УДК 519.2

УСЛОВИЕ РАВНОМЕРНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МАРТИНГАЛОВ

Казанчян Д.Х., Круглов В.М.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 08.08.2020, после переработки 12.10.2020.

В статье доказано новое достаточное условие для равномерной интегрируемости экспоненциальных локальных мартингалов. Условие сформулировано в терминах квадратической вариации локального мартингала. Оно обобщает ряд известных достаточных условий подобного рода.

Ключевые слова: равномерная интегрируемость, экспоненциальные процессы, мартингалы, марковские моменты.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 3. С. 5–13.
https://doi.org/10.26456/vtpmk596

1. Введение

На протяжении всей статьи используется традиционная терминология, принятая в теории мартингалов, см., например, учебник [2]. Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ и фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$, удовлетворяющие обычным условиям. Пусть непрерывный локальный мартингал $M = \{M_t, t \geq 0\}, M_0 = 0$, относительно фильтрации $\mathbb{F}$ определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Известно (см. [2], глава 4), что существует непрерывный возрастающий процесс $[M] = \{[M]_t, t \geq 0\}, [M]_0 = 0$, согласованный с фильтрацией, $\mathbb{F}$ такой, что разность $M^2 - [M] = \{M_t^2 - [M]_t, t \geq 0\}$ является локальным мартингалом. Случайный процесс $[M]$ называется квадратической вариацией локального мартингала M. Известно, что для любого вещественного числа α случайный процесс $\alpha M = \{\alpha M_t, t \geq 0\}$ снова является локальным мартингалом, и случайные процессы $[\alpha M]$ и $\alpha^2[M]$ являются неотличимыми. Последнее обозначает, что существует множество $\Omega' \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{\Omega'\} = 1$, такое, что $[\alpha M]_t(\omega) = \alpha^2[M]_t(\omega)$ для всех $t \geq 0$ и для всех $\omega \in \Omega'$. Для любого марковского момента τ относительно фильтрации $\mathbb{F}$ можно определить новый случайный процесс $M^\tau = \{M_{t\wedge\tau}, t \geq 0\}$, называемый остановленным процессом в марковский момент τ. Здесь и далее используется обозначение $a \wedge b = \min\{a, b\}$ для любых вещественных чисел a и b. Если M является непрерывным локальным мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$, то M^τ также является непрерывным локальным мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Нетрудно доказать, что для любого марковского момента τ случайные процессы $[M^\tau]$ и $[M]^\tau$ неотличимы.

Понятие локального мартингала зависит от вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и фильтрации $\mathbb{F}$. Они считаются фиксированными. Также предполагается, что все рассматриваемые далее случайные процессы согласованы с фильтрацией $\mathbb{F}$ и все марковские моменты определены относительно этой фильтрации. По этой причине мы не будем всякий раз напоминать о вероятностном пространстве и фильтрации.

В книге [2] (см. стр. 120) можно найти доказательство, что для любого непрерывного локального мартингала $M, M_0 = 0$, и для любого вещественного числа α экспоненциальный процесс $e^{\alpha M - \alpha^2[M]/2}$ также является непрерывным локальным мартингалом. Можно доказать (см., например, [8], стр. 101), что положительный локальный мартингал является супермартингалом. Поэтому выполняется следующие неравенства

$$\mathbb{E}e^{\alpha M_t - \alpha^2[M]_t/2} \le \mathbb{E}e^{\alpha M_0 - \alpha^2[M]_0/2} = 1 \text{ для всех } t \ge 0. \tag{1}$$

Известная важная проблема (см., например, книгу [4]) состоит в отыскании условий для равномерной интегрируемости экспоненциального случайного процесса $e^{M-[M]/2}$. Ряд условий равномерной интегрируемости таких случайных процессов можно найти в [1], [3], [4], [6], [7], [9], [9], [10].

Напомним, что дан непрерывный локальный мартингал $M = \{M_t, t \ge 0\}$ такой, что $M_0 = 0, \lim_{t\to\infty} M_t = M_\infty$, $|M_\infty| < \infty$ п.в., $[M]_\infty < \infty$ п.в. Известно, что равномерная интегрируемость экспоненциального процесса $e^{M_t - [M]_t/2}$ равносильна равенству $\mathbb{E}e^{M_\infty - [M]_\infty/2} = 1$. Простое доказательство этого утверждения можно найти в статье [5].

Только, что было установлено, что для любого вещественного числа α экспоненциальный процесс $e^{\alpha M - \alpha^2[M]/2} = \{e^{\alpha M_t - \alpha^2[M]_t/2}, t \ge 0\}$ является равномерно интегрируемым, если и только, если

$$\mathbb{E}e^{\alpha M_\infty - \alpha^2[M]_\infty/2} = 1. \tag{2}$$

В частности, это равенство выполняется для $\alpha = 1$, если выполняются условия:

$[M]_\infty \le \text{const.}$	Гирсанов (1960),
$\mathbb{E}e^{[M]_\infty/2} < \infty$	Новиков (1972),
$\sup\limits_{t\ge0} \mathbb{E}e^{M_t/2} < \infty$	Kazamaki (1977),
$\mathbb{E}e^{[M]_\infty/2 - c\sqrt{[M]_\infty}} < \infty, 0 < c$ - число	Новиков (1979),
$\liminf\limits_{\varepsilon\downarrow0} \left(\mathbb{E}e^{(1-\varepsilon)[M]_\infty/2}\right)^\varepsilon < \infty$	Крылов (1995),
$\liminf\limits_{\varepsilon\downarrow0} \left(\sup\limits_{t\ge0} \mathbb{E}e^{(1-\varepsilon)M_t/2}\right)^\varepsilon < \infty$	Крылов (1995).

Специалистам известно, что условие Kazamaki строго слабее условия Новикова(1972). Условие Крылова $\liminf_{\varepsilon\downarrow0} \left(\sup_{t\ge0} \mathbb{E}e^{(1-\varepsilon)M_t/2}\right)^\varepsilon < \infty$ строго слабее условия Kazamaki. Очевидно, что условие Новикова (1979) строго слабее условия Новикова (1972).

В этой статье мы усиливаем утверждение Новикова (1979).

Теорема 1. *Равенство (2) выполнятся для* $0 < \alpha \leq 1$, *если*

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\mathbb{E} e^{[M]_\infty/2 - c\sqrt{(1+\varepsilon)[M]_\infty}} \right)^{\varepsilon} < \infty \tag{3}$$

для некоторого числа $c > 0$.

С помощью примера будет показано, что условие (3) строго слабее условия Новикова (1979).

2. Доказательство

Нам потребуется утверждение Новикова (1972). Оригинальное доказательство довольно трудное. Простое доказательство утверждения Новикова (1972) можно найти в статье [5]. Сначала будет доказано равенство (2) для $0 < \alpha < 1$ при условии (3). Из условия (3) следует, что существуют положительные числа $0 < \varepsilon_m < 1, m = 1, 2 \ldots$, такие, что $\varepsilon_m \downarrow 0$ при $m \uparrow \infty$ и

$$\mathbb{E} e^{[M]_\infty - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\infty}} < \infty, \lim_{m \to \infty} \left(\mathbb{E} e^{[M]_\infty - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\infty}} \right)^{\varepsilon_m} = d < \infty.$$

Для данного числа ε_m найдется число $\lambda = \lambda(\alpha, \varepsilon_m, c) > 0$ такое, что на множестве $\{[M]_\infty > \lambda\}$. будет выполняться неравенство $\alpha^2 [M]_\infty \leq [M]_\infty - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\infty}$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{E} e^{\alpha^2 [M]_\infty} \leq \mathbb{E}\Big(e^{\alpha^2 [M]_\infty} \mathbb{I}_{\{[M]_\infty \leq \lambda\}} \Big) + \mathbb{E}\Big(e^{[M]_\infty - c\sqrt{(1+\varepsilon)[M]_\infty}} \mathbb{I}_{\{[M]_\infty > \lambda\}} < \infty.$$

Можно применить утверждение Новикова (1972) к локальному мартингалу $\alpha M = \{\alpha M_t, t \geq 0\}$ с квадратичной вариацией $[\alpha M] = \{\alpha^2 [M]_t, t \geq 0\}$. Тем самым неравенство (2) доказано для $0 < \alpha < 1$.

Снова предположим, что $0 < \alpha < 1$. Для фиксированного ε_m мы определим марковский момент

$$\tau = \tau(\varepsilon_m, c) = \inf\{t \geq 0 : M_t \leq [M]_t - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_t} - \varepsilon_m^{-2}\}, \text{ где } \inf\{\emptyset\} = \infty.$$

Так как экспоненциальный локальный мартингал $e^{\alpha_m M - \alpha_m^2 [M]/2}$ равномерно интегрируем, то выполняется равенство

$$\mathbb{E} e^{\alpha_m M_\tau - \alpha_m^2 [M]_\tau / 2} = 1. \tag{4}$$

В силу того, что случайные процессы M и $[M]$ непрерывны, выполняется равенство

$$M_\tau = [M]_\tau - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\tau} - \varepsilon_m^{-2} \text{ на множестве } \{\tau < \infty\}. \tag{5}$$

Из определения марковского момента τ следует, что

$$M_t > [M]_t - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_t} - \varepsilon_m^{-2} \text{ на множестве } \{\tau = \infty\} \text{ для всех } t \geq 0.$$

Полагая здесь $t \to \infty$, мы получим неравенство

$$M_\infty \geq [M]_\infty - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\infty} - \varepsilon_m^{-2} \text{ п.в. на множестве } \{\tau = \infty\}.$$

Это неравенство вместе предыдущим равенством приводят к следующему неравенству

$$M_\tau \geq [M]_\tau - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\tau} - \varepsilon_m^{-2} \text{ п.в.}$$

С помощью этого неравенства мы получим для всех $0 < \alpha < 1$, что

$$\begin{aligned}
e^{\alpha M_\tau - \alpha^2 [M]_\tau/2} &= e^{M_\tau - [M]_\tau/2} e^{(\alpha-1)M_\tau + (1-\alpha^2)[M]_\tau/2} \\
&\leq e^{M_\tau - [M]_\tau/2} e^{-(1-\alpha)^2[M]_\tau/2 + c(1-\alpha)\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\tau} + \varepsilon_m^{-2}} \\
&= e^{M_\tau - [M]_\tau/2} e^{-((1-\alpha)\sqrt{[M]_\tau} - c\sqrt{1+\varepsilon_m})^2/2 + c^2(1+\varepsilon_m)/2 + \varepsilon_m^{-2}} \\
&\leq e^{M_\tau - [M]_\tau/2} e^{c^2(1+\varepsilon_m)/2 + \varepsilon_m^{-2}}.
\end{aligned}$$

Последняя в этой цепочке случайная величина интегрируема, так как $\mathbb{E}e^{M_\tau - [M]_\tau/2} \leq 1$, как будет показано ниже. По теореме об ограниченной сходимости мы получим, что

$$\lim_{\alpha \uparrow 1} \mathbb{E}\Big| e^{\alpha M_\tau - \alpha^2 [M]_\tau/2} - e^{M_\tau - [M]_\tau/2} \Big| = 0.$$

Отсюда, в свою очередь, следует

$$1 = \lim_{\alpha \uparrow 1} \mathbb{E}e^{\alpha M_\tau - \alpha^2 [M]_\tau/2} = \mathbb{E}e^{M_\tau - [M]_\tau/2}.$$

Принимая во внимание (5), мы получим

$$\begin{gathered}
1 = \mathbb{E}e^{M_\tau - [M]_\tau/2} = \mathbb{E}\Big(e^{M_\tau - [M]_\tau/2}(\mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}} + \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}})\Big) \leq \\
\leq \mathbb{E}e^{M_\infty - [M]_\infty/2} + \mathbb{E}\Big(e^{M_\tau - [M]_\tau/2}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\Big), \\
\mathbb{E}\Big(e^{M_\tau - [M]_\tau/2}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\Big) \leq \Big(\mathbb{E}(e^{M_\tau - [M]_\tau/2}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\Big)^{\varepsilon_m} = \\
= \Big(\mathbb{E}(e^{[M]_\tau/2 - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\tau} - \varepsilon_m^{-2}}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\Big)^{\varepsilon_m}.
\end{gathered}$$

Последняя величина стремится к нулю при $m \to \infty$ по условию (3) и, следовательно, $\mathbb{E}e^{M_\infty - [M]_\infty/2} = 1$. Действительно, функция $x/2 - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)x}, x \geq c^2(1+\varepsilon_m)$, возрастает и, следовательно,

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathbb{E}(e^{[M]_\tau/2 - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\tau} - \varepsilon_m^{-2}}\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\Big)^{\varepsilon_m} = \\
&= \Big(\mathbb{E}e^{[M]_\tau/2 - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\tau} - \varepsilon_m^{-2}}(\mathbb{1}_{\{[M]_\tau < c^2(1+\varepsilon_m)\}} + \mathbb{1}_{\{M]_\tau \geq c^2(1+\varepsilon_m)\}})\Big)^{\varepsilon_m} \leq \\
&\leq \Big(\mathbb{E}e^{c^2(1+\varepsilon_m) - \varepsilon_m^{-2}}\mathbb{1}_{\{[M]_\tau < c^2(1+\varepsilon_m)\}} + \mathbb{E}e^{[M]_\tau/2 - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\tau} - \varepsilon_m^{-2}}\mathbb{1}_{\{[M]_\tau \geq c^2(1+\varepsilon_m\}}\Big)^{\varepsilon_m} \\
&\leq \Big(e^{c^2(1+\varepsilon_m) - \varepsilon_m^{-2}} + \mathbb{E}e^{[M]_\infty/2 - c\sqrt{(1+\varepsilon_m)[M]_\infty} - \varepsilon_m^{-2}}\Big)^{\varepsilon_m} \to 0 \text{ при } m \to \infty.
\end{aligned}$$

Нам осталось доказать неравенство $\mathbb{E}e^{M_\tau - [M]_\tau/2} \leq 1$. Выше отмечалось, что случайный процесс $M^\tau = \{M_{\tau\wedge t}, t \geq 0\}$ является непрерывным локальным мартингалом. В силу (1) выполняется неравенство $\mathbb{E}e^{M_{\tau\wedge t} - [M]_{\tau\wedge t}/2} \leq 1$ для всех $t \geq 0$.

Применив лемму Фату, мы получим требуемое неравенство $\mathbb{E}e^{M_\tau - [M]_\tau/2} \le 1$. Теорема доказана.

Теперь мы построим пример непрерывного локального мартингала, для которого выполнено условие (3), но условие Новикова (1979) не выполняется.

Пример 1. Предположим, что непрерывный процесс броуновского движения $B = \{B_t, t \ge 0\}$ и случайная величина τ с плотностью вероятностей $p(x) = be^{-x/2+c\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и независимы; здесь $c > 0$ - число и $1/b = \int_0^\infty e^{-x/2+c\sqrt{x}}dx$. Нетрудно доказать, что случайный процесс $M = \{M_t, t \ge 0\}, M_t = B_{t\wedge\tau}$, является мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{G} = \{G_t, t \ge 0\}, G_t = \sigma(\tau, B_s, 0 \le s \le t)$. Определим новую фильтрацию $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ по правилу $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{N})$, где $\mathcal{N}$ обозначает класс событий $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{A\} = 0$. Легко видеть, что так построенная фильтрация $\mathbb{F}$ удовлетворяет обычным условиям. Очевидно, что случайный процесс $M = \{M_t, t \ge 0\}, M_t = B_{t\wedge\tau}$, является непрерывным локальным мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$.

Убедимся, что $[M]_t = t \wedge \tau$. Разобьем сегмент $[0, t], t > 0$, точками $t_{n,k} = k2^{-n}t, k = 0, \ldots, 2^n$. Простые вычисления показывают, что

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{2^n} |B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}|^2 - t\Big|^2 = \mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{2^n} (|B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}|^2 - (t_{n,k} - t_{n,k-1}))\Big|^2 = \frac{t^2}{2^{n-1}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\Big|\sum_{k=1}^{2^n} |B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}|^2 - t\Big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^2}{2^{n-1}} = 2t^2.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n} |B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}|^2 = t \text{ п.в.}$$

По определению квадратической вариации $[B^\tau] = \{[B^\tau]_t, t \ge 0\}$ (см. [2], стр. 76) мы получим

$$[B^\tau]_t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n} |B_{t_{n,k}\wedge\tau} - B_{t_{n,k-1}\wedge\tau}|^2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n} |B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}|^2 = t \text{ п.в. на множестве } \{t \le \tau\}.$$

$$[B^\tau]_t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n} |B_{t_{n,k}\wedge\tau} - B_{t_{n,k-1}\wedge\tau}|^2 =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k: t_{n,k}\le\tau} |B_{t_{n,k}} - B_{t_{n,k-1}}|^2 = \tau \text{ п.в. на множестве } \{\tau < t\}.$$

Таким образом доказано требуемое равенство $[B^\tau]_t = t \wedge \tau$ п.п. для всех $t \ge 0$.

Локальный мартингал $M = B^\tau$ не удовлетворяет условию Новикова (1979), так как $[M]_\infty = \tau$ и $\mathbb{E}e^{\tau/2 - c\sqrt{\tau}} = \infty$. С другой стороны, оно удовлетворяет условию (3).

Действительно,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\mathbb{E}e^{\tau/2-c\sqrt{(1+\varepsilon)\tau}}\right)^{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(b\int_0^{\infty}e^{-c(\sqrt{(1+\varepsilon}-1)\sqrt{x}}dx\right)^{\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{2b(\sqrt{1+\varepsilon}+1)^2}{c^2\varepsilon}\right)^{\varepsilon}=1.$$

Заключение

В статье доказано новое достаточное условие для равномерной интегрируемости непрерывных экспоненциальных локальных мартингалов. Показано, что предложенное достаточное условие строго слабее ряда известных достаточных условий для равномерной интегрируемости экспоненциальных локальных мартингалов.

Список литературы

[1] Cherny A., Shiryaev A. On criteria for the uniform integrability of Brownian stochastic exponentials // Optimal Control and Partial Differential Equations. Eds. by J.L. Menaldi et al.. Iso Press, 2001. Pp. 1–13.

[2] Chung K.L., Williams R.J. Introduction to stochastic Integration. Second Edition. Boston: Birkhauser, 1990.

[3] Гирсанов И.В. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры // Теория вероятностей и ее применения. 1960. Т. 5, № 3. С. 314–330.

[4] Kazamaki N. Continuous Exponential Martingales and BMO / eds. by A. Dold, B. Eckmann, F. Takens. Series: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1579. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1994. 91 p.

[5] Kazanchyan D.C., Kruglov V.M. Uniform integrability of exponential processes // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, № 10. Pp. 1498–1506. https://doi.org/10.1134/S1995080219100159

[6] Клебанера Ф.К., Липцер Р.Ш. Когда стохастическая экспонента является мартингалом. Развитие метода Бенеша // Теория вероятностей и ее применения. 2013. Т. 58, № 1. С. 53–81.

[7] Krylov N.V. Introduction to the theory of diffusion processes. Providence: American Mathematical Society, 1995.

[8] Medvegyev P. Stochastic Integration Theory. Oxford: Oxford University Press, 2007. 607 p.

[9] Новиков А.А. Об одном тождестве для стохастических интегралов // Теория вероятностей и ее применения. 1972. Т. 17, № 4. С. 761–765.

[10] Новиков А.А. Об условиях равномерной интегрируемости непрерывных неотрицательных мартингалов // Теория вероятностей и ее применения. 1979. Т. 24, № 4. С. 821–825.

Образец цитирования

Казанчян Д.Х., Круглов В.М. Условие равномерной интегрируемости экспоненциальных мартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 3. С. 5–13. https://doi.org/10.26456/vtpmk596

Сведения об авторах

1. **Казанчян Драстамат Хачатурович**
аспирант кафедры математической статистики факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ.
E-mail: drastamat94@gmail.com

2. **Круглов Виктор Макарович**
профессор кафедры математической статистики факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ.

A NEW SUFFICIENT CONDITION FOR UNIFORM INTEGRABILITY OF EXPONENTIAL LOCAL MARTINGALES

Kazanchyan Drastamat Chachaturovich
PhD student of Mathematical Statistics department,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, MSU.
E-mail: drastamat94@gmail.com

Kruglov Victor Makarovich
Professor of Mathematical Statistics department,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, MSU.

Received 08.08.2020, revised 12.10.2020.

In the article it is suggested a new sufficient condition for uniform integrability of continues exponential local martingales. It is shown that the condition is much weaker then a number of known sufficient conditions for uniform integrability of exponential local martingales.

Keywords: uniform integrability, exponential processes, martingales, stopping times, martingales.

Citation

Kazanchyan D.Ch., Kruglov V.M., "A new sufficient condition for uniform integrability of exponential local martingales", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 3, 5–13(in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk596

References

[1] Cherny A., Shiryaev A., "On criteria for the uniform integrability of Brownian stochastic exponentials", *Optimal Control and Partial Differential Equations*, eds. J.L. Menaldi et al., Iso Press, 2001, 1–13.

[2] Chung K.L., Williams R.J., *Introduction to stochastic Integration*, Second Edition, Birkhauser, Boston, 1990.

[3] Girsanov I.V., "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures", *Theory of Probability and its Applications*, **5**:3 (1960), 314–330 (in Russian).

[4] Kazamaki N., *Continuous Exponential Martingales and BMO.* V. 1579, Lecture Notes in Mathematics, eds. A. Dold, B. Eckmann, F. Takens, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1994, 91 pp.

[5] Kazanchyan D.C., Kruglov V.M., “Uniform integrability of exponential processes”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **40**:10 (2019), 1498–1506, https://doi.org/10.1134/S1995080219100159.

[6] Klebaner F., Liptser R., “When a stochastic exponential is a true martingale. Extention of method of Bene’s”, *Theory of Probability and its Applications*, **58**:1 (2014), 38–62.

[7] Krylov N.V., *Introduction to the theory of diffusion processes*, American Mathematical Society, Providence, 1995.

[8] Medvegyev P., *Stochastic Integration Theory*, Oxford University Press, Oxford, 2007, 607 pp.

[9] Novikov A.A., “On an identity for stochastic integrals”, *Theory of Probability and its Applications*, **17**:4 (1973), 717–720.

[10] Novikov A.A., “On the conditions of the uniform integrability of the continuous nonnegative martingales”, *Theory of Probability and its Applications*, **24**:4 (1980), 820–824.