УДК 519.7

ИГРА «НАПАДЕНИЕ-ОБОРОНА» С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОПУСКНУЮ СПОСОБНОСТЬ ПУНКТОВ

Перевозчиков А.Г.[*], **Решетов В.Ю.**[**], **Лесик А.И.**[***]
[*]НПО «РусБИТех», г. Тверь
[**]МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
[***]Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 01.07.2020, после переработки 25.09.2020.

Работа обобщает игру «нападение-оборона» Ю.Б.Гермейера в части учета пропускной способности пунктов и основана на его обобщенном принципе уравнивания, что приводит в случае однородности ресурсов сторон к выпуклым минимаксным задачам, которые могут быть решены методом субградиентного спуска. Классическая модель «нападение-оборона» Ю.Б.Гермейера является модификацией модели О.Гросса. В работе В.Ф. Огарышева исследована игровая модель, обобщающая модели Гросса и Гермейера. В работе Д.А. Молодцова изучалась модель Гросса с непротивоположными интересами сторон, в работах Т.Н.Данильченко, К.К. Масевич и Б.П.Крутова – динамические расширения модели. В военных моделях пункты интерпретируются обычно как направления и характеризуют пространственное распределение ресурсов защиты по ширине. Однако реально имеют место также ограничения по пропускной способности пунктов (направлений). Это приводит в случае однородных ресурсов к минимаксным задачам для определения гарантированного результата (НГР) обороны. Получена точная верхняя оценка для НГР обороны, которая показывает потенциальные возможности обороны с учетом пропускной способности пунктов (направлений).

Ключевые слова: модель Гросса, модель Гермейера, обобщенный принцип уравнивания, ограничения по пропускной способности пунктов, наилучший гарантированный результат обороны, минимаксная стратегия обороны, смешанная стратегия нападения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 3. С. 78–92.
https://doi.org/10.26456/vtpmk600

Введение

Работа основана на результатах из [1] и является дальнейшим развитием построений в [2,3]. Классическая модель «нападение-оборона» Ю.Б.Гермейера была определена и изученная в работе [4]. Она является модификацией модели О.Гросса [5]. В работе [6] исследована игровая модель, обобщающая модели Гросса и Гермейера. В работе [7] изучалась модель Гросса с непротивоположными интересами сторон, в работах [8,9] – гарантированный результат обороны с произвольными выпуклыми аддитивными функциями выигрыша в условиях целочисленности переменных, в работах [10,11] – динамические расширения модели. В военных моделях пункты интерпретируются обычно как направления и характеризуют пространственное распределение ресурсов защиты по ширине. Однако реально имеет место также пространственное распределение ресурсов обороны по глубине, характеризующейся количеством уровней обороны на данном направлении.

В работе [1] изучалась простейшая модель многоуровневой системы обороны на заданном направлении. Эта модель представляет собой частный случай задачи дискретного оптимального управления (ОПУ) терминального типа и может быть решена методом градиентного спуска. Главной проблемой является недифференцируемость функций в правых частях уравнения движения по совокупности переменных, что делает некорректным использование классических результатов о дифференцируемости терминального критерия и построения его градиента на основе сопряженной системы.

Для решения этой проблемы было предложено использовать процедуру осреднения функций в правых частях уравнения движения по схеме [12] с рандомизацией, основанной на дифференциальных свойствах функции связанного максимума [13]. По вычислительной сложности полученный метод стохастического градиентного спуска будет эквивалентен методу градиентного спуска, но в отличие от него корректен.

В работе [2] дополнительно учитываются вероятности воздействия на каждом уровне обороны, определяемые формулой Эрланга, которая может быть аппроксимирована отношением двух нормальных функции распределения. В результате критерий становится дифференцируемой функцией, что позволяет вернуться к общей минимаксиминной задаче распределения ресурсов защиты по направлениям и уровням защиты. В работе [3] эти результаты получают дальнейшее развитие в части учета предварительного подавления средств обороны нападением.

Дальнейшее обобщение модели «нападение-оборона» может состоять в учете ограничений пропускной способности пунктов (направлений). Это приводит, в случае однородных ресурсов, к минимаксным задачам для определения гарантированного результата (НГР) обороны, которые могут быть решены методом субградиентного спуска. Получена точная верхняя оценка для НГР обороны, которая показывает потенциальные возможности обороны с учетом пропускной способности пунктов (направлений).

1. Однородная игра «нападение-оборона» с ограничениями на пропускные способности направлений

Пусть $R_i \geq 0$ – количество средства нападения, которое может уничтожить одна единица средств обороны на i-м направлении, $i = 1, ..., n$. Пусть $U_i \geq 0$ – количество средств обороны, назначенных на i-е направление, $i = 1, ..., n$. Требуется решить антагонистическую игру с функцией выигрыша нападения, представляющей собой общее количество прорвавшихся средств нападения:

$$f(X, U) = \sum_{i=1}^{n} \max\{0, X_i - R_i U_i\}. \tag{1}$$

Пусть Y и V – количество средств нападения и обороны. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором

$$U = (U_1, ..., U_n) \in B(V) = \{ U| \sum_{i=1}^{n} U_i = V, U_i \geq 0, i = 1, ..., n\}. \tag{2}$$

Пусть $X_i^0 > 0$ – максимальное количество средств нападения, которое может быть назначено на i-е направление, $i = 1, ..., n$, которое мы будем называть далее пропускной способностью направления. Стратегия нападения состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$X = (X_1, ..., X_n) \in A(Y) = \{ X| \sum_{i=1}^{n} X_i \leq Y, 0 \leq X_i \leq X_i^0, i = 1, ..., n\}. \tag{3}$$

Используя выпуклость функции $f(X, U)$ по X, U, для этой антагонистической игры можно утверждать (см., теорему 5.4 в [14, стр. 54]), что наилучший гарантированный результат обороны

$$\bar{v} = \min_{U \in B(V)} \max_{X \in A(Y)} f(X, U) = \min_{U \in B(V)} \max_{X \in A_0(Y)} f(X, U) \tag{4}$$

будет совпадать со значением v игры, и минимаксная стратегия обороны оптимальна. Здесь $A_0(Y)$, - крайние точки множества $A(Y)$, которые получаются следующим образом. Возьмем любую перестановку $J^{(j)} = (i_1^j, ..., i_n^j), j = 1, ..., n!$, элементов множества $I = \{1, 2, ..., n\}$. Предположим, что

$$0 < Y < \sum_{i=1}^{n} X_i^0. \tag{5}$$

В противном случае множество $A(Y)$ представляет собой параллелепипед

$$A(Y) = \{ X| \ 0 \leq X_i \leq X_i^0, i = 1, ..., n\},$$

и внутренний максимум в (4) достигается в единственной крайней точке

$$X = (X_1^0, ..., X_n^0).$$

Предположим, что при этом

$$\sum_{k=1}^{m} X_{i_k}^0 \leq Y < \sum_{k=1}^{m+1} X_{i_k}^0, \tag{6}$$

тогда координаты соответствующей крайней точки $X^{(j)}$ множества $A(Y)$ задаются формулой

$$X_{i_k}^j = \begin{cases} X_{i_k}^0, k = 1, ..., m, \\ Y - \sum\limits_{k=1}^{m} X_{i_k}^0, k = m + 1, \\ 0, k = m + 2, ..., n. \end{cases} \tag{7}$$

Замечание 1. Заметим, что некоторые крайние точки (7) совпадают. Например, если перенумеровать подмножество индексов $J^{(j)} = \{i_1^j, ..., i_m^j\}$, то получится та же крайняя точка. Предположим, что перестановки перенумерованы так, что

$$A_0(Y) = \{J^{(j)} = (i_1^j, ..., i_n^j), j = 1, ..., J < 2^n\},$$

причем точки $X^{(j)}, j = 1, ..., J$,попарно различны.

Выигрыш нападения в любой крайней точке$X^{(j)}, j = 1, ..., J$,составляет величину

$$f(X^{(j)}, U) = \sum_{k=1}^{m} \max(0, X_{i_k}^0(1 - \frac{R_{i_k}}{X_{i_k}^0} U_{i_k})) + \max(0, Y - \sum_{k=1}^{m} X_{i_k}^0 - R_{i_{m+1}} U_{i_{m+1}}). \quad (8)$$

Рассмотрим стратегию обороны, состоящую в том, что она выравнивает величины $1 - R_i U_i / X_i^0$. Для этого нужно положить

$$U_i = \frac{X_i^0}{R_i} \cdot \frac{V}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^0 / R_i}, i = 1, ..., n.$$

При этом выигрыш нападения в любой крайней $X^{(j)}$ точке составит

$$f(X^{(j)}, U) = \sum_{k=1}^{m} \max(0, X_{i_k}^0(1 - \frac{V}{\sum_{i=1}^{n} X_i^0/R_i})) + \max(0, Y - \sum_{k=1}^{m} X_{i_k}^0 - X_{i_{m+1}}^0 \frac{V}{\sum_{i=1}^{n} X_i^0/R_i}) =$$
$$= \max(0, 1 - \frac{V}{\sum_{i=1}^{n} X_i^0/R_i}) \sum_{k=1}^{m} X_{i_k}^0 + (Y - \sum_{k=1}^{m} X_{i_k}^0) \max(0, 1 - \frac{X_{i_{m+1}}^0}{(X - \sum_{k=1}^{m} X_{i_k}^0)} \frac{V}{\sum_{i=1}^{n} X_i^0/R_i}) \leq$$
$$\leq Y \max(0, 1 - \frac{U}{\sum_{i=1}^{n} X_i^0/R_i}).$$

Поскольку правая часть неравенства не зависит от стратегии нападения, то оно справедливо и для наилучшего гарантированного результата (НГР) защиты, откуда следует неравенство

$$\bar{v} \leq \max\left(0, Y - \frac{VX}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^0 / R_i}\right). \quad (9)$$

В частности, при $X_i^0 = X$, что соответствует отсутствию ограничений по пропускной способности, получим

$$\bar{v} \leq \max\left(0, Y - \frac{V}{\sum\limits_{i=1}^{n} 1/R_i}\right),$$

причем правая часть совпадает с левой, что показывает, что получена точная оценка НГР обороны, совпадающего с ценой игры. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *НГР обороны удовлетворяет точному неравенству (9).*

Замечание 2. В частности, при $R_i = R, X_i^0 = X^0, k = Y/X^0$, получим точную оценку

$$\bar{v} \le \max(0, Y - R\frac{k}{n}U), \tag{10}$$

из которой виден физический смысл решения. Потенциал обороны увеличивается пропорционально минимальному количеству направлений k, которые нужно задействовать для прохождения всех сил нападения.

Займемся исследованием этой игры в чистых и смешанных стратегиях, следуя схеме [14].

2. Исследование односторонне неоднородной игровой модели

2.1 Минимаксная стратегия обороны

Из равенства (4) с учетом принятых обозначений вытекает, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *НГР обороны, совпадающий с ценой игры, определяется формулой*

$$\bar{v} = \mathop{min}_{U \in B(V)} \mathop{max}_{j=1,\dots,J} f\left(X^{(j)}, U\right). \tag{11}$$

2.2 Смешанная стратегия нападения

Рассмотрим смешанную стратегию вида, заданную вероятностной мерой вида:

$$\phi_0 = \sum_{j=1}^{J} p_j^0 I_{X^{(j)}}, \sum_{j=1}^{J} p_j^0 = 1, p_j^0 \ge 0, j = 1, 2, ..., J,$$

где $I_{X^{(j)}}$– вероятностная мера, сосредоточенная в точке $X^{(i)}$. Чтобы стратегия, отождествляемая с вероятностной мерой ϕ_0 являлась оптимальной, достаточно проверить неравенство $f(\phi_0, U) = \sum_{j=1}^{J} p_j^0 f(X^{(j)}, U) \ge v = \bar{v}$ для любого $U \in B$, поскольку второе неравенство, определяющее седловую точку, вытекает из того, что оптимальной является минимаксная стратегия U^*:

$$f(X, U^*) \le \max_{X \in A_0} f(X, U^*) = \min_{U \in B} \max_{X \in A_0} F(X, U) = \bar{v} = v.$$

Лемма 3. *Для того чтобы стратегия ϕ_0 была оптимальной смешанной стратегией нападения достаточно, чтобы*

$$\begin{aligned} &p^0 \in Arg \max_{p \in \Lambda_J} \min_{U \in B(V)} \sum_{j=1}^{J} p_i f\left(X^{(j)}, U\right); \\ &\Lambda_J = \left\{ p = (p_1, ..., p_J) \in E^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{J} p_j \le 1, p_j \ge 0 \right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство. Справедлива цепочка равенств и неравенств:

$$f(\phi_0, U) = \int\limits_{A_0} f(X, U) d\phi_0(x) = \sum_{j=1}^{J} p_j^0 f(X^{(j)}, U).$$

Поскольку билинейная функция $W(p, U) = \sum\limits_{j=1}^{J} p_i f\left(X^{(j)}, U\right)$ под знаком минимума имеет седловую точку, то справедлива цепочка равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} & W(p^0, U) \geq \min_{U \in B(V)} W(p^0, U) = \max_{p \in \Lambda_J} \min_{U \in B(V)} W(p, U) = \\ & = \min_{U \in B(V)} \max_{p \in \Lambda_J} W(p, U) = \min_{U \in B(V)} \max_{j=1,2,\ldots,J} f\left(X^{(j)}, U\right) = \bar{v}, \end{aligned}$$

любого $U \in B(V)$, откуда и следует оптимальность ϕ_0.

Лемма доказана. □

3. Численные методы решения задачи определения оптимальных стратегий сторон

Вернемся теперь к задаче (11). Для построения численного метода решения задачи (11) нам потребуются субдифференциальные свойства функций $f\left(X^{(j)}, U\right)$, определенных равенствами (8):

$$f(X^{(j)}, U) = \sum_{k=1}^{m} \max(0, X_{i_k}^0 - R_{i_k} U_{i_k})) + \max(0, Y - \sum_{k=1}^{m} X_{i_k}^0 - R_{i_{m+1}} U_{i_{m+1}}).$$

Лемма 4. *Субдифференциал $\partial_U C_i(X_i, U_i)$ выпуклой функции $C_i(X_i, U_i) = \max(0, X_i - R_i U_i)$ дается формулой*

$$\partial_U C_i(X_i, U_i) = \begin{cases} \bar{0}, X_i - R_i U_i < 0, \\ conv\left\{\bar{0} \cup -R_i \bar{e}_i\right\}, X_i - R_i U_i = 0, \\ -R_i \bar{e}_i, X_i - R_i U_i > 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $\bar{0} = (0, ..., 0)' \in E_n, \bar{e}_i = (0, .., 0, 1_i, 0, ...0)' \in E_n$ (единица на i-м месте), штрих – знак транспонирования.

Доказательство следует из формулы для субдифференциала функции максимума из [15].

Имея субдифференциалы $\partial_U C_i(X_i, U_i)$, получим субдифференциал $\partial_U f(X^{(j)}, U)$ из формулы для субдифференциала функции суммы из [19]

$$\partial_U f(X^{(j)}, U) = \sum_{k=1}^{m} \partial_U C_{i_k}(X_{i_k}^0, U_{i_k}) + \partial_U C_{i_{m+1}}(Y - \sum_{k=1}^{m} X_{i_k}^0, U_{i_{m+1}}).$$

Введем функцию внутреннего максимума в (11):

$$F(U) = F^{(j)}(U) = \max_{j=1,\ldots,J} f\left(X^{(j)}, U\right).$$

Лемма 5. *Субдифференциал $\partial F(U)$ выпуклой функции $F(U)$ определяется по формуле*

$$\partial F(U) = conv\left\{\bar{g}_j \in \partial_U f\left(X^{(j)}, U\right), j \in \tilde{J}(U)\right\}, \tag{14}$$

где

$$\tilde{J}(U) = Arg \max_{j=1,...,J} f\left(X^{(j)}, U\right).$$

Это следует из формулы для субдифференциала функции максимума в [15].

Полученная формула позволяет решить минимаксную задачу (11) определения минимаксной стратегии обороны методом субградиентного спуска. Введем функцию в ограничении $U \in \mathrm{B}(V)$:

$$G(U) = -V + \sum_{i=1}^{n} U_i.$$

Функция $G(V)$ будет линейной, и ее градиент $\nabla G(U) = (1, ..., 1) \in E_n$. Для решения задачи выпуклого программирования (11) можно теперь воспользоваться комбинированным методом субградиентного спуска и проекции субградиентов (см.[16], с.259) с программным шагом:

$$U_i(s+1) = \begin{cases} P(U_i(s) - h_s \nu_{sk}), G(U(s)) \leq 0; \\ P(U_i(s) - h_s); G(V(s)) > 0; \end{cases} \tag{15}$$
$$i = 1, ..., n, s = 1, 2, ...$$

где s–номер шага; $h_s = Ds^{-\alpha}$ – программный шаг метода, $0 < \alpha \leq 1$ – параметр, например $\alpha = 1$; D – характерный размер множества $\mathrm{B}(W)$ допустимых решений задачи, например оценка диаметра $D = \sqrt{n}V$; $\nu_s \in \partial F(U(s))$ – любое,

$$P(U_i) = \begin{cases} 0, U_i \leq 0, \\ U_i, 0 < U_i \leq V, \\ V, U_i > V, \end{cases}$$

– оператор проектирования на отрезок $[0, V]$.

Очевидно, что множество $\mathrm{B}(W)$ допустимых решений задачи выпуклого программирования (11) имеет внутренние точки, тогда в силу теоремы 7 в работе ([16], с.259), справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 1. *Все предельные точки последовательности $U(s)$ в методе (15) являются решениями задачи (11).*

Замечание 3. Метод (15) выдерживает случай, когда ограничения защиты (2) задаются также как нападения (3), т.е. содержат ограничения на компоненты. Правда при этом оценка (9), вообще говоря, уже не имеет места.

4. Смешанная стратегия нападения

Аналогично предыдущему пункту, можно сконструировать субградиентный метод и для нахождения оптимальной смешанной стратегии нападения в результате решения задачи (14). Введем функцию внутреннего минимума в (14):

$$M(p) = \min_{U \in B(V)} \sum_{j=1}^{J} p_i f\left(X^{(j)}, U\right). \tag{16}$$

Функция минимума $M(p)$ с распадающимися переменными будет вогнутой и ее субдифференциал $\partial M(p)$ получается с использованием формулы для субдифференциала функции максимума из. [15]:

$$\partial M(p) = conv\left\{(f\left(X^{(j)}, U\right), j = 1, ..., J)', U \in \tilde{B}(V, p)\right\}, \tag{17}$$

где

$$\tilde{B}(V, p) = \min_{U \in B(V)} \sum_{j=1}^{J} p_i f\left(X^{(j)}, U\right), \tag{18}$$

что позволяет решить максиминную задачу (12) определения p^0 методом субградиентного спуска. Введем агрегированную функцию в ограничении $p \in \Lambda_J$:

$$D(p) = -1 + \sum_{j=1}^{J} p_j.$$

Имея субградиенты функции внутреннего максимума (17) для решения задачи выпуклого программирования (12), можно теперь воспользоваться комбинированным методом субградиентного спуска и проекции субградиентов (см.[16], с.259) с программным шагом:

$$\begin{array}{l} p_j(s+1) = \left\{ \begin{array}{l} P(p_j(s) - h_s \nu_{si}), D(p(s)) \le 0; \\ P(p_j(s) - h_s); D(V(s)) > 0; \end{array} \right. \\ j = 1, ..., J, s = 1, 2, ... \end{array} \tag{19}$$

где s – номер шага; $h_s = K s^{-\alpha}$ – программный шаг метода, $0 < \alpha \le 1$ – параметр, например $\alpha = 1$; K – характерный размер множества Λ_J допустимых решений задачи, например оценка диаметра $\sqrt{J}$; $\nu_s \in \partial M(p(s))$ – любой субградиент,

$$P(p_j) = \left\{ \begin{array}{l} 0, p_i \le 0, \\ p_j, 0 < p_j \le 1, \\ 1, p_j > 1, \end{array} \right.$$

– оператор проектирования на отрезок $[0, 1]$.

Очевидно, что множество Λ_J допустимых решений задачи выпуклого программирования (12) имеет внутренние точки, тогда в силу теоремы 7 в работе ([16], с.259) справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 2. *Все предельные точки последовательности $p(s)$ в методе (19) являются решениями задачи (12).*

Замечание 4. Для определения любого решения $V(s) \in \tilde{M}(p(s))$ в выпуклой задаче минимизации (16) на каждом шаге также можно воспользоваться методом субградиентного спуска.

Введем внутреннюю функцию в задаче (16)

$$N(p, U) = \sum_{j=1}^{J} p_i f\left(X^{(j)}, U\right).$$

Имея субдифференциал $\partial_U f\left(X^{(j)},U\right)$ выпуклой функции $f\left(X^{(j)},U\right)$, можно вычислить субдифференциал $\partial_V N(p,U)$ с использованием формулы для субдифференциала суммы из [15]:

$$\partial_U N(p,U)=\sum_{j=1}^{J} p_i \partial_U f\left(X^{(j)},U\right), \tag{20}$$

что позволяет решить задачу нахождения любого решения $U\in\tilde{M}(p)$ в выпуклой задаче минимизации (16) методом субградиентного спуска.

Воспользуемся ранее введенной агрегированной функцией $G(V)$ в ограничении $U\in \mathrm{B}(V)$. Имея градиент $\nabla G(U)=(1,...,1)\in E_n$ функции $G(V)$ для решения задачи определения любого решения $U\in\tilde{M}(p)$ в выпуклой задаче минимизации (16), можно теперь воспользоваться комбинированным методом субградиентного спуска и проекции субградиентов (см.[16], с.259) с программным шагом:

$$\begin{array}{l} U_k(s+1)=\left\{\begin{array}{l} P(U_k(s)-h_s\nu_{sk}), G(V(s))\le 0;\\ P(U_k(s)-h_s); G(V(s))>0; \end{array}\right.\\ k=1,...,n, s=1,2,... \end{array} \tag{21}$$

где s – номер шага; $h_s=Ds^{-\alpha}$ – программный шаг метода, $0<\alpha<1$ – параметр, например $\alpha=1/2$; D – характерный размер множества $\mathrm{B}(W)$ допустимых решений задачи, например оценка диаметра $\sqrt{n}V$; $\nu_s\in\partial N(p,U(s))$ – любые субградиенты, $P(.)$ – оператор проектирования на отрезок $[0,V]$.

Тогда в силу теоремы 7 в работе ([16], с.259) все предельные точки последовательности $V(s)$ в методе (21) принадлежат множеству (18).

Заключение

В настоящей работе поставлена и исследована игра Гермейера «нападение-оборона» с ограничениями на пропускную способность пунктов (направлений). Такие игры возникают при аппроксимации непрерывных игр. Ограничения по пропускной способности в непрерывных играх возникают, чтобы избежать вырожденных решений типа функции. Для таких ограничений получена точная оценка значения игры. Предложены численные методы для нахождения оптимальных стратегий сторон соответственно в смешанных и чистых стратегиях. Все результаты работы строго обоснованы математически и могут быть использованы в приложениях игры «нападение-оборона» в моделях вооруженных конфликтов на этапе выработки замысла лицом ответственным за принятие решений.

Список литературы

[1] Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Простейшая модель системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 3(30). С. 83–95.

[2] Перевозчиков А.Г., Лесик И.А., Яночкин И.Е. Модель массового обслуживания для системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 65–83.

[3] Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.И. Ломоносова. Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2015. С. 80–96.

[4] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Мир, 1971.

[5] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

[6] Огарышев В.Ф. Смешанные стратегии в одном обобщении задачи Гросса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. Т. 13, № 1. С. 59–70.

[7] Молодцов Д.А. Модель Гросса в случае непротивоположных интересов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 309–320.

[8] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / под ред. Е.В. Золотова. М.: Радио и связь, 1974.

[9] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и теория игр / под ред. Е.В. Золотова. М.: Радио и связь, 1983.

[10] Данильченко Т.Н., Масевич К.К. Многошаговая игра двух лиц при «осторожном» втором игроке и последовательной передаче информации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 19, № 5. С. 1323–1327.

[11] Крутов Б.П. Динамические квазиинформационные расширения игр с расширяемой коалиционной структурой. М.: ВЦ РАН, 1986.

[12] Завриев С.К., Перевозчиков А.Г. Стохастический конечно-разностный алгоритм минимизации функции максимина // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 30, № 4. С. 629–633.

[13] Минченко Л.И. Дифференциальные свойства функции максимума при связанных ограничениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24, № 2. С. 210–217.

[14] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.

[15] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

[16] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

[17] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.A. A Model of Overpowering a Multilevel Defense System by Attack // Computational Mathematics and Modeling. 2016. Vol. 27, № 2. Pp. 254–269.

[18] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.A. Multi-Level Defense System Models: Overcoming by Means of Attacks with Several Phase Constraints // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2017. Vol. 1, № 1. Pp. 25–31.

[19] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E. A discrete multilevel attack-defense model with nonhomogeneous opponent resources // Computational Mathematics and Modeling. 2018. Vol. 29, № 2. Pp. 134–145.

[20] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E. An Attack-Defense Model with Inhomogeneous Resources of the Opponents // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2018. Vol. 58, № 1. Pp. 38–47.

[21] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E. Multilayered Attack-Defense Model on Networks // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59, № 8. Pp. 1389–1397.

[22] Hohzaki R., Tanaka V. The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network // Abstract of 27th European conference on Operation Research, EURO2015. University of Strathclyde, 2015.

[23] Perevozchikov A.G., Reshetov V.Y., Yanochkin I.E. Multi-Step Game of Reserves Management in the Attack-Defense Model // Science Journal of Applied Mathematics and Statistics. 2019. Vol. 7, № 5. Pp. 63–70.

[24] Perevozchikov A.G., Reshetov V.Y., Yanochkin I.E. Symmetrization of the Classical “Attak-Defense” Model // Science Journal of Applied Mathematics and Statistics. 2020. Vol. 8, № 1. Pp. 1–10.

Образец цитирования

Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Лесик А.И. Игра «нападение-оборона» с ограничениями на пропускную способность пунктов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 3. С. 78–92. https://doi.org/10.26456/vtpmk600

Сведения об авторах

1. **Перевозчиков Александр Геннадьевич**
старший научный сотрудник отдела проектирования Центра моделирования сложных систем НПО «РусБИТех».

Россия, 170001, г. Тверь, пр. Калинина, д. 17, НПО «РусБИТех».
E-mail: pere501@yandex.ru

2. **Решетов Валерий Юрьевич**
доцент кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, МГУ, факультет ВМК. E-mail: kadry@cs.msu.ru

3. **Лесик Александра Ильинична**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: lesik56@mail.ru

THE "ATTACK-DEFENSE" GAME WITH RESTRICTIONS ON THE INTAKE CAPACITY OF POINTS

Perevozchikov Aleksandr Gennadyevich
Senior Researcher in the Design Department of Complex Systems Modeling Center, NPO "RusBITTech"
Russia, 170001, Tver, 17 Kalinina str., NPO "RusBITTech".
E-mail: pere501@yandex.ru

Reshetov Valerii Yurievich
Associate Professor in the Department of Operations Research, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1 Leninskie gory, building 1, MSU, CMC.
E-mail: kadry@cs.msu.ru

Lesik Aleksandra Ilyinichna
Associate Professor in the Department of Mathematical Statistics and Systems Analysis, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.
E-mail: lesik56@mail.ru

Received 01.07.2020, revised 25.09.2020.

The work generalizes the Germeier's "attack-defense" game in terms of accounting for the intake capacity of points and is based on his generalized equalization principle, which leads to convex minimax problems that can be solved by subgradient descent in the case of homogeneity of the parties' resources. The classical Germeier's "attack-defense" model is a modification of the Gross' model. The game model that generalizes Gross' model and Germeier's model was studied by Ogaryshev. Molodtsov studied the Gross's model with nonantagonistic interests of the parties; Danilchenko, Masevich and Krutova studied the dynamic extensions of the model. In the military models the points are usually interpreted as directions and characterize the spatial distribution of defense resources by width. However, there are also actual restrictions on the intake capacity of points. This leads, in the case of homogeneous resources, to minimax problems for determining the best guaranteed defense result (BGDR). An accurate upper estimate for the best guaranteed defense result was obtained, which shows the potential defense capabilities taking into account the intake capacity of points.

Keywords: Gross' model, Germeier's model, generalized equalization principle, restrictions on the intake capacity of points, best guaranteed defense result, minimax defense strategy, mixed attack strategy.

Citation

Perevozchikov A.G., Reshetov V.Yu., Lesik A.I., "The "attack-defense" game with restrictions on the intake capacity of points", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya*

Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2020, № 3, 78–92(in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk600

References

[1] Perevozchikov A.G., Lesik I.A., "On a simplest model of the echeloned air defense system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2013, № 3(30), 83–95 (in Russian).

[2] Perevozchikov A.G., Lesik I.A., Yanochkin I.E., "Model of the echeloned Air Defense queuing system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2015, № 4, 65–83 (in Russian).

[3] Reshetov V.Yu., Perevozchikov A.G., Lesik I.A., "Model for overcoming a multilevel defense system by attack", *Prikladnaya matematika i informatika: Trudy fakulteta VMK MGU imeni M.I. Lomonosova*, ed. V.I. Dmitriev, MAX Press Publ., Moscow, 2015, 80–96 (in Russian).

[4] Germejer Yu.B., *Vvedenie v Teoriyu Issledovaniya Operatsii [Introduction to the Theory of Operations Research]*, Mir Publ., Moscow, 1971 (in Russian).

[5] Karlin S., *Matematicheskie Metody v Teorii Igr, Programmirovanii i Ekonomike [Mathematical Methods in the Theory of Games, Programming and Economics]*, Mir Publ., Moscow, 1964 (in Russian).

[6] Ogaryshev V.F., "Mixed strategies in one generalization of the gross problem", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **13**:1 (1973), 59–70 (in Russian).

[7] Molodtsov D.A., "The gross model in the case of non-conflicting interests", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **12**:2 (1972), 309–320 (in Russian).

[8] Berzin E.A., *Optimal'noe Raspredelenie Resursov i Elementy Sinteza Sistem [Optimal Resource Allocation and Elements of System Synthesis]*, ed. E.V. Zolotov, Radio i Svyaz Publ., Moscow, 1974 (in Russian).

[9] Berzin E.A., *Optimal'noe Raspredelenie Resursov i Teoriya Igr [Optimal Resource Allocation and Game Theory]*, ed. E.V. Zolotov, Radio i Svyaz Publ., Moscow, 1983 (in Russian).

[10] Danilchenko T.N., Masevich K.K., "Multi-step game of two persons with a "careful" second player and sequential transmission of information", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **19**:5 (1974), 1323–1327 (in Russian).

[11] Krutov B.P., *Dinamicheskie kvaziinformatsionnye rasshireniya igr s rasshiryaemoj koalitsionnoj strukturoj [Dynamic quasi-informational extensions of games with an expandable coalition structure]*, CC RAS Publ., Moscow, 1986 (in Russian).

[12] Zavriev S.K., Perevozchikov A.G., "Stochastic finite-difference algorithm for minimizing the Maximin function", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **30**:4 (1991), 629–633 (in Russian).

[13] Minchenko L.I., "Differential properties of the maximum function under bound constraints", *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **24**:2 (1984), 210–217 (in Russian).

[14] Vasin A.A., Morozov V.V., *Teoriya Igr i Modeli Matematicheskoi Ekonomiki [Game Theory and Models of Mathematical Economics]*, MAX Press Publ., Moscow, 2005 (in Russian).

[15] Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V.V., *Kurs Metodov Optimizatsii [Course of Optimization Methods]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian).

[16] Polyak B.T., *Vvedenie v Optimizatsiyu [Introduction to Optimization]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian).

[17] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.A., "A Model of Overpowering a Multilevel Defense System by Attack", *Computational Mathematics and Modeling*, **27**:2 (2016), 254–269.

[18] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.A., "Multi-Level Defense System Models: Overcoming by Means of Attacks with Several Phase Constraints", *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **1**:1 (2017), 25–31.

[19] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E., "A discrete multilevel attack-defense model with nonhomogeneous opponent resources", *Computational Mathematics and Modeling*, **29**:2 (2018), 134–145.

[20] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E., "An Attack-Defense Model with Inhomogeneous Resources of the Opponents", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **58**:1 (2018), 38–47.

[21] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E., "Multilayered Attack-Defense Model on Networks", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **59**:8 (2019), 1389–1397.

[22] Hohzaki R., Tanaka V., "The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network", *Abstract of 27th European conference on Operation Research*, EURO2015, University of Strathclyde, 2015.

[23] Perevozchikov A.G., Reshetov V.Y., Yanochkin I.E., "Multi-Step Game of Reserves Management in the Attack-Defense Model", *Science Journal of Applied Mathematics and Statistics*, **7**:5 (2019), 63–70.

[24] Perevozchikov A.G., Reshetov V.Y., Yanochkin I.E., "Symmetrization of the Classical "Attak-Defense" Model", *Science Journal of Applied Mathematics and Statistics*, **8**:1 (2020), 1–10 (in Russian).