МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.63

СЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Бештоков М.Х.
Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию 12.06.2020, после переработки 02.10.2020.

Рассмотрена первая начально-краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения конвекции диффузии дробного порядка. На равномерной сетке построена разностная схема, аппроксимирующая эту задачу. Для решения поставленной задачи в предположении существования регулярного решения получены априорные оценки в дифференциальной и разностной формах. Из этих оценок следуют единственность и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи, а также сходимость со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

Ключевые слова: нагруженные уравнения, краевые задачи, априорная оценка, уравнение конвекции диффузии, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 3. С. 27–40.
https://doi.org/10.26456/vtpmk560

Введение

В последние годы внимание многих исследователей привлекают краевые задачи, описываемые нагруженными уравнениями. Важность исследования нагруженных уравнений связана с многочисленными их приложениями практически во всех областях математики и естествознания. Например, основой качественного прорыва таких актуальных направлений, как физика фракталов, физика экстремальных состояний, математическая биология и математическая экономика, выступают нагруженные уравнения.

Первые работы были посвящены нагруженным интегральным уравнениям [1–4]. Важность изучения таких уравнений подчеркивали А.Н. Крылов, А.И.Смирнов, А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, которые приводили примеры прикладных задач из техники и физики, сводящиеся к нагруженным интегральным уравнениям. Нагруженным дифференциальным уравнениям посвящены работы [5–8]. В работах А.М. Нахушева отмечается практическая и теоретическая важность исследований нагруженных дифференциальных уравнений. Одним из методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений является предложенный А.М. Нахушевым метод редукции интегро-дифференциальных уравнений к нагруженным дифференциальным уравнениям. В работе [6] впервые указана связь нелокальных задач с нагруженными уравнениями. Нелокальные задачи типа Бицадзе-Самарского для уравнений Лапласа и теплопроводности эквивалентно редуцированы к локальным задачам для нагруженных дифференциальных уравнений.

Численным методам решения различных краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [9–15].

В данной работе рассматривается первая начально-краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения конвекции диффузии дробного порядка. На равномерной сетке построена разностная схема, аппроксимирующая эту задачу. Для решения поставленной задачи в предположение существования регулярного решения получены априорные оценки в дифференциальной и разностной формах. Полученные неравенства означают единственность решения и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи. В предположении существования точного решения в классе достаточно гладких функций, а также в силу линейности рассматриваемых задач эти неравенства позволяют утверждать сходимость приближенного решения к точному решению.

1. Постановка первой начально-краевой задачи

В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим первую начально-краевую задачу для нагруженного дифференциального уравнения конвекции диффузии с дробной производной Капуто порядка α

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u(x_0,t) + f(x,t),$$

$$0 < x < l,\ 0 < t \le T, \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \tag{1.3}$$

где

$$0 < c_0 \le k(x,t) \le c_1, \quad |q(x,t)|,\ |r(x,t)|,\ |r_x(x,t)|,\ |k_x(x,t)| \le c_2, \tag{1.4}$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau,$ – дробная производная в смысле Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$, $c_i = const > 0, i = 0,1,2$, $\partial_{0t}^{\alpha} u = D_{0t}^{\alpha} u - \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}, D_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^\alpha}$– дробная производная в смысле Римана-Лиувилля порядка α.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1.1) − (1.3) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающей нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа $M_i,\ i = 1,2,...$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Теорема 1. *Если* $k(x,t) \in C^{1,0}(Q_T)$, $r(x,t), q(x,t), f(x,t) \in C(Q_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}\big(Q_T\big) \cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) \in C(Q_T)$ *и выполнены условия (1.4), тогда для решения задачи (1.1)-(1.3) справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \le M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2\Big),$$

где $M = const > 0$, *зависящее только от входных данных задачи (1.1)-(1.3).*

Доказательство. Для получения априорной оценки решения задачи (1.1) - (1.3) в дифференциальной форме умножим уравнение (1.1) скалярно на u:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha} u, u\Big) = \Big(\big(ku_x\big)_x, u\Big) + \Big(ru_x, u\Big) - \Big(qu(x_0,t), u\Big) + \Big(f, u\Big), \tag{2.1}$$

где $\Big(a, b\Big) = \int_0^l ab dx$, $\Big(a, a\Big) = \|a\|_0^2$, где $a, b -$ заданные на $[0, l]$ функции.

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (2.1), пользуясь неравенством Коши с ε [16, с.100], леммой 1 [11]

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha} u, u\Big) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l u \int_0^t u_\tau(x,\tau)(t-\tau)^{-\alpha} d\tau. \tag{2.2}$$

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha} u, u\Big) \ge \frac{1}{2}\Big(1, \partial_{0t}^{\alpha} u^2\Big) = \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2, \tag{2.3}$$

$$\Big(\big(ku_x\big)_x, u\Big) = \int_0^l u\Big(ku_x\Big)_x dx = uku_x|_0^l - c_0\|u_x\|_0^2, \tag{2.4}$$

$$\Big(ru_x, u\Big) = \int_0^l ruu_x dx \le \frac{c_2^2}{4\varepsilon}\int_0^l u^2 dx + \varepsilon\int_0^l u_x^2 dx \le \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\|u\|_0^2, \tag{2.5}$$

$$-\Big(qu(x_0,t), u\Big) = -\int_0^l qu(x_0,t)u dx = -u(x_0,t)\int_0^l qu dx \le$$

$$\le \varepsilon u^2(x_0,t) + \frac{1}{4\varepsilon}\bigg(\int_0^l qu dx\bigg)^2 \le \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_2^{\varepsilon}\|u\|_0^2, \tag{2.6}$$

$$\Big(f, u\Big) = \int_0^l fu dx \le \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \tag{2.7}$$

Учитывая преобразования (2.2)-(2.7), из (2.1) с учетом (1.2) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 \le 2\varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_3^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|f\|_0^2. \tag{2.8}$$

Из (2.8) при $\varepsilon = \dfrac{c_0}{4}$ находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \le M_4\|u\|_0^2 + M_5\|f\|_0^2. \tag{2.9}$$

Применяя к обеим частям (2.9) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, находим

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \leq M_4 D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + M_6\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2\Big). \tag{2.10}$$

На основании леммы 2 [11] из (2.10) находим искомую априорную оценку

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \leq M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2\Big), \tag{2.11}$$

где $M = const > 0$, зависящее только от входных данных задачи (1.1)-(1.3). □

Из оценки (2.11) следуют единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1.1)-(1.3) от входных данных.

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1.1)-(1.3) применим метод конечных разностей. Построим монотонную схему второго порядка точности, содержащие односторонние производные, учитывающие знак $r(x,t)$. Для этого рассмотрим вместо уравнения (1.1) следующее уравнение с возмущенными коэффициентами [16]

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \varkappa\big(ku_x\big)_x + ru_x - qu(x_0,t) + f(x,t), \tag{3.1}$$

где $\varkappa = \dfrac{1}{1+R}$, $R = \dfrac{0.5h|r|}{k}$ – разностное число Рейнольдса.

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)-(1.3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \varkappa_i^j\left(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j\left(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^{-} + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^{+}\right) + \varphi_i^j, \tag{3.2}$$

$$y_0^{(\sigma)} = y_N^{(\sigma)} = 0, \tag{3.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{3.4}$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum\limits_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ - дискретный аналог дробной производной Капуто порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1$, обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$ [12].

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha},\ a_l^{(\alpha,\sigma)} = \Big(l+\sigma\Big)^{1-\alpha} - \Big(l-1+\sigma\Big)^{1-\alpha},\ l \geq 1,$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\Big[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\Big] - \frac{1}{2}\Big[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\Big],\ l \geq 1,$$

$$\text{при } j=0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j>0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)},\ s=0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)},\ 1 \leq s \leq j-1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)},\ s=j, \end{cases}$$

$$r_0 = r(0,t) = r_0^{(j+\sigma)} \leq 0, \quad r_N = r(l,t) = r_N^{(j+\sigma)} \geq 0,$$

$$a_i^j = k\big(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}\big),\ b_i^j = \frac{r(x, t^{j+\sigma})}{k(x_i, t^{j+\sigma})},\ \varphi_i^j = f(x_i, t^{j+\sigma}),\ \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0,\ y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j,\ d_i^j = d(x_i, t^{j+\sigma}),$$

$$x_{i_0}^- = \frac{x_{i_0+1} - x_0}{h},\ x_{i_0}^+ = \frac{x_0 - x_{i_0}}{h},\ x_{i_0} \leq x_0 \leq x_{i_0+1}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1.4), тогда существует такое τ_0, что если $\tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (3.2)-(3.4) справедлива априорная оценка*

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leq M\left(\|y^0\|_0^2 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0\leq j'\leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2\right),$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Доказательство. Априорную оценку найдем методом энергетических неравенств. Для этого введем скалярные произведения и норму:

$$\big(u,v\big) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h,\ \big(u,v\big] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h,\ \big(u,u\big) = \big(1,u^2\big) = \|u\|_0^2.$$

Умножим теперь (3.2) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}\Big) = \Big(\varkappa\big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x, y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) +$$

$$+\Big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) - \Big(d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\Big), y^{(\sigma)}\Big) + \Big(\varphi, y^{(\sigma)}\Big). \qquad (3.5)$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (3.5), с учетом (3.3) и леммы 1 [12]

$$\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}\Big) \geq \frac{1}{2}\Big(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \big(y^2\big)\Big); \qquad (3.6)$$

$$\Big(\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}\Big) = \varkappa a y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big|_0^N - \Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\Big] =$$

$$= -\Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big] - \Big(a\varkappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\Big] \leq$$

$$\leq -\Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big] - \frac{1}{(1+hM_1)}\Big(a\varkappa, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\Big]; \qquad (3.7)$$

$$-\Big(d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\Big), y^{(\sigma)}\Big), y^{(\sigma)}\Big) = -\Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\Big)\Big(d, y^{(\sigma)}\Big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(d, y^{(\sigma)}\Big)^2 \leq \varepsilon\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_2^\varepsilon \|y^{(\sigma)}\|_0^2; \qquad (3.8)$$

$$\Big(\varphi, y^{(\sigma)}\Big) \leq \frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2. \qquad (3.9)$$

Принимая во внимание преобразования (3.6)-(3.9), из (3.5) находим

$$\left(\frac{1}{2},\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y^2)\right)+M_3\|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0\le-\left(a\varkappa_{\bar{x}},y^{(\sigma)}_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\right]+\left(b^-ay^{(\sigma)}_{\bar{x}},y^{(\sigma)}\right)+$$

$$+\left(b^+a^{(+1)}y^{(\sigma)}_{x},y^{(\sigma)}\right)+\varepsilon\|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0+M^{\varepsilon}_4\|y^{(\sigma)}\|^2_0+\frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|^2_0+\frac{1}{2}\|\varphi\|^2_0. \quad (3.10)$$

Преобразуем первое, второе и третье слагаемые в правой части (3.10). Тогда получим

$$-\left(a\varkappa_{\bar{x}},y^{(\sigma)}_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\right]+\left(b^-a,y^{(\sigma)}_{\bar{x}}y^{(\sigma)}\right)+\left(b^+a^{(+1)}y^{(\sigma)}_{x},y^{(\sigma)}\right)\le\varepsilon\|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0+M^{\varepsilon}_5\|y^{(\sigma)}\|^2_0. \quad (3.11)$$

Из (3.10) с учетом (3.11) находим

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y\|^2_0+\|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0\le\varepsilon M_6\|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|^2_0+M^{\varepsilon}_7\|y^{(\sigma)}\|^2_0+M_8\|\varphi\|^2_0. \quad (3.12)$$

Выбирая $\varepsilon=\dfrac{1}{2M_6}$ получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y\|^2_0+\|y^{\sigma}_{\bar{x}}]|^2_0\le M_9\|y^{\sigma}\|^2_0+M_{10}\|\varphi\|^2_0. \quad (3.13)$$

Перепишем (3.13) в другой форме

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y\|^2_0\le M^{\sigma}_{11}\|y^{j+1}\|^2_0+M^{\sigma}_{12}\|y^j\|^2_0+M_{13}\|\varphi\|^2_0. \quad (3.14)$$

На основании леммы 7 [13] из (3.14) получаем

$$\|y^{j+1}\|^2_0\le M\left(\|y^0\|^2_0+\max_{0\le j'\le j}\|\varphi^{j'}\|^2_0\right), \quad (3.15)$$

где $M=const>0$, не зависящая от h и τ.

Из оценки (3.15) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (3.2)-(3.4) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)-$ решение задачи (1.1) – (1.3), $y(x_i,t_j)=y^j_i$-решение разностной задачи (3.2)–(3.4). Для оценки точности разностной схемы (3.2)–(3.4) рассмотрим разность $z^j_i=y^j_i-u^j_i$, где $u^j_i=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (3.2) – (3.4), получаем задачу для функции z

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\varkappa^j_i\left(a^j_iz^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right)_{x,i}+b^{-j}_ia^j_iz_{\bar{x},i}+b^{+j}_ia^j_{i+1}z^{(\sigma)}_{x,i}-d^j_i\left(z^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0}+z^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\right)+\Psi^j_i, \quad (3.16)$$

$$z^{(\sigma)}_0=z^{(\sigma)}_N=0, \quad (3.17)$$

$$z(x,0)=0, \quad (3.18)$$

где $\Psi=O\left(h^2+\tau^2\right)$ - погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1) – (1.3) разностной схемой (3.2) – (3.4) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (1.1) – (1.3).

Применяя априорную оценку (3.15) к решению задачи (3.16) – (3.18), получаем неравенство

$$\|z^{j+1}\|^2_0\le M\max_{0\le j'\le j}\|\Psi^{j'}\|^2_0, \quad (3.19)$$

где $M=const>0$, не зависящая от h и τ. □

Из априорной оценки (3.19) следует сходимость решения разностной задачи (3.2) – (3.4) к решению дифференциальной задачи (1.1) – (1.3) в смысле нормы $\|z^{j+1}\|_0^2$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau \le \tau_0$ справедлива оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_0 \le M\Big(h^2 + \tau^2\Big).$$

Замечание 1. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда уравнение (1.1) имеет вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \sum_{s=1}^{p} q_s(x,t)u(x_s,t) + f(x,t),$$

если потребовать выполнения условия $|q_s| \le c_2$.

4. Алгоритм численного решения

Для численного решения первой начально-краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения конвекции диффузии с дробной производной Капуто порядка α приведем разностную схему (3.2) - (3.4) к расчетному виду. Тогда уравнение (3.2) приводится к следующему виду

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} - h^2\tau\sigma d_i^j\Big(y_{i_0}^{j+1}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{j+1}x_{i_0}^+\Big) = -F_i^j,\ i = \overline{1, N-1}, \quad (4.1)$$

где

$$A_i = \tau\sigma\varkappa_i^j a_i^j - \tau h\sigma b_i^{-j} a_i, \quad B_i = \tau\sigma\varkappa_i^j a_{i+1}^j + \tau h\sigma b_i^{+j} a_{i+1},$$

$$C_i = A_i + B_i + h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)},$$

$$F_i^j = AA_i y_{i-1}^j - CC_i y_i^j + BB_i y_{i+1}^j + h^2\tau\varphi_i^j - h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_i^{s+1} - y_i^s) -$$

$$-\tau(1-\sigma)h^2 d_i^j\Big(y_{i_0}^j x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^j x_{i_0}^+\Big)$$

$$AA_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_i^j - \tau h(1-\sigma)b_i^{-j}a_i, \quad BB_i = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_{i+1}^j + \tau h(1-\sigma)b_i^{+j}a_{i+1},$$

$$CC_i = AA_i + BB_i - h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Краевые условия (3.3) принимают вид

$$y_0^{j+1} = y_N^{j+1} = 0. \quad (4.2)$$

Таким образом, с учетом (4.1)-(4.2), разностная схема (3.2)-(3.4) приводится к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} - h^2\tau\sigma d_i\Big(y_{i_0}^{j+1}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{j+1}x_{i_0}^+\Big) = -F_i^j, \\ y_0^{j+1} = y_N^{j+1} = 0, \\ y(x,0) = u_0(x). \end{cases} \quad (4.3)$$

Решение системы (4.3) будем искать в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} y_{i_0} + \gamma_{i+1} y_{i_0+1} + \delta_{i+1},\ i = \overline{0, N-1}. \tag{4.4}$$

Найдем теперь $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \delta_i,\ i = \overline{1, N}$.
Из условия (4.2) следует, что

$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0.$$

Подставляя

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} y_{i_0} + \gamma_{i+1} y_{i_0+1} + \delta_{i+1}, \quad y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i y_{i_0} + \gamma_i y_{i_0+1} + \delta_i$$

в (4.1), получим

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i B_i - h^2 \tau \sigma d_i x_{i_0}^-}{C_i - A_i \alpha_i},$$

$$\gamma_{i+1} = \frac{A_i \gamma_i - h^2 \tau \sigma d_i x_{i_0}^+}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \delta_{i+1} = \frac{F_i^j + A_i \delta_i}{C_i - A_i \alpha_i}. \tag{4.5}$$

Выразим неизвестные $y_i,\ i = \overline{0, N}$ через $y_{i_0},\ y_{i_0+1}$ следующим образом

$$y_i = H_i y_{i_0} + T_i y_{i_0+1} + \Phi_i. \tag{4.6}$$

В (4.6) найдем H_N, T_N, Φ_N, тогда учитывая условие (4.2), а также $y_N = H_N y_{i_0} + T_N y_{i_0+1} + \Phi_N$, $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N y_{i_0} + \gamma_N y_{i_0+1} + \delta_N$, получим

$$H_N = T_N = \Phi_N = 0.$$

Найдем теперь H_i, T_i, Φ_i. Тогда, подставляя (4.6) в (4.4), получим

$$H_i = \alpha_{i+1} H_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad T_i = \alpha_{i+1} T_{i+1} + \gamma_{i+1},$$

$$\Phi_i = \alpha_{i+1} \Phi_{i+1} + \delta_{i+1}, \quad i = \overline{N-1, 0}. \tag{4.7}$$

Выразим $y_{i_0},\ y_{i_0+1}$ через H_i, T_i, Φ_i. Для этого рассмотрим выражения:

$$y_{i_0} = H_{i_0} y_{i_0} + T_{i_0} y_{i_0+1} + \Phi_{i_0}, \tag{4.8}$$

$$y_{i_0+1} = H_{i_0+1} y_{i_0} + T_{i_0+1} y_{i_0+1} + \Phi_{i_0+1}. \tag{4.9}$$

Учитывая (4.8), (4.9), получим

$$y_{i_0+1} = \frac{H_{i_0+1} \Phi_{i_0} + \Phi_{i_0+1}(1 - H_{i_0})}{(1 - H_{i_0})(1 - T_{i_0+1}) - T_{i_0} H_{i_0+1}}, \quad y_{i_0} = \frac{T_{i_0}}{1 - H_{i_0}} y_{i_0+1} + \frac{\Phi_{i_0}}{1 - H_{i_0}}. \tag{4.10}$$

Из (4.6), (4.10) находим решение y_i системы (4.3).

5. Результаты численного эксперимента

Коэффициенты уравнения и граничных условий задачи (1.1)-(1.3) подбираются таким образом, чтобы точным решением задачи была функция $u(x,t) = t^3 e^x$.

Ниже в таблице при различных значениях параметров $\alpha = 0.01;\ 0.5;\ 0.99$, x_0=0.1; 0.5; 0.9 и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в нормах $\|[\cdot]\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда $h=\tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$. Порядок сходимости определяется по следующей формуле: ПС$= \log_{\frac{h_1}{h_2}} \dfrac{\|[z_1]\|_0}{\|[z_2]\|_0}$, где z_i- это погрешность, соответствующая h_i.

Таблица 1: Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $\|[\cdot]\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при различных значениях $\alpha = 0.01; 0.5; 0.99$, $x_0 = 0.1; 0.5; 0.9$ на $t=1$, когда $h=\tau$

x_0	α	h	$\max\limits_{0<j<m}\|[z^j]\|_0$	ПС в $\|[\cdot]\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.1	0.01	$\frac{1}{10}$	0.002862204		0.003897047	
		$\frac{1}{20}$	0.000717282	1.9965	0.000980101	1.9914
		$\frac{1}{40}$	0.000179427	1.9991	0.000245326	1.9982
		$\frac{1}{80}$	0.000044863	1.9998	0.000061359	1.9994
		$\frac{1}{160}$	0.000011216	2.0000	0.000015340	1.9999
	0.50	$\frac{1}{10}$	0.002844933		0.003873287	
		$\frac{1}{20}$	0.000712956	1.9965	0.000974306	1.9911
		$\frac{1}{40}$	0.000178345	1.9991	0.000243854	1.9984
		$\frac{1}{80}$	0.000044593	1.9998	0.000060993	1.9993
		$\frac{1}{160}$	0.000011149	2.0000	0.000015249	2.0000
	0.99	$\frac{1}{10}$	0.002860206		0.003894299	
		$\frac{1}{20}$	0.000716781	1.9965	0.000979430	1.9913
		$\frac{1}{40}$	0.000179302	1.9991	0.000245156	1.9982
		$\frac{1}{80}$	0.000044832	1.9998	0.000061316	1.9994
		$\frac{1}{160}$	0.000011208	2.0000	0.000015330	2.0000
0.5	0.01	$\frac{1}{10}$	0.002988675		0.004053683	
		$\frac{1}{20}$	0.000749047	1.9964	0.001023641	1.9855
		$\frac{1}{40}$	0.000187130	2.0010	0.000255727	2.0010
		$\frac{1}{80}$	0.000046724	2.0018	0.000063852	2.0018
		$\frac{1}{160}$	0.000011668	2.0016	0.000015945	2.0016
	0.50	$\frac{1}{10}$	0.002976100		0.004037566	
		$\frac{1}{20}$	0.000745922	1.9963	0.001019443	1.9857
		$\frac{1}{40}$	0.000186353	2.0010	0.000254682	2.0010
		$\frac{1}{80}$	0.000046531	2.0018	0.000063592	2.0018
		$\frac{1}{160}$	0.000011620	2.0016	0.000015881	2.0016
	0.99	$\frac{1}{10}$	0.002988454		0.004053400	
		$\frac{1}{20}$	0.000749013	1.9963	0.001023596	1.9855
		$\frac{1}{40}$	0.000187126	2.0010	0.000255721	2.0010
		$\frac{1}{80}$	0.000046724	2.0018	0.000063852	2.0018
		$\frac{1}{160}$	0.000011668	2.0016	0.000015945	2.0016

x_0	α	h	$\max\limits_{0<j<m} \|[z^j]\|_0$	ПС в $\|[\cdot]\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.9	0.01	$\frac{1}{10}$	0.003053951		0.004161500	
		$\frac{1}{20}$	0.000767395	1.9926	0.001048498	1.9888
		$\frac{1}{40}$	0.000192055	1.9985	0.000262686	1.9969
		$\frac{1}{80}$	0.000048017	1.9999	0.000065681	1.9998
		$\frac{1}{160}$	0.000012002	2.0003	0.000016419	2.0001
	0.50	$\frac{1}{10}$	0.003045777		0.004151003	
		$\frac{1}{20}$	0.000765354	1.9926	0.001045752	1.9889
		$\frac{1}{40}$	0.000191545	1.9984	0.000262014	1.9968
		$\frac{1}{80}$	0.000047890	1.9999	0.000065511	1.9998
		$\frac{1}{160}$	0.000011970	2.0003	0.000016377	2.0001
	0.99	$\frac{1}{10}$	0.003054578		0.004162306	
		$\frac{1}{20}$	0.000767553	1.9926	0.001048711	1.9888
		$\frac{1}{40}$	0.000192095	1.9984	0.000262739	1.9969
		$\frac{1}{80}$	0.000048027	1.9999	0.000065694	1.9998
		$\frac{1}{160}$	0.000012005	2.0003	0.000016422	2.0001

Заключение

Настоящая работа посвящена изучению первой начально-краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения конвекции диффузии с дробной производной Капуто, а также разностной схемы, аппроксимирующей эту задачу на равномерной сетке. Для решения поставленной задачи в предположение существования регулярного решения получены априорные оценки в дифференциальной и разностной формах. Полученные неравенства означают единственность решения и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи. В предположении существования точного решения в классе достаточно гладких функций, а также в силу линейности рассматриваемых задач эти неравенства позволяют утверждать сходимость приближенного решения к точному решению со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

Список литературы

[1] Knezer A. Belastete integralgleichungen // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1914. Vol. 37. Pp. 169–197.

[2] Lichtenstein L. Vorlesungen uber einige Klassen Nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen - Nebst Anwendungen. Springer, 1931. 180 p.

[3] Назаров Н.Н. Об одном новом классе линейных интегральных уравнений // Труды института математики и механики АН УзССР. 1948. № 4. С. 77–106.

[4] Габиб-заде А.Ш. Исследование решения одного класса линейных нагруженных интегральных уравнений // Труды института физики и математики АН АзССР. Серия математическая. 1959. № 8. С. 177–182.

[5] Будак Б.М., Искендеров А.Д. Об одном классе краевых задач с неизвестными коэффициентами // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 175, № 1. С. 13–16.

[6] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.

[7] Казиев В.М. Задача Трикоми для нагруженного уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 173–175.

[8] Krall A.M. The development of general differential and general differential boundary systems // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 1975. Vol. 5, № 4. Pp. 493–542.

[9] Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткий И.А., Юрков Ю.И. Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии. М.: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2002. 57 с.

[10] Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1871–1881.

[11] Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 660–666.

[12] Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // Journal of Computational Physics. 2015. № 280. Pp. 424–438.

[13] Бештоков М.Х. Нелокальные краевые задачи для уравнения соболевского типа с дробной производной Герасимова-Капуто и сеточные методы их решения // Математический труды. 2018. Т. 21, № 2. С. 1–30.

[14] Бештоков М.Х., Эржибова Ф.А. К краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка // Математические труды. 2020. Т. 23, № 1. С. 16–36.

[15] Beshtokov M.Kh., Khudalov M.Z. Difference Methods for Solving Local and Nonlocal Boundary Value Problems for a Loaded Fractional Order Heat Equation // Stability, Control and Differential Games. Series: Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2020. Pp. 187–201.

[16] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.

Образец цитирования

Бештоков М.Х. Сеточный метод решения первой начально-краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения конвекции диффузии дробного порядка // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 3. С. 27–40. https://doi.org/10.26456/vtpmk560

Сведения об авторах

1. **Бештоков Мурат Хамидбиевич**
ведущий научный сотрудник отдела Вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук.

Россия, 360000, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А. E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

A GRID METHOD FOR SOLVING THE FIRST INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED DIFFERENTIAL EQUATION OF FRACTIONAL ORDER CONVECTION DIFFUSION

Beshtokov Murat Khamidbievich
Leading Researcher in the Department of Computational Methods,
Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
Russia, 360004, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, 89A Shortanova str.
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Received 12.06.2020, revised 02.10.2020.

The first initial boundary value problem for a loaded differential equation of fractional order convection diffusion is considered. A difference scheme approximating this problem is constructed on a uniform grid. To solve the problem, assuming the existence of a regular solution, a priori estimates in differential and difference forms are obtained. From these estimates follow the uniqueness and continuous dependence of the solution on the input data of the problem, as well as the convergence with the rate $O(h^2 + \tau^2)$.

Keywords: loaded equations, boundary value problems, a priori estimation, convection diffusion equation, fractional order differential equation, fractional Caputo derivative.

Citation

Beshtokov M.K., “A grid method for solving the first initial boundary value problem for a loaded differential equation of fractional order convection diffusion”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 3, 27–40(in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk560

References

[1] Knezer A., “Belastete integralgleichungen”, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **37** (1914), 169–197.

[2] Lichtenstein L., *Vorlesungen uber einige Klassen Nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen - Nebst Anwendungen*, Springer, 1931, 180 pp.

[3] Nazarov H.H., “On a new class of linear integral equations”, *Trudy instituta matematiki i mekhaniki AN UzSSR [Proceedings of the Institute of mathematics and mechanics of the USSR Academy of Sciences]*, 1948, № 4, 77–106 (in Russian).

[4] Gabib-zade A.Sh., “Investigation of the solution of a class of linear loaded integral equations”, *Proceedings of the Institute of physics and mathematics of the Academy of Sciences of the AzSSR. Mathematical Series*, 1959, № 8, 177–182 (in Russian).

[5] Budak B.M., Iskenderov A.D., "On a class of boundary value problems with unknown coefficients", *Doklady Akademii Nauk SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Sciences]*, **175**:1 (1967), 13–16 (in Russian).

[6] Nakhushev A.M., "Loaded equations and their applications", *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **19**:1 (1983), 86–94 (in Russian).

[7] Kaziev V.M., "Tricomi problem for the loaded Lavrentiev-Bitsadze equation", *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **15**:1 (1979), 173–175 (in Russian).

[8] Krall A.M., "The development of general differential and general differential boundary systems", *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **5**:4 (1975), 493–542.

[9] Goloviznin V.M., Kiselev V.P., Korotkij I.A., Yurkov Yu.I., *Nekotorye osobennosti vychislitelnykh algoritmov dlya uravnenij drobnoj diffuzii [Some features of computational algorithms for fractional diffusion equations]*, Institute for the safe development of nuclear energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 2002 (in Russian), 57 pp.

[10] Taukenova F.I., Shkhanukov-Lafishev M.Kh., "Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **46**:10 (2006), 1785–1795.

[11] Alikhanov A.A., "A priori estimates of solutions of boundary value problems for fractional order equations", *Differentsialnye Uravneniya [Differential Equations]*, **46**:5 (2010), 660–666 (in Russian).

[12] Alikhanov A.A., "A new difference scheme for the time fractional diffusion equation", *Journal of Computational Physics*, 2015, № 280, 424–438.

[13] Beshtokov M.Kh., "Nonlocal boundary value problems for Sobolev-type fractional equations and grid methods for solving them", *Siberian Advances in Mathematics*, **29**:1 (2019), 1–21.

[14] Beshtokov M.Kh. Erzhibova F.A., "On boundary value problems for integro-differential equations of fractional order", *Matematicheskie trudy [Mathematical Works]*, **23**:1 (2020), 16–36 (in Russian).

[15] Beshtokov M.Kh., Khudalov M.Z., "Difference Methods for Solving Local and Nonlocal Boundary Value Problems for a Loaded Fractional Order Heat Equation", *Stability, Control and Differential Games*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2020, 187–201.

[16] Samarskij A.A., *Teoriya raznostnykh skhem [Theory of Difference Schemes]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian), 616 pp.