delta^2} < \dfrac{\eta}{4}$. При фиксированном $b > 0$ выберем $r_1 = r_1(\eta)$ из условия $\mathbf{P}(<\Delta_{r_1} M>_T \ge \dfrac{b}{2}) < \dfrac{\eta}{4}$. Далее, в силу условий (4) и (5) можно выбрать такие $n_0 = n_0(\eta)$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$, что

$$\sup_{n\ge n_0} \mathbf{P}(|<\Delta_{r_1} M^{n\varepsilon}>_T - <\Delta_{r_1} M>_T| \ge \frac{b}{2}) < \frac{\eta}{4}.$$

Таким образом, достаточно выбрать $r_0 \ge r_1$ из условия

$$\sum_{k=1}^{n_0-1} \mathbf{P}(\|\Delta_{r_0} M^{k\varepsilon_0}\| > \delta) < \frac{\eta}{4}.$$

5) $\beta_r^n = \int_0^T \int_{\|x\|>c} \|\Delta_r x\|\, d\mu^n$. Соотношение (17) достаточно проверить для некоторого $c = c(\eta)$. Рассмотрим непрерывную функцию $f_c(x)$ такую, что $0 \le f_c(x) \le 1$ и $I(\|x\| > c) \le f_c(x) = f_c(x) I(\|x\| > \dfrac{c}{2})$. Так как

$$\{\beta_r^n > \delta\} \subseteq \{\int_0^T \int_{\|x\|>c} d\mu^n \ge 1\} \subseteq \{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{c}{2}} f_c(x)\, d\mu^n \ge 1\},$$

то, используя неравенство Ленгляра [8], получаем, что

$$\mathbf{P}\{\beta_r^n > \delta\} \le \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{c}{2}} f_c(x)\, d\mu^n \ge 1\} \le b + \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{c}{2}} f_c(x)\, d\nu^n \ge b\} \le b +$$

$$+ \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{c}{2}} f_c(x)\, d\nu \ge \frac{b}{2}\} + \mathbf{P}\{|\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{c}{2}} f_c(x) d\nu^n - \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{c}{2}} f_c(x) d\nu| \ge \frac{b}{2}\}.$$

Полагая $b = \dfrac{\eta}{4}$, выберем, в силу леммы [6], $c = c(\eta)$ таким, что

$$\mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{c}{2}} f_c(x)\, d\nu \ge \frac{\eta}{8}\} < \frac{\eta}{4}.$$

В силу условия (6) существует такое $n_0 = n_0(\eta)$, что

$$\sup_{n\geq n_0} \mathbf{P}\{|\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{c}{2}} f_c(x)d\nu^n - \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{c}{2}} f_c(x)d\nu| \geq \frac{\eta}{8}\} < \frac{\eta}{4}.$$

Таким образом, для любого $r \geq 1$ $\sup_{n\geq n_0} \mathbf{P}(\beta_r^n > \delta) < \dfrac{3\eta}{4}$ и $r_0$ выбирается из соотношения $\sum_{k=1}^{n_0-1} \mathbf{P}(\beta_{r_0}^n > \delta) < \dfrac{\eta}{4}$.

6) $\beta_r^n = \int_0^T \int_{\varepsilon\leq\|x\|\leq c} \|\Delta_r x\|\, d\mu^n$. Рассмотрим последовательность непрерывных функций $g_r^c(x)$ таких, что

$$0 \leq g_r^c(x) \leq \|\Delta_r x\| \wedge c,\ (\|\Delta_r x\| \wedge c) I(\|x\| > \varepsilon) \leq g_r^c(x) = g_r^c(x) I(\|x\| > \varepsilon). \tag{19}$$

Применяя неравенство Ленгляра, заметим, что для любых $r \geq r_1$

$$\mathbf{P}(\beta_r^n > \delta) \leq \frac{b}{\delta} + \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\varepsilon<\|x\|\leq c} g_r(x)d\nu^n \geq b\} \leq$$

$$\leq \frac{b}{\delta} + \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_{r_1}(x)d\nu^n \geq b\} \leq \frac{b}{\delta} + \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_{r_1}(x)d\nu \geq \frac{b}{2}\} + \tag{20}$$

$$+\mathbf{P}\{|\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_{r_1}(x)d\nu^n - \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_{r_1}(x)d\nu| \geq \frac{b}{2}\}.$$

Выберем $b > 0$ таким, что $b < \dfrac{\delta\eta}{4}$ и такое $r_1 \geq 1$, что

$$\mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} \|\Delta_{r_1} x\| \wedge c\, d\nu \geq \frac{b}{2}\} < \frac{\eta}{4}.$$

Далее, в силу условия (6), существует $n_0 = n_0(\eta)$ такое, что

$$\sup_{n\geq n_0} \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_{r_1}(x)d\nu^n - \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_{r_1}(x)d\nu \geq \frac{b}{2}\} < \frac{\eta}{4}.$$

Таким образом, для любого $r \geq r_1$ $\sup_{n\geq n_0} \mathbf{P}(\beta_r^n > \delta) < \dfrac{3\eta}{4}$ и $r_0 \geq r_1$ выбирается из соотношения $\sum_{k=1}^{n_0-1} \mathbf{P}(\beta_{r_0}^n > \delta) < \dfrac{\eta}{4}$.

7) $\beta_r^n = \int_0^T \int_{\varepsilon<\|x\|\leq 1} \|\Delta_r x\|\, d\nu^n$. Пусть $g_r(x)$ – множество непрерывных функций, определённых соотношениями (19) при $c = 1$. Тогда при $r \geq r_1 \geq 1$

$$\mathbf{P}(\beta_r^n > \delta) \leq \mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_{r_1}(x)d\nu > \frac{\delta}{2}\} +$$

$$+\mathbf{P}\{|\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_{r_1}(x)d\nu^n - \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_{r_1}(x)d\nu| > \frac{\delta}{2}\}.$$

Выберем $r_1 = r_1(\eta)$ таким, чтобы $\mathbf{P}\{\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} \|\Delta_{r_1} x\| \wedge 1 d\nu > \dfrac{\delta}{2}\} < \dfrac{\eta}{3}$. В силу условия (6), существует $n_0 = n_0(\eta)$ такое, что

$$\sup_{n\geq n_0} \mathbf{P}\{|\int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_{r_1}(x) d\nu^n - \int_0^T \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_{r_1}(x) d\nu| > \frac{\delta}{2}\} < \frac{\eta}{3}.$$

Таким образом, $\sup_{n\geq n_0} \mathbf{P}(\beta_{r_1}^n > \delta) < \dfrac{2\eta}{3}$ и достаточно выбрать $r_0 \geq r_1$ таким, чтобы $\sum_{k=1}^{n_0-1} \mathbf{P}(\beta_{r_0}^n > \delta) < \dfrac{\eta}{3}$.

B) В первой части доказательства было показано, что при выполнении указанных условий конечномерные распределения процессов $X^n, n \geq 1$ относительно компактны, поэтому в силу теоремы 3 в [9] и теоремы 1 в [10] (см. доказательство теоремы 2 в [4]) для доказательства второго утверждения теоремы достаточно показать, что для любых $T < \infty$, $\eta > 0$, $\delta > 0$ существуют такие $u > 0$ и $n_0$, что для любых моментов остановки $\tau^n \leq T$ (относительно $\mathcal{F}^n = (\mathcal{F}_t^n)_{t\geq 0}$)

$$\sup_{n\geq n_0} \mathbf{P}\{\sup_{0\leq t\leq u} \left\|X_{\tau^n+t}^n + X_{\tau^n}^n\right\| > \delta\} < \eta. \tag{21}$$

При проверке условия (21) будет использоваться следующая оценка, вытекающая из (8) - (10),

$$\begin{gathered}\sup_{0\leq t\leq u} \left\|X_{\tau^n+t}^n + X_{\tau^n}^n\right\| \leq \sup_{0\leq t\leq T+u} 2\left\|B_t^n - B_t\right\| + \\ + \sup_{0\leq t\leq T}\sup_{0\leq s\leq u} \|B_{t+s} - B_t\| + \sup_{0\leq s\leq u} \left\|M_{\tau^n+s}^{n\varepsilon} - M_{\tau^n}^{n\varepsilon}\right\| + \\ + \int_{\tau^n}^{\tau^n+u} \int_{\|x\|>c} \|x\| d\mu^n + \int_{\tau^n}^{\tau^n+u} \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x)\, d\mu^n + \int_{\tau^n}^{\tau^n+u} \int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x)\, d\nu^n.\end{gathered} \tag{22}$$

Пусть $\gamma_u^n$ обозначает любое из слагаемых в правой части неравенства (22). Тогда для справедливости теоремы достаточно показать , что для любых $T < \infty$, $\eta > 0$, $\delta > 0$ существуют такие $u > 0$ и $n_0$, что

$$\sup_{n\geq n_0} \mathbf{P}(\gamma_u^n > \delta) < \eta. \tag{23}$$

1) $\gamma_u^n = \sup_{0\leq t\leq T+u} \|B_t^n - B_t\|$. Неравенство (23) следует из условия (7).
2) $\gamma_u^n = \sup_{0\leq t\leq T} \sup_{0\leq s\leq u} \|B_{t+s} - B_t\|$. Неравенство (23) имеет место в силу непрерывности функции $(B_t)_{t\geq 0}$.
3) $\gamma_u^n = \sup_{0\leq s\leq u} \left\|M_{\tau^n+s}^{n\varepsilon} - M_{\tau^n}^{n\varepsilon}\right\|$. Следуя схеме, предложенной в [1] для одномерного $\mathbb{H}$, рассмотрим процесс $N^{n\varepsilon} = (N_s^{n\varepsilon}, \mathcal{F}_s^n; \mathbb{H})_{s\leq u}$, определяемый равенством $N_s^{n\varepsilon} = M_{\tau_n+s}^{n\varepsilon} - M_{\tau_n}^{n\varepsilon}$. Это локально квадратично интегрируемый мартингал и (см. [11]) $< N^{n\varepsilon} >_s = < M^{n\varepsilon} >_{\tau_n+s} - < M^{n\varepsilon} >_{\tau_n}$ .

Так как процесс $\|N^{n\varepsilon}\|^2$ доминируется процессом $< N^{n\varepsilon} >$ то, применяя неравенство Ленгляра [8], получаем

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\sup_{0\leq s\leq u} \|N_s^{n\varepsilon}\| > \delta\} < \frac{b}{\delta^2} + \mathbf{P}\{< M^{n\varepsilon} >_{\tau_n+u} - < M^{n\varepsilon} >_{\tau_n} \geq b\} \leq \\ \leq \frac{b}{\delta^2} + \mathbf{P}\{\sup_{t\leq T} |< M^{n\varepsilon} >_{t+u} - < M^{n\varepsilon} >_t| \geq b\}\end{gathered} \tag{24}$$

Заметим, что функции (по $t$) $< M^{n\varepsilon} >, < M >$ неубывающие, а $< M >$ – непрерывна, поэтому в силу леммы 1 в [12] и условия (5)

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n}\mathbf{P}\{\sup_{t\le T+u}| < M^{n\varepsilon} >_t - < M >_t |> a\} = 0,\ a > 0.$$

Отсюда вытекает, что существуют такие $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta), u = u(\eta), n_0 = n_0(\eta)$, что

$$\frac{b}{\delta^2} + \sup_{n\ge n_0}\mathbf{P}\{\sup_{t\le T}| < M^{n\varepsilon_0} >_{t+u} - < M^{n\varepsilon_0} >_t |\ge b\} \le$$

$$\le \frac{b}{\delta^2} + \sup_{n\ge n_0}\mathbf{P}\{\sup_{t\le T+u}| < M^{n\varepsilon_0} >_t - < M^{n\varepsilon_0} >_t |\ge \frac{b}{4}\}+$$

$$+\mathbf{P}\{\sup_{t\le T}| < M >_{t+u} - < M >_t |\ge \frac{b}{2}\} < \eta$$

и, следовательно, в силу неравенства (24), справедливо соотношение (23).
4) $\gamma_u^n = \int_{\tau^n}^{\tau^n+u}\int_{\|x\|>c}\|x\|d\mu^n$. Заметим, что $\gamma_u^n \le \alpha^n = \int_0^{T+u}\int_{\|x\|>c}\|x\|d\mu^n$ и, следовательно, справедливость соотношения (23) для этого случая установлена в первой части доказательства теоремы.
5) $\gamma_u^n = \int_{\tau^n}^{\tau^n+u}\int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x)\, d\mu^n$. Проверка соотношения (23) для этого случая, а также для $\gamma_u^n = \int_{\tau^n}^{\tau^n+u}\int_{\|x\|>\frac{\varepsilon}{2}} g_c(x)\, d\nu^n$ полностью (с заменой $|.|$ на $\|.\|$) повторяет п.12 и п.13 доказательство теоремы 2 в [1]. $\square$

*Следствие* 1. Если $X^n$ – локально квадратично интегрируемые мартингалы, а $X$ – непрерывный гауссовский мартингал, то из теоремы 1 автоматически вытекает справедливость теоремы 2 в [4].

*Замечание* 1. Для конечномерного пространства $\mathbb{H}$ условие (5) следует из условия (4). В частности, для $\mathbb{H} = \mathbb{R}$ условия теоремы 1 будут совпадать с аналогичными результатами работы [1].

## Заключение

Доказанные в данной работе условия относительной компактности семейства мер семимартингалов со значениями в гильбертовом пространстве дают возможность для вывода условий слабой сходимости последовательности гильбертовозначных семимартингалов к произвольному стохастически непрерывному процессу с независимыми приращениями. Это будет являться целью следующей нашей работы.

### Список литературы


[1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. О слабой сходимости семимартингалов к стохастически непрерывным процессам с независимыми и условно независимыми приращениями // Математический сборник. 1981. Т. 116, № 3. С. 331–358.

[2] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986. 512 с.

[3] Прохоров Ю.В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Избранные труды. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. С. 148–232.

[4] Лаврентьев В.В., Назаров Л.В. Условия компактности семейства мер гильбертовозначных мартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 67–73.

[5] Лаврентьев В.В. О структуре гильбертовозначных мартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2010. № 2. С. 13–19.

[6] Лаврентьев В.В. Каноническое представление гильбертовозначных семимартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 1. С. 123–130.

[7] Meyer P.A. Notes sur les integrales stochastiques. I Integrales Hilbertiennes // Lecture Notes in Mathematics. 1977. Vol. 581. Pp. 446–462.

[8] Lenglart E. Relation de domination entre deux pricessus // Annales de l'Institut Henri Poincare. Section B: Probabilites et Statistiques. 1977. Vol. 13, № 2. Pp. 171–179.

[9] Григелионис Б., Микулявичюс Р. О слабой сходимости полумартингалов // Литовский математический сборник. 1981. Т. 21, № 3. С. 9–24.

[10] Aldous D.J. A characterisatian of Hilbert space using the central limit theorem // Journal of the London Mathematical Society. 1976. Vol. 14, № 2. Pp. 376–380.

[11] Metivier M., Pellaumail J. Stochastic integration. New York: Academic Press, 1980. 196 p.

[12] McLeish D.L. An extended martingale invariance principle // Annals of Probability. 1978. Vol. 6, № 1. Pp. 144–150.


### Образец цитирования

Лаврентьев В.В., Бугримов А.Л. Условия компактности семейства мер гильбертовозначных непрерывных семимартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 39–51. https://doi.org/10.26456/vtpmk545

**Сведения об авторах**

1. **Лаврентьев Виктор Владимирович**
научный сотрудник лаборатории статистического анализа факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

*Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.*
*E-mail: Lavrent@cs.msu.ru*

2. **Бугримов Анатолий Львович**
заведующий кафедрой физики Российского государственного университета им. А.Н. Косыгина.

*Россия, 117997, г. Москва, ул. Садовническая, д. 33, стр.1.*
*E-mail: bugrimov-al@rguk.ru*

## COMPACTNESS CONDITIONS FOR A FAMILY OF MEASURES OF HILBERT-VALUED CONTINUOUS SEMI-MARTINGALES

**Lavrentyev Victor Vladimirovich**
Researcher at Laboratory of Statistical Analysis,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics
Lomonosov Moscow State University
*Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, Lomonosov MSU.*
*E-mail:* Lavrent@cs.msu.ru

**Bugrimov Anatoly Lvovich**
Head of the Department of Physics,
Kosygin State University of Russia
*Russia, 111997, Moscow, 33 Sadovnicheskaya str., building 1.*
*E-mail:* bugrimov-al@rguk.ru

*Received 01.08.2019, revised 13.10.2019.*

In this paper, we consider conditions of relative compactness for a family of measures of Hilbert-valued continuous semimartingales. The conditions are formulated for a triplet of local characteristics of a semimartingale, which is uniquely determined from a semimartingale.

**Keywords:** semimartingale, Hilbert space, compactness of measures, stochastically continuous processes.

### Citation

Lavrentyev V.V., Bugrimov A.L., “Compactness conditions for a family of measures of Hilbert-valued continuous semi-martingales”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 4, 39–51 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk545

### References

[1] Liptser R.Sh., Shiryaev A.N., “On weak convergence of semimartingales to stochastically continuous processes with independent and conditionally independent increments”, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **44**:3 (1983), 299–323.

[2] Liptser R.Sh., Shiryaev A.N., *Theory of martingales, Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. V. 49, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989, 792 pp.

[3] Prokhorov Yu.V., “Convergence of Random Processes and Limit Theorems in Probability Theory”, *Theory of Probability and its Applications*. V. 1, Torus Press, Moscow, 1956, 157–214.

[4] Lavrentyev V.V., Nazarov L.V., "Conditions of the compactness for family of measures of Hilbert-valued martingales", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2015, № 2, 67–73 (in Russian).

[5] Lavrentyev V.V., "On the structure of Hilbert-valued martingales", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2010, № 2, 13–19 (in Russian).

[6] Lavrentyev V.V., "Canonical representation of Hilbert-valued semi-martingales", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2011, № 1, 123–130 (in Russian).

[7] Meyer P.A., "Notes sur les integrales stochastiques. I Integrales Hilbertiennes", *Lecture Notes in Mathematics*, **581** (1977), 446–462.

[8] Lenglart E., "Relation de domination entre deux pricessus", *Annales de l'Institut Henri Poincare. Section B: Probabilites et Statistiques*, **13**:2 (1977), 171–179.

[9] Grigelionis B.I., Mikulevicius R., "On the weak convergence of semi-martingales", *Litovskij matematicheskij sbornik*, **21**:3 (1981), 9–24 (in Russian).

[10] Aldous D.J., "A characterisatian of Hilbert space using the central limit theorem", *Journal of the London Mathematical Society*, **14**:2 (1976), 376–380.

[11] Metivier M., Pellaumail J., *Stochastic integration*, Academic Press, New York, 1980, 196 pp.

[12] McLeish D.L., "An extended martingale invariance principle", *Annals of Probability*, **6**:1 (1978), 144–150.