УДК 530.12, 519.2

СПЕКТРАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГРАВИТИРУЮЩЕГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ С ТОПОЛОГИЕЙ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\#\mathbb{R}\mathrm{P}^3$

Никонов В.В., Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В.
Кафедра математических методов современного естествознания

Рассмотрена связанная система уравнений Эйнштейна и динамического уравнения для гравитирующего нейтрального скалярного поля с отрицательным кинетическим членом. Редукция этой системы в сферически-симметричном пространстве-времени с заданной нетривиальной топологией приводит к краевой задаче на собственные значения для системы ОДУ пятого порядка. Получено единственное, с точностью до преобразования зеркальной симметрии, асимптотически плоское частицеподобное решение, сходное по свойствам с холодной темной материей.

The coupled system of the Einstein equations and a dynamic equation for the gravitating neutral scalar field with the negative kinetic term is considered. Reduction of the system in the spherically symmetric spacetime with given nontrivial topology leads to a boundary eigenvalues problem for a fifth order ODE's system. Up to the mirror symmetry the unique asymptotically flat particle-like solution, specifically similar to cold dark matter is obtained.

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна; скалярное поле; топология $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\#\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.
Keywords: Einstein equations; scalar field; topology $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\#\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

Математические модели гравититующих систем полей до недавнего времени рассматривались в основном в связи с принципиальным вопросом о роли гравитации в микромире. Однако открытия наблюдательной космологии последних лет и их анализ [1, 2, 3] в корне изменили ситуацию, явно указывая на наличие во Вселенной гравитирующей материи не барионного типа (холодной темной материи). Сравнение параметров эффективного уравнения состояния с данными наблюдений и ограничения на возможные сечения взаимодействия темной материи с известными частицами показывают, что одной из самых перспективных моделей новой формы материи является нейтральное скалярное поле с эффективным отрицательным давлением. Такое скалярное поле описывается слагаемым с минимальной связью и отрицательным кинетическим членом в лагранжиане взаимодействия [4, 5]. Полное действие можно записать в виде

$$\Sigma = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{4}R+\frac{1}{2}\langle d\phi, d\phi\rangle + V(\phi)\right)\sqrt{|g|}\,d^4x, \qquad (1)$$

где использована геометрическая система единиц ($G = 1, c = 1$), скобки $\langle\, , \rangle$ обозначают скалярное произведение относительно метрики, а $V(\phi)$ - потенциал самодействия нейтрального скалярного поля.

Основной интерес представляют частицеподобные статические сферически-симметричные решения связанной системы уравнений Эйнштейна и динамического уравнения для скалярного поля, возникающей при варьировании действия (1). Такие решения с необходимостью должны иметь нетривиальную топологию пространственноподобного сечения, ортогонального к времениподобному полю Киллинга ∂_t, поскольку в противном случае они содержат голую сингулярность [6]. Единственный известный класс решений [4, 5, 6, 7] содержит топологическую ручку (wormhole), связывающую две асимптотически плоские области пространства-времени с топологией $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^3$. Интерпретация топологической ручки как частицы вызывает серьезные трудности вследствие невозможности погружения решения в $\mathbb{R}^4$ и необходимости изначального предположения о многосвязности пространственно-временного многообразия.

В данной работе мы рассматриваем решения с топологией $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ и физически разумными предположениями об асимптотике решений. Запишем метрику пространства-времени в виде

$$g = A^2 dt \otimes dt - B^2 dr \otimes dr - C^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta \, d\varphi \otimes d\varphi), \tag{2}$$

оставляя свободу в выборе калибровочного условия, а компоненты тензоров будем относить к ортонормированному базису

$$e_0 = \frac{1}{A}\partial_t, \quad e_1 = \frac{1}{B}\partial_r, \quad e_2 = \frac{1}{C}\partial_\theta, \quad e_3 = \frac{1}{C\sin\theta}\partial_\varphi. \tag{3}$$

При записи и анализе уравнений Эйнштейна будем следовать методу, развитому в работах [8, 9] для исследования системы уравнений Эйнштейна-Янга-Миллса. В статическом случае метрические функции A, B, C и поле ϕ зависят только от переменной r. Тензор энергии-импульса

$$T = \frac{1}{4\pi}\left[-d\phi \otimes d\phi + g\left(\frac{1}{2}\langle d\phi, d\phi\rangle + V\right)\right]$$

диагонален, а систему независимых уравнений Эйнштейна и уравнения для скалярного поля можно записать в виде

$$-2\frac{C_{(1)(1)}}{C} - \frac{C_{(1)}^2 - 1}{C^2} = -\phi_{(1)}^2 + 2V, \tag{4}$$

$$2\frac{A_{(1)}C_{(1)}}{AC} + \frac{C_{(1)}^2 - 1}{C^2} = -\phi_{(1)}^2 - 2V, \tag{5}$$

$$\phi_{(1)(1)} + \frac{(AC^2)_{(1)}}{AC^2}\phi_{(1)} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \tag{6}$$

где, как обычно, индекс в круглых скобках означает производную по направлению соответствующего базисного поля (3), например, $\phi_{(1)} \equiv e_1(\phi) = (1/B)\partial_r\phi$. Два других нетривиальных уравнения Эйнштейна совпадают и являются следствием уравнений (4) – (6) в силу тождества Бианки и консервативности тензора энергии-импульса.

Естественным предположением об инвариантности лагранжиана относительно преобразования $\phi \mapsto -\phi$ и короткодействующем типе взаимодействия накладывают существенные ограничения на вид потенциала $V(\phi)$. Требование аналитичности решения на бесконечности эквивалентно существованию степенной асимптотики, причем функции $\phi_{(1)}$ и V должны быть порядка $O(r^{-6})$ при $r \to \infty$. Непосредственный анализ асимптотики с помощью рядов по степеням $1/r$ показывает, что наиболее простой потенциал, удовлетворяющий указанным требованиям, имеет вид полинома шестой степени:

$$V = \frac{1}{6\mu^2}\left(\phi^2 - p^2\right)^3 . \tag{7}$$

Вакуумное состояние с необходимостью является нетривиальным ($p \neq 0$), а дополнительные члены выше шестой степени по ϕ, которые можно включить в потенциал, носят чисто пертурбативный характер и на качественное поведение решения не влияют. Далее, до обсуждения результатов, мы также полагаем $\mu = 1$, поскольку уравнения (4) – (6) масштабно инвариантны относительно преобразования

$$\widetilde{V} = V\mu^2, \quad \widetilde{C} = C/\mu, \quad \widetilde{r} = r/\mu .$$

Явное задание топологии пространственно-временного многообразия M является необходимым элементом постановки задач в общей теории относительности, обеспечивающим единственность решения. В нашем случае пространственно-подобное сечение с топологией $\mathbb{R}^3 \# \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ удобно рассматривать как факторпространство $\mathbb{R}^3 \setminus B^3/\!\sim$, где отношение эквивалентности определяется естественным действием группы $\mathbb{Z}_2$ на границе. Другими словами, мы удаляем из $\mathbb{R}^3$ открытый шар и отождествляем противоположные точки граничной сферы. Из данного построения и теорем о классификации сферических пространственных форм [10] следует, что такая топология является единственной, допускающей сферически-симметричные и, одновременно, частицеподобные решения уравнений Эйнштейна.

Нетривиальность топологии многообразия M дает возможность рассматривать поле ϕ как сечение одномерного вещественного векторного расслоения $\Phi = (M, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_2)$ со структурной группой $\mathbb{Z}_2$, к которой редуцируется любое такое расслоение. Обычно скалярное поле рассматривают как сечение тривиального расслоения $M \times \mathbb{R}$, то есть как функцию на M, поскольку любое векторное расслоение над $M \approx \mathbb{R}^4$ тривиально. Однако в этом случае не существует решений, удовлетворяющих указанным выше требованиям.

Выбирая на M естественный атлас из шести карт со сферическими координатами, в которых угловые координаты ограничены на шесть стандартных полусфер граничной сферы нефакторизованного многообразия $\mathbb{R}^3 \setminus B^3$, можно построить локальную тривиализацию расслоения Φ, согласованную с данным атласом. Нерв покрытия M и набор функций перехода в расслоении Φ изображаются одним и тем же графом (Рис. 1) в котором элементы $+1$ и -1 группы $\mathbb{Z}_2$ сопоставляются сплошным и штриховым ребрам соответственно.

Каждая пара вершин графа связана ребром. Они определяют знаки в функциях перехода $\phi^{(2)} = \pm\phi^{(1)}$, $r^{(2)} = \pm r^{(1)}$, а также знак якобиана отображения $\left(\theta^{(1)}, \varphi^{(1)}\right) \to \left(\theta^{(2)}, \varphi^{(2)}\right)$ на пересечении любой пары карт.

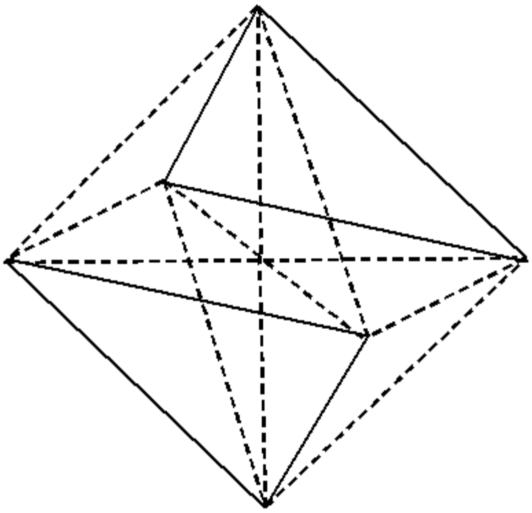

Рис. 5: Нерв покрытия многообразия M и набор функций перехода расслоения Φ.

Не теряя общности, можно выбрать координату r равной нулю для каждой пары отождествленных точек граничной сферы, то есть во всех точках подмногообразия $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \subset M$. Наложим калибровочное условие $B = 1/A$ на метрику (2), гарантирующее шварцшильдову асимптотику на бесконечности и допускающее существование глобального решения в отсутствие горизонта событий. Обозначая штрихом производные по координате r, мы можем записать вытекающие из требований гладкости и невырожденности метрики граничные условия для трех неизвестных функций B, C и ϕ:

$$B^{'}_{(r=0)} = 0, \quad C^{'}_{(r=0)} = 0, \quad \phi_{(r=0)} = 0. \tag{8}$$

Отметим, что при $V(\phi) = 0$ легко получить однопараметрическое семейство точных решений системы (4) – (6), удовлетворяющих условиям (8) и совместимых с заданной топологией многообразия M:

$$A = B = 1, \quad C = \sqrt{r^2 + \alpha^2}, \quad \phi = arctg\frac{r}{\alpha}.$$

Однако очевидно, что эти решения не удовлетворяют сформулированным выше асимптотическим условиям.

Для потенциала в форме (7) система уравнений (4) – (6), записанная относительно независимой переменной r с учетом калибровочного условия $B = 1/A$, примет вид

$$C^{''} - \phi^{'2} C = 0, \tag{9}$$

$$C^{'}\frac{b^{'}}{b} - \phi^{'2} C - \frac{C^{'2}}{C} + \frac{b}{C} - \frac{1}{3} b\, C \left(\phi^2 - p^2\right)^3 = 0, \tag{10}$$

$$\phi^{''} + \left(2\frac{C^{'}}{C} - \frac{b^{'}}{b}\right)\phi^{'} + b\,\phi\left(\phi^2 - p^2\right)^2 = 0, \tag{11}$$

где введено обозначение $b = B^2$, а уравнение (9) представляет сумму уравнений (4) и (6). Таким образом мы имеем краевую задачу на полупрямой для системы пятого порядка (9)-(11) с двумя особыми точками $r = 0, \infty$.

Мы начинаем численное решение задачи с представления неизвестных функций рядами в особых точках. Первым шагом является подстановка рядов с неопределенными коэффициентами вместо C, b и ϕ в уравнения (9)-(11) и последовательное решение (рекуррентных по порядку разложения) систем уравнений относительно коэффициентов рядов. Оказывается, что коэффициенты рядов зависят от пяти произвольных параметров a, p, r_0, s, $\phi_0^{'}$, а разложения в особой точке $r = 0$ имеют вид

$$C = s + \frac{1}{2}s\phi_0^{'\,2}r^2 - \frac{1}{24}\frac{7s^3p^6 + 6s^3p^4 + 9s}{s^2p^6 + 3}\phi_0^{'\,4}r^4 + \dots\ ,$$

$$b = \frac{3s^2\phi_0^{'\,2}}{s^2p^6 + 3} - \frac{3s^4p^6}{s^2p^6 + 3^2}\phi_0^{'\,4}r^2 + \dots\ ,$$

$$\phi = \phi_0^{'}r - \frac{1}{6}\frac{4s^2p^6 + 3s^2p^4 + 6}{s^2p^6 + 3}\phi_0^{'\,3}r^3 + \dots\ . \tag{12}$$

Аналогично, в бесконечной точке

$$C = r + r_0 + \frac{1}{12p^6r^3} + \dots\ ,$$

$$b = 1 + \frac{a}{r} + \frac{a\,(a - r_0)}{r^2} + \frac{a\,(a - r_0)^2}{r^3} + \dots\ ,$$

$$\phi = p - \frac{1}{2p^3r^2} - \frac{a - r_0}{p^3r^3} + \dots\ . \tag{13}$$

В пакете MAPLE эти разложения получены до порядков r^{20} и r^{-20} соответственно с целью, во-первых, проверки сходимости рядов в различных областях значений параметров и, во-вторых, для достижения необходимой точности граничных условий при численном решении уравнений.

После приведения системы (9)-(11) к нормальной форме и перехода к конечному отрезку $[r_1, r_2]$, $r_1 > 0$, мы получим спектральную краевую задачу для системы ОДУ пятого порядка. Для решения задачи применен метод стрельбы из граничных точек с последующей сшивкой решений в промежуточной точке посредством минимизации целевой функции в промежуточной точке до значения реальной точности $\left(10^{-15}\right)$ численного решения уравнений. Этот метод позволяет явно учесть спектральный характер задачи, особенно в случаях, когда спектр предполагается дискретным: при отсутствии дополнительной симметрии для сшивки пяти неизвестных функций C, $C^{'}$, b, ϕ, $\phi^{'}$ необходимо иметь как минимум пять свободных параметров для варьирования условий в граничных точках.

Если $\phi \to p > 0$ при $r \to \infty$, то условия минимума $\phi^{'} = 0$, $\phi^{''} = 0$, могут быть выполнены, как это следует из (11) и (13), только при $\phi < 0$. Аналогичные рассуждения справедливы для точки $r = 0$. Численный анализ разложений (12), (13), их производных $\phi^{'}$ и $\phi^{''}$, а также их аналитических переразложений в промежуточных точках, показывает, что это невозможно. Существует единственное, с точностью до одновременного изменения знака у ϕ, $\phi_0^{'}$ и p, решение, соответствующее значениям параметров

$$a = 0.983, \quad p = 0.898, \quad r_0 = 1.475, \quad s = 1.941, \quad \phi_0^{'} = 0.924\ . \tag{14}$$

Результаты численных расчетов показаны на Рис. 2.

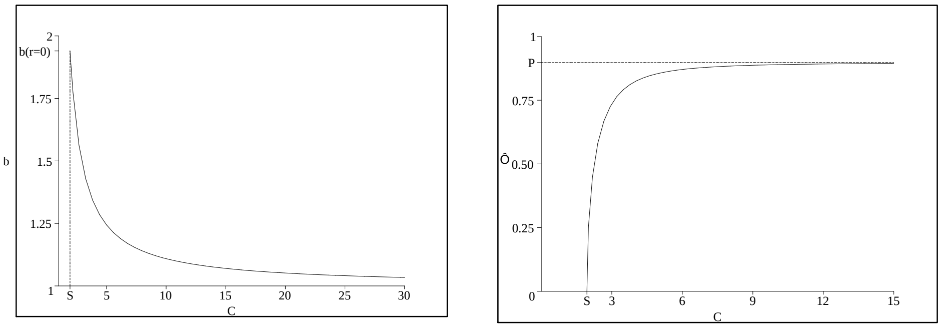

Рис. 6: Графики функций $b(C)$ и $\phi(C)$.

Для таких гравитирующих полей как калибровочные поля или хиггсовские бозоны, моделирующих основные эффекты в Стандартной Модели, характерно существование бесконечного спектра [11]. Отсутствие колебательных мод в нашем случае оправдывает предположение о чисто гравитационном, почти упругом и, следовательно, сверхслабом взаимодействии построенной квазичастицы с другими частицами. Для оценки значений массы и размеров квазичастицы в обычной системе единиц, необходимо умножить ϕ и p на $\chi^{-1/2}$, а C, a, s, r_0 — на $\chi\mu$, где $\chi = G/c^4 \simeq 10^{-49}$ см/эрг ($\sim 10^{-54}$ см/Мэв), μ — коэффициент самодействия в потенциале (8), который является, как указано выше, свободным параметром вследствие масштабной инвариантности уравнений. Поскольку калибровочное условие для метрики согласовано с шваршильдовской асимптотикой, то $a = 2mG/c^2$, где m — гравитационная масса квазичастицы. Полученное в (14) значение $a \sim 1$ (в обычных единицах $a \sim \chi\mu$) дает $\mu \sim mc^2$, а размер квазичастицы $C_{min} = s \sim \chi\mu$.

Обсуждение космологических следствий выходит за рамки данной работы, однако представляет интерес сравнение квазичастицы с инфлатоном — квантом вещественного скалярного поля, которое феноменологически вводится в одной из наиболее привлекательных моделей инфляции в ранней Вселенной [12]. Предполагаемая масса инфлатона равна планковской массе, $m_pc^2 \sim 10^{22}$Мэв, поэтому для $m = m_p$ мы имеем $s \sim 10^{-32}$см. Таким образом, размер «топологической сердцевины» квазичастицы оказывается порядка планковской длины. Это весьма существенное обстоятельство косвенно указывает на внутреннюю согласованность модели.

Заключение. Реалистичность построенной модели квазичастицы гравитирующего вещественного скалярного поля может быть установлена только в рамках космологической теории в целом. Однако один из основных результатов работы не зависит от меняющихся представлений современных космологических моделей о содержании и свойствах экзотической материи во Вселенной и состоит в демонстрации существования частицеподобных решений с нетривиальной топологией. В принципе аналогичную задачу можно рассматривать для гравитирующих полей любого типа, в том числе и спинорных, поскольку два первых класса Штифеля-Уитни пространственно-временного многообразия M равны нулю (это легко проверяется) и оно допускает спинорную структуру. Еще раз подчеркнем принципиальное отличие квазичастицы от решений типа топологических ручек (см., например, [13] и цитируемые там работы), ассоциируемых с «пенообразной структурой» пространства-времени и другими гипотезами, лежащими вне рамок математической физики. Очень важно также, что рассмотренная топология многообразия M допускает существование нетривиальных векторных расслоений над M, поскольку среди известных решений только монополи обладают такими свойствами, но они содержат сингулярность в центре. Это дает основания считать, что использованный метод обладает определенной перспективой для изучения как иных топологических решений, с отказом от сферически-симметричной геометрии, так и гравитирующих полей других типов.

Список литературы

[1] Hinshow G. *et al.* First year WMAP observation: the angular power spectrum// Astrophys. J. Suppl. 2003. V. 148. P. 135 – 152.

[2] Bento M.C., Bertolami O., Sen A.A. The revival of the unified dark energy – dark matter model//Phys. Rev. 2004. D70, 083519.

[3] Terner M. Dark matter and dark energy: the critical questions//2002, arXiv:astro-ph/0207297.

[4] Bilic N., Tupper G.B., Viollier R.D. Unificatin of dark matter and dark energy: the inhomogeneous Chaplygin gas// Phys. Lett. 2002, B535. P. 17 – 23.

[5] Sushov S. Wormholes supported by a phantom energy// Phys. Rev. 2005. D70, 043520.

[6] Visser M.Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking. AIP Press, NY, 1995.

[7] Barcelo C., Visser M. Scalar fields, energy conditions and transversable wormholes// Class.Quant.Grav. 2000, B466. P. 3843 – 3861.

[8] Tsirulev A.N. Gravitational fields with Yang-Mills curvature// Proc. 15th Int. Conf. "High Energy Physics and Quantum Field Theory Moscow, 2001. P.382-384.

[9] Tsirulev A.N. Curvature decomposition and the Einstein-Yang-Mills eguations// Part.Nucl.JINR. 2004. V. 1. N12(119). P. 99 – 102.

[10] Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М.:Мир, 1989.

[11] Volkov M.S., Galt'tsov D.V. Gravitating non-Abelian solutions and black holes with Yang-Mills fields//Phys.Rep. 1999. V.319, P.1-83.

[12] Liddle A.R., Lyth D.H. Cosmological inflation and large-scale structure. Camb.Univ.Press, 2000.

[13] Dowker F., Surya S. Topology change and causal continuity//Phys. Rev. 1998. D58, 124019.