УДК 513.88

# О СИЛЬНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $l_\infty^9$

**Мартынов О.М.**
Военная академия воздушно-космической обороны имени Маршала Советского Союза Г.К. Жукова, г. Тверь

*Поступила в редакцию 30.09.2020, после переработки 23.10.2020.*

В работе рассматриваются минимальные проекции пространства $l_\infty^9$ на некоторые подпространства коразмерности 3. Для них найдены относительные прекционные константы, а в случае минимальной проекции с единичной нормой найдено максимальной значение константы сильной единственности. Найденые проекционные константы могут найти применение в вычислительной математике, в частности, для оценки сходимости проекционных методов решения операторных уравнений и в оценках ошибки алгоритма Ремеза.

**Ключевые слова:** пространство, подпространство, оператор проектирования (проекция), относительная проекционная константа, константа сильной единственности.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 4. С. 28–42.*
https://doi.org/10.26456/vtpmk603

## 1. Введение

Пусть $Y$ – замкнутое подпространство банахова пространства $X$.

**Определение 1.** *Линейный ограниченный оператор $\pi : X \to Y$ называется оператором проектирования (проекцией) пространства $X$ на $Y$, если $\pi y = y$ для любого $y \in Y$.*

Множество всех операторов проектирования пространства $X$ на подпространство $Y$ будем обозначать через $\pi(X, Y)$.

**Определение 2.** *Относительной проекционной константой подпространства $Y$ в пространстве $X$ называется число $\lambda(Y, X) = \inf\{\|\pi\|, \pi \in \pi(X, Y)\}$.*

Среди операторов проектирования особый интерес представляют те, для которых выполняется равенство $\|\pi\| = \lambda(Y, X)$. Такие проекции, если они существуют, называются *минимальными.*

Множество минимальных проекций из $X$ на $Y$ будем обозначать $\Delta(X, Y)$.

**Определение 3.** *Если множество $\Delta(X, Y)$ состоит ровно из одного элемента, то говорят, что пара $(X, Y)$ обладает свойством единственности.*

Условия единственности для некоторых минимальных проекций в пространствах $l_\infty^n$ и $l_1^n$ можно найти, например, в [1], [5], [9], [17] и [20].

Пусть $Y_6$ есть 6-мерное подпространство пространства $X = l_\infty^9$, 9-мерного линейного нормированного пространства элементов $x = (x_i)_1^9$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 9} |x_i|.$$

**Предложение 1.** [1] *Любой оператор проектирования* $\pi : l_\infty^9 \to Y_6$ *имеет вид* $\pi_\alpha$, *где*

$$\pi_\alpha x = x - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i f_i(x),$$

$\alpha_i = (\alpha_{ij})_{j=1}^9$ – *элементы пространства* $l_\infty^9$, *а* $f_i = (f_{ij})_{j=1}^9 \neq 0$ – *линейные функционалы, определенные в* $l_\infty^9$, *причем*

$$f_i(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{9} \alpha_{jk} f_{ik} = \delta_{ij} \ (i,j = 1,2,3). \tag{1.1}$$

Гиперплоскости пространства $l_\infty^9$ имеют вид

$$f_i^{-1}(0) = \left\{ x \in l_\infty^9 \mid f_i(x) = \sum_{k=1}^{9} f_{ik} x_k = 0 \right\} \ (i = 1,2,3),$$

и в силу линейной независимости функционалов $f_i$ $(i = 1,2,3)$ , которая следует из формул (1.1), пространство $Y_6 = \cap_{i=1}^3 f_i^{-1}(0)$ является подпространством пространства $l_\infty^9$ коразмерности 3.

**Определение 4.** *Оператор проектирования* $\pi_0 \in \Delta(l_\infty^9, Y_6)$ *называется сильно единственным, если для любого* $\pi \in \pi(l_\infty^9, Y_6)$ *справедливо неравенство*

$$\|\pi_0\| + k \cdot \|\pi - \pi_0\| \leqslant \|\pi\| \tag{1.2}$$

*где* $k$ *не зависит от* $\pi$ *и* $k \in (0;1]$.

Число $k$ называется константой сильной единственности, а через $k_0$ обозначается максимальное значение $k$, при котором выполняется неравенство (1.2).

Очевидно, что сильно единственный оператор $\pi_0$ имеет минимальную норму, а пара $(l_\infty^9, Y_6)$ обладает свойством единственности.

**Предложение 2.** [1] *Нормы операторов* $\pi$ *и* $\pi - \pi_0$ *вычисляются по формулам*

$$\|\pi\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 9} T_i, \|\pi - \pi_0\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 9} B_i,$$

*где*

$$T_i = \sum_{j=1}^{9} \left| \delta_{ij} - \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ki} f_{kj} \right|, B_i = \sum_{j=1}^{9} \left| \sum_{k=1}^{3} \left( \alpha_{ki} - \alpha_{ki}^{(0)} \right) f_{kj} \right|,$$

*а оператор* $\pi_0$ *имеет вид* $\pi_\alpha^{(0)}$, *где*

$$\pi_\alpha^{(0)} x = x - \sum_{k=1}^{3} \alpha_k^{(0)} f_k(x).$$

**Определение 5.** *Абсолютной проекционной константой порядков $k, n$ называется число*

$$\lambda(k,n) = \sup\{\lambda(Y_k, X_n) : Y_k \subset X_n\},$$

*где $X_n$ и $Y_k$ – любые пространства размерности $n$ и их подпространства размерности $k$ сответственно, $k, n \in \mathbb{N}, k < n$.*

Как отмечено в [16], теория аппроксимации является как «заказчиком», так и «поставщиком» новых идей при изучении минимальных проекций и проекционных констант. В частности, с теорией аппроксимации связано появление понятия сильной единственности, введенное Ньюменом и Шапиро в 1963-64 годах ( [14], [15]).

Напомним, что элемент $v_0 \in V \subset Z$ называется сильно единственным элементом наилучшего приближения к $z \in Z$, если существует вещественное число $k > 0$ такое, что для любого $v \in V$ справедливо неравенство

$$\|z - v_0\| + k \cdot \|v - v_0\| \leqslant \|z - v\|.$$

Если в этом определении положить $Z = \pi(l^9_\infty, Y_6), z = 0, v = \pi$ и $v_0 = \pi_0$, то придем к определению 4.

Вычисление проекционных констант (или их оценок) находит применение в вычислительной математике. В частности, для оценки сходимости проекционных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений удобно использовать абсолютные проекционные константы $\lambda(k,n)$ или их оценки. Известно [20], что суть проекционных методов состоит в следующем. Пусть $X$ – бесконечномерное банахово пространство, $Y$ – другое банахово пространство. Пусть $A$ – линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор с областью определения $D(A) \subset X$ и областью значений $Im(A) \subset Y$. Пусть также заданы две последовательности подпространств $(X_n)$ и $(Y_n) : X_n \subset D(A), Y_n \subset Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и последовательность операторов проектирования: $(\pi_n) : Y \to Y_n, \pi_n(Y) = Y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть дано линейное уравнение $Ax = y$ (здесь $x \in D(A), y \in Im(A)$). Заменим это уравнение приближенным: $\pi_n(Ax_n - y) = 0$, где $x_n \in X_n$. Отыскание последовательности $(x_n)$ и выяснение ее сходимости и составляет суть проекционных методов.

К числу проекционных методов относят, например, метод Петрова-Галеркина, метод Ритца, а также метод конечных элементов. Последний можно рассматривать как синтез методов Петрова-Галеркина и конечных разностей. Весьма упрощенно можно сказать, что метод конечных элементов это проекционный метод со специальными координатными функциями, заменяющими базис $(e_i)_1^\infty$.

Константы сильной единственности нашли широкое применение в оценках ошибки алгоритма Ремеза [18].

При изучении минимальных проекций ставятся две проблемы: 1) вопрос о существовании таких проекций; 2) вопрос об их единственности.

Для конечномерного пространства $X$ актуальной является как проблема единственности минимальной проекции, так и определения точных значений $\lambda(Y, X)$ или их оценок сверху или снизу.

Для $\lambda(k, n)$ известны следующие точные значения:

– $\lambda(1, n) = 1$ [20],

– $\lambda(n-1, n) = \frac{2(n-1)}{n}$ [2],

– $\lambda(3,5) = \frac{5+4\sqrt{2}}{7}$ [3].

Известны [4] оценки для $\lambda(k,n)$ сверху, а именно

$$\lambda(k,n) \leqslant \varphi(k,n) = \frac{k+\sqrt{k(n-1)(n-k)}}{n}.$$

Что касается оценок снизу, то они известны лишь для частных случаев и получены, в основном, с помощью относительных проекционных констант. При этом точность полученных оценок можно определить с помощью неравенств

$$\lambda(Y_{n-k}, l_\infty^n) \leqslant \lambda(n-k,n) \leqslant \varphi(n-k,n), \lambda(Y_{n-k}, l_1^n) \leqslant \lambda(n-k,n) \leqslant \varphi(n-k,n).$$

В работах [1], [5] определены относительные проекционные константы гиперплоскостей в пространствах $l_1, l_1^n, l_\infty, l_\infty^n$. В работе Локтя [7] были получены оценки снизу для $\lambda(n-2,n)$ и $\lambda(n-3,n)$. Для получения этих оценок были найдены относительные проекционные константы $\lambda(Y_{n-2}, l_1^n), \lambda(Y_{n-2}, l_\infty^n), \lambda(Y_{n-3}, l_1^n)$ для некоторых классов подпространств. Дальнейшее развитие этих результатов для оценок снизу констант $\lambda(n-4,n)$ и $\lambda(n-5,n)$ можно найти в [9].

С проблемой единственности тесно связана проблема сильной единственности минимальных проекций.

В [5] Левицким было найдено максимальное значение константы сильной единственности операторов проектирования с единичной нормой на гиперплоскость в пространствах $l_\infty^n$ и $l_1^n$. Там же получены некоторые оценки констант сильной единственности операторов проектирования с нормой, большей единицы, опять же для случая гиперплоскости. Локтем [8] получено максимальное значение константы сильной единственности оператора проектирования с неединичной нормой на гиперплоскость в пространстве $l_\infty^n$. В работах [10], [11] найдены максимальные значения констант сильной единственности проекций на подпространства коразмерности 2 и 3 пространства $l_\infty^4$. Позднее результат работы [11] был обобщен для пространств размерности $n \geqslant 3$ [19], а дальнейшее продвижение было получено в [6]. Также, в [12], [13] были найдены константы сильной единственности для операторов проектирования с единичной нормой на некоторые подпространства коразмерности 2 в пространстве $l_\infty^{2n}$.

Найдем проекционные константы для операторов проектирования пространства $l_\infty^9$ на некоторый класс подпространств коразмерности 3.

## 2. Относительные проекционные константы

Функционалы $f_i$ $(i=1,2,3)$ зададим следующим образом:

$$f_i = (f_{ij})_{j=1}^9, \text{ где } f_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } j=i, j=i+6; \\ r, \text{ если } j=i+3; \\ 0, \text{ если } j\neq i, j\neq i+3, j\neq i+6. \end{cases} \tag{2.1}$$

где $r>0$. В этом случае, если $Y_6 = \cap_{i=1}^3 f_i^{-1}(0)$, то для проекций $\pi_\alpha \in \pi(l_\infty^9, Y_6)$ соотношения (1.1) примут вид

$$f_i(\alpha_j) = \alpha_{ji} + r\alpha_{ji+3} + \alpha_{ji+6} = \delta_{ij} \ (i,j=1,2,3). \tag{2.2}$$

**Теорема 1.** *Пусть* $\pi_\alpha^{(0)}$ *– минимальный оператор проектирования пространства* $l_\infty^9$ *на подпространство* $Y_6$*, определяемое функционалами (2.1). Тогда*

$$(1)\ \lambda(Y_6, l_\infty^9) = \|\pi_\alpha^{(0)}\| = 1,\ \text{если } r \geqslant 2;$$

$$(2)\ \lambda(Y_6, l_\infty^9) = \|\pi_\alpha^{(0)}\| = \frac{4}{r^2 - 2r + 4},\ \text{если } 0 < r < 2.$$

*Доказательство.* Найдем значения $T_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{9} |\delta_{ij} - \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ki}^{(0)} f_{kj}|$ $(i = 1, \cdots, 9)$. Имеем

$$T_1^{(0)} = \sum_{j=1}^{9} \left| \delta_{1j} - \sum_{k=1}^{3} \alpha_{k1}^{(0)} f_{kj} \right| = |1 - \alpha_{11}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{11}^{(0)}| + (2+r)\left(|\alpha_{21}^{(0)}| + |\alpha_{31}^{(0)}|\right),$$

$$T_2^{(0)} = |1-\alpha_{22}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{22}^{(0)}| + (2+r)\left(|\alpha_{12}^{(0)}| + |\alpha_{32}^{(0)}|\right), T_3^{(0)} = |1-\alpha_{33}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{33}^{(0)}|$$

$$+(2+r)\left(|\alpha_{13}^{(0)}| + |\alpha_{23}^{(0)}|\right), T_4^{(0)} = |1 - r\alpha_{14}^{(0)}| + 2|\alpha_{14}^{(0)}| + (2+r)\left(|\alpha_{24}^{(0)}| + |\alpha_{34}^{(0)}|\right),$$

$$T_5^{(0)} = |1 - r\alpha_{25}^{(0)}| + 2|\alpha_{25}^{(0)}| + (2+r)\left(|\alpha_{15}^{(0)}| + |\alpha_{35}^{(0)}|\right), T_6^{(0)} = |1 - r\alpha_{36}^{(0)}| + 2|\alpha_{36}^{(0)}|$$

$$+(2+r)\left(|\alpha_{16}^{(0)}| + |\alpha_{26}^{(0)}|\right), T_7^{(0)} = |1 - \alpha_{17}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{17}^{(0)}| + (2+r)\left(|\alpha_{27}^{(0)}| + |\alpha_{37}^{(0)}|\right),$$

$$T_8^{(0)} = |1-\alpha_{28}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{28}^{(0)}| + (2+r)\left(|\alpha_{18}^{(0)}| + |\alpha_{38}^{(0)}|\right), T_9^{(0)} = |1-\alpha_{39}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{39}^{(0)}|$$

$$+(2+r)\left(|\alpha_{19}^{(0)}| + |\alpha_{29}^{(0)}|\right).$$

Рассмотрим два случая.

(1) $r \geqslant 2$. В равенствах, полученных для $T_i$ $(i = 1, \cdots, 9)$, положим $\alpha_{14}^{(0)} = \alpha_{25}^{(0)} = \alpha_{36}^{(0)} = \frac{1}{r}$, все остальные $\alpha_{ij}$ пусть будут равны нулю. При этом условия (2.2) выполняются. Тогда $T_1^{(0)} = T_2^{(0)} = T_3^{(0)} = T_7^{(0)} = T_8^{(0)} = T_9^{(0)} = 1, T_4^{(0)} = T_5^{(0)} = T_6^{(0)} = \frac{2}{r} \leqslant 1$.

Следовательно,

$$\lambda(Y_6, l_\infty^9) = \|\pi_\alpha^{(0)}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 9} T_i^{(0)} = 1.$$

(2) $0 < r < 2$. Очевидно, что $\|\pi_\alpha^{(0)}\| \geqslant T_i^{(0)}$ $(i = 1, \cdots, 9)$. Оценим выражения для $T_i^{(0)}$ $(i = 1, \cdots, 9)$ снизу. Для этого воспользуемся тем, что $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ и очевидными неравенствами $|\alpha_{ij}^{(0)}| \geqslant 0$. Тогда

$$\|\pi_\alpha^{(0)}\| \geqslant T_1^{(0)} \geqslant 1 - |\alpha_{11}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{11}^{(0)}| = 1 + r|\alpha_{11}|.$$

Аналогично получим

$$\|\pi_\alpha^{(0)}\| \geqslant T_2^{(0)} \geqslant 1 + r|\alpha_{22}|, \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geqslant T_3^{(0)} \geqslant 1 + r|\alpha_{33}|, \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geqslant T_4^{(0)} \geqslant 1 + (2-r)|\alpha_{14}|,$$

$$\|\pi_\alpha^{(0)}\| \geqslant T_5^{(0)} \geqslant 1 + (2-r)|\alpha_{25}|, \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geqslant T_6^{(0)} \geqslant 1 + (2-r)|\alpha_{36}|,$$

$$\|\pi_\alpha^{(0)}\| \geqslant T_7^{(0)} \geqslant 1 + r|\alpha_{17}|, \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geqslant T_8^{(0)} \geqslant 1 + r|\alpha_{28}|, \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geqslant T_9^{(0)} \geqslant 1 + r|\alpha_{39}|.$$

Из соотношений (2.2) следует, что

$$\alpha_{14}=\frac{1}{r}\left(1-\alpha_{11}^{(0)}-\alpha_{17}^{(0)}\right),\alpha_{25}=\frac{1}{r}\left(1-\alpha_{22}^{(0)}-\alpha_{28}^{(0)}\right),\alpha_{36}=\frac{1}{r}\left(1-\alpha_{33}^{(0)}-\alpha_{39}^{(0)}\right).$$

Используя эти равенства, умножим неравенства для $T_i^{(0)}(i=4,5,6)$ на $\frac{r^2}{2-r}>0$ и сложим все неравенства для $T_i^{(0)}(i=1,\cdots,9)$ почленно. Получим

$$\left(6+\frac{3r^2}{2-r}\right)\|\pi_\alpha^{(0)}\|\geqslant 6+\frac{3r^2}{2-r}+r\left(|\alpha_{11}^{(0)}|+|\alpha_{22}^{(0)}|+|\alpha_{33}^{(0)}|+|\alpha_{17}^{(0)}|+|\alpha_{28}^{(0)}|+|\alpha_{39}^{(0)}|\right)$$

$$+r^2\left(|\alpha_{14}^{(0)}|+|\alpha_{25}^{(0)}|+|\alpha_{36}^{(0)}|\right)=6+\frac{3r^2}{2-r}+r\left(|\alpha_{11}^{(0)}|+|\alpha_{22}^{(0)}|+|\alpha_{33}^{(0)}|+|\alpha_{17}^{(0)}|+|\alpha_{28}^{(0)}|\right.$$

$$\left.+|\alpha_{39}^{(0)}|\right)+r\left(|1-\alpha_{11}^{(0)}-\alpha_{17}^{(0)}|+|1-\alpha_{22}^{(0)}-\alpha_{28}^{(0)}|+|1-\alpha_{33}^{(0)}-\alpha_{39}^{(0)}|\right)\geqslant 6+\frac{3r^2}{2-r}$$

$$+r\left(|\alpha_{11}^{(0)}|+|\alpha_{22}^{(0)}|+|\alpha_{33}^{(0)}|+|\alpha_{17}^{(0)}|+|\alpha_{28}^{(0)}|+|\alpha_{39}^{(0)}|\right)+r\left(3-|\alpha_{11}^{(0)}|-|\alpha_{17}^{(0)}|-|\alpha_{22}^{(0)}|\right.$$

$$\left.-|\alpha_{28}^{(0)}|-|\alpha_{33}^{(0)}|-|\alpha_{39}^{(0)}|\right)=6+\frac{3r^2}{2-r}+3r=\frac{12}{2-r}.$$

Таким образом,

$$\left(2+\frac{r^2}{2-r}\right)\|\pi_\alpha^{(0)}\|\geqslant\frac{4}{2-r}.$$

Следовательно,

$$\lambda(Y_6,l_\infty^9)=\|\pi_\alpha^{(0)}\|\geqslant\frac{4}{r^2-2r+4}.$$

Покажем, что эта оценка снизу точная. Для этого найдем $\alpha_i^{(0)}(i=1,2,3)$ такие, что

$$T_i^{(0)}=\frac{4}{r^2-2r+4}\ (i=1,...,9).$$

Положим

$$\alpha_{14}^{(0)}=\alpha_{25}^{(0)}=\alpha_{36}^{(0)}=\frac{r}{r^2-2r+4},$$

$$\alpha_{11}^{(0)}=\alpha_{17}^{(0)}=\alpha_{22}^{(0)}=\alpha_{28}^{(0)}=\alpha_{33}^{(0)}=\alpha_{39}^{(0)}=\frac{2-r}{r^2-2r+4}.$$

Остальные $\alpha_{ij}$ положим равными нулю. Условия (2.2) при этом выполняются.

Тогда

$$T_1^{(0)}=T_2^{(0)}=T_3^{(0)}=T_7^{(0)}=T_8^{(0)}=T_9^{(0)}=|1-\alpha_{11}^{(0)}|+(1+r)|\alpha_{11}^{(0)}|=\left|1-\frac{2-r}{r^2-2r+4}\right|$$

$$+\frac{(1+r)(2-r)}{r^2-2r+4}=\frac{r^2-r+2}{r^2-2r+4}+\frac{2+r-r^2}{r^2-2r+4}=\frac{4}{r^2-2r+4},$$

$$T_4^{(0)}=T_5^{(0)}=T_6^{(0)}=|1-r\alpha_{14}^{(0)}|+2|\alpha_{14}^{(0)}|=\left|1-\frac{r^2}{r^2-2r+4}\right|+\frac{2r}{r^2-2r+4}$$

$$=\frac{4-2r}{r^2-2r+4}+\frac{2r}{r^2-2r+4}=\frac{4}{r^2-2r+4}.$$

Таким образом,
$$\lambda(Y_6, l_\infty^9) = \|\pi_\alpha^{(0)}\| = \frac{4}{r^2 - 2r + 4}.$$

Очевидно, что $\frac{4}{r^2-2r+4} > 1$, так как это неравенство равносильно условию $0 < r < 2$.

□

Пусть теперь функционалы $f_i$ $(i = 1, 2, 3)$ имеют вид :

$$f_i = (f_{ij})_{j=1}^9, \text{ где } f_{ij} = \begin{cases} r, \text{ если } j = i, j = i + 6; \\ 1, \text{ если } j = i + 3; \\ 0, \text{ если } j \neq i, j \neq i + 3, j \neq i + 6. \end{cases} \quad (2.3)$$

где $r > 0$. Тогда справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть $\widetilde{\pi}_\alpha^{(0)}$ – минимальный оператор проектирования пространства $l_\infty^9$ на подпространство $\widetilde{Y}_6$, определяемое функционалами (2.3). Тогда*

$$(1)\ \lambda(\widetilde{Y}_6, l_\infty^9) = \|\widetilde{\pi}_\alpha^{(0)}\| = 1, \text{ если } 0 < r \leqslant \frac{1}{2};$$

$$(2)\ \lambda(\widetilde{Y}_6, l_\infty^9) = \|\widetilde{\pi}_\alpha^{(0)}\| = \frac{4r^2}{4r^2 - 2r + 1}, \text{ если } r > \frac{1}{2}.$$

*Доказательство.* Для доказательства утверждения теоремы 2 можно провести рассуждения аналогичные тем, которые были приведены при доказательстве теоремы 1. Поступим иначе. Рассмотрим функционалы $\widehat{f}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, которые определяются так:

$$\widehat{f}_i = \frac{f_i}{r} = (\widehat{f}_{ij})_{j=1}^9, \text{ где } \widehat{f}_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } j = i, j = i + 6; \\ 1/r, \text{ если } j = i + 3; \\ 0, \text{ если } j \neq i, j \neq i + 3, j \neq i + 6. \end{cases} \quad (2.4)$$

Очевидно, что подпространство $\widehat{Y}_6 = \cap_{i=1}^3 \widehat{f}_i^{-1}(0)$ совпадает с подпространством $\widetilde{Y}_6$ и при $s = 1/r$ для функционалов (2.4) справедлива теорема 1. Это значит, что

$$(1)\ \lambda(\widehat{Y}_6, l_\infty^9) = 1, \text{ если } s \geqslant 2; (2)\ \lambda(\widehat{Y}_6, l_\infty^9) = \frac{4}{s^2 - 2s + 4}, \text{ если } 0 < s < 2.$$

Заменив в полученных константах $s$ на $1/r$, получим относительные проекционные константы из условия теоремы 2. □

## 3. Константы сильной единственности

**Лемма 1.** *Значение константы сильной единствености $k$ из неравенства (1.2) для оператора проектирования $\pi_\alpha^{(0)}$, который определяется функционалами (2.1), удовлетворяет условию*
$$k \leqslant \frac{r}{r+2},$$
*если $r \geqslant 2$.*

*Доказательство.* Для получения оценки константы $k$ сверху рассмотрим оператор $\overline{\pi}x = x - \sum_{k=1}^{3} \overline{\alpha}_k f_k(x)$. Значения $\overline{\alpha}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ определим следующим образом: $0 < \overline{\alpha}_{11} \leqslant 1, \overline{\alpha}_{11} = \overline{\alpha}_{22} = \overline{\alpha}_{33} = \overline{\alpha}_{17} = \overline{\alpha}_{28} = \overline{\alpha}_{39}, \overline{\alpha}_{14} = \overline{\alpha}_{25} = \overline{\alpha}_{36} \geqslant 0$. Значения всех остальных $\alpha_{ij}$ положим равными нулю.

Вычислим нормы операторов $\overline{\pi}$ и $\overline{\pi} - \pi^{(0)}$.

Имеем

$$\|\overline{\pi}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 9} \overline{T}_i = \max_i \sum_{j=1}^{9} \left| \delta_{ij} - \sum_{k=1}^{3} \overline{\alpha}_{ki} f_{kj} \right|.$$

Найдем значения $\overline{T}_i$, учитывая, что $1 - \overline{\alpha}_{11} \geqslant 0, 1 - r\overline{\alpha}_{14} = \overline{\alpha}_{11} + \overline{\alpha}_{17} > 0$.

$$\overline{T}_1 = \overline{T}_2 = \overline{T}_3 = \overline{T}_7 = \overline{T}_8 = \overline{T}_9 = 1 - \overline{\alpha}_{11} + (1 + r)\overline{\alpha}_{11} = 1 + r\overline{\alpha}_{11} > 1,$$

$$\begin{aligned} \overline{T}_4 = \cdots = \overline{T}_5 = \overline{T}_6 &= 1 - r\overline{\alpha}_{14} + 2\overline{\alpha}_{14} = 1 - r\overline{\alpha}_2 + (1 + (n-2)r)\overline{\alpha}_2 \\ &= 1 + (2 - r)\overline{\alpha}_{14} \leqslant 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 9} \overline{T}_i = \overline{T}_1 = 1 + r\overline{\alpha}_{11}.$$

Далее

$$\|\overline{\pi} - \pi_\alpha^{(0)}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 9} \overline{B}_i = \max_{1 \leqslant i \leqslant 9} \sum_{j=1}^{9} \left| \sum_{k=1}^{3} \left( \overline{\alpha}_{ki} - \alpha_{ki}^{(0)} \right) f_{kj} \right|$$

$$= \max \left\{ \sum_{j=1}^{9} |\overline{\alpha}_{11} f_{1j}|; \sum_{j=1}^{9} |\overline{\alpha}_{22} f_{2j}|; \sum_{j=1}^{9} |\overline{\alpha}_{33} f_{3j}|; \sum_{j=1}^{9} \left| \left( \overline{\alpha}_{14} - \frac{1}{r} \right) f_{1j} \right|; \right.$$

$$\sum_{j=1}^{9} \left| \left( \overline{\alpha}_{25} - \frac{1}{r} \right) f_{2j} \right|; \sum_{j=1}^{9} \left| \left( \overline{\alpha}_{36} - \frac{1}{r} \right) f_{3j} \right|; \sum_{j=1}^{9} |\overline{\alpha}_{17} f_{1j}|; \sum_{j=1}^{9} |\overline{\alpha}_{28} f_{2j}|;$$

$$\left. \sum_{j=1}^{9} |\overline{\alpha}_{39} f_{3j}| \right\} = \max \left\{ (r+2)|\overline{\alpha}_{11}|; (r+2)|\overline{\alpha}_{22}|; (r+2)|\overline{\alpha}_{33}|; (r+2) \left| \overline{\alpha}_{14} - \frac{1}{r} \right|; \right.$$

$$\left. (r+2) \left| \overline{\alpha}_{25} - \frac{1}{r} \right|; (r+2) \left| \overline{\alpha}_{36} - \frac{1}{r} \right|; (r+2)|\overline{\alpha}_{17}|; (r+2)|\overline{\alpha}_{28}|; (r+2)|\overline{\alpha}_{39}| \right\}$$

$$= (r+2) \cdot \max \left\{ |\overline{\alpha}_{11}|; \left| \overline{\alpha}_{14} - \frac{1}{r} \right| \right\} = (r+2) \cdot \max \left\{ |\overline{\alpha}_{11}|; \frac{1}{r} |1 - r\overline{\alpha}_{14}| \right\}$$

$$= (r+2) \cdot \max \left\{ |\overline{\alpha}_{11}|; \frac{1}{r} |\overline{\alpha}_{11} + \overline{\alpha}_{17}| \right\} = (r+2) \cdot \max \left\{ |\overline{\alpha}_{11}|; \frac{2}{r} |\overline{\alpha}_{11}| \right\} = (r+2)\overline{\alpha}_{11},$$

так как $r \geqslant 2$.

Найдем для $k$ оценку сверху. Неравенство (1.2) примет вид $1 + k \cdot (r+2)\overline{\alpha}_{11} \leqslant 1 + r\overline{\alpha}_{11}$, откуда получим, что $k \leqslant \frac{r}{r+2}$. Очевидно, что $k \in (0, 1]$.

□

**Теорема 3.** *Оператор проектирования $\pi_\alpha^{(0)}$ пространства $l_\infty^9$ на подпространство $Y_6$, определяемое функционалами (2.1), является сильно единственным и максимальное значение константы сильной единственности $k_0$ равно $\frac{r}{r+2}$, если $r \geqslant 2$.*

*Доказательство.* Имеем

$$T_1 = \sum_{j=1}^{9} \left| \delta_{1j} - \sum_{k=1}^{3} \alpha_{k1} f_{kj} \right| = |1-\alpha_{11}| + (1+r)|\alpha_{11}| + (2+r)\left(|\alpha_{21}| + |\alpha_{31}|\right),$$

$$T_2 = |1-\alpha_{22}| + (1+r)|\alpha_{22}| + (2+r)\left(|\alpha_{12}| + |\alpha_{32}|\right), T_3 = |1-\alpha_{33}| + (1+r)|\alpha_{33}|$$
$$+(2+r)\left(|\alpha_{13}| + |\alpha_{23}|\right), T_4 = |1-r\alpha_{14}| + 2|\alpha_{14}| + (2+r)\left(|\alpha_{24}| + |\alpha_{34}|\right),$$
$$T_5 = |1-r\alpha_{25}| + 2|\alpha_{25}| + (2+r)\left(|\alpha_{15}| + |\alpha_{35}|\right), T_6 = |1-r\alpha_{36}| + 2|\alpha_{36}|$$
$$+(2+r)\left(|\alpha_{16}| + |\alpha_{26}|\right), T_7 = |1-\alpha_{17}| + (1+r)|\alpha_{17}| + (2+r)\left(|\alpha_{27}| + |\alpha_{37}|\right),$$
$$T_8 = |1-\alpha_{28}| + (1+r)|\alpha_{28}| + (2+r)\left(|\alpha_{18}| + |\alpha_{38}|\right), T_9 = |1-\alpha_{39}| + (1+r)|\alpha_{39}|$$
$$+(2+r)\left(|\alpha_{19}| + |\alpha_{29}|\right).$$

Далее найдем

$$B_i = \sum_{j=1}^{9} \left| \sum_{k=1}^{3} \left( \overline{\alpha}_{ki} - \alpha_{ki}^{(0)} \right) f_{kj} \right| \ (i = 1, \cdots, 9).$$

Для $i = 1,2,3,7,8,9$ получим $B_i = (2+r)\sum_{k=1}^{3} |\alpha_{ki}|$. Остальные $B_i$ будут иметь вид:

$$B_4 = (2+r)\left( \left| \alpha_{14} - \frac{1}{r} \right| + |\alpha_{24}| + |\alpha_{34}| \right), B_5 = (2+r)\left( |\alpha_{15}| + \left| \alpha_{25} - \frac{1}{r} \right| + |\alpha_{35}| \right),$$

$$B_6 = (2+r)\left( |\alpha_{16}| + |\alpha_{26}| + \left| \alpha_{36} - \frac{1}{r} \right| \right).$$

Покажем, что $k_0 = \frac{r}{r+2}$ $(r \geqslant 2)$ – максимально возможное значение константы сильной единственности. Для этого надо доказать, что неравенство

$$\|\pi_\alpha^{(0)}\| + k_0 \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant 9} B_i \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant 9} T_i \tag{3.1}$$

выполняется при любых значениях $\alpha_i$, $(i = 1,2,3)$.

Сравним значения $B_i$. Докажем неравенство

$$B_1 + B_7 \geqslant 2B_4. \tag{3.2}$$

Оно равносильно неравенству

$$\sum_{k=1}^{3} |\alpha_{k1}| + \sum_{k=1}^{3} |\alpha_{k7}| \geqslant 2\left( \left| \alpha_{14} - \frac{1}{r} \right| + |\alpha_{24}| + |\alpha_{34}| \right).$$

Теперь достаточно доказать два неравенства:

$$\sum_{k=2}^{3}|\alpha_{k1}|+\sum_{k=2}^{3}|\alpha_{k7}|\geqslant 2\sum_{k=2}^{3}|\alpha_{k4}| \text{ и } |\alpha_{11}|+|\alpha_{17}|\geqslant 2\left|\alpha_{14}-\frac{1}{r}\right|.$$

Так как $|\alpha_{k1}|+|\alpha_{k7}|\geqslant|\alpha_{k1}+\alpha_{k1}|, |\alpha_{k4}|=(1/r)|\alpha_{k1}+\alpha_{k1}|$ $(k=2,3)$ и $2/r\leqslant 1$, то

$$\sum_{k=2}^{3}|\alpha_{k1}|+\sum_{k=2}^{3}|\alpha_{k7}|\geqslant\sum_{k=2}^{3}|\alpha_{k1}+\alpha_{k7}|\geqslant\frac{2}{r}\sum_{k=2}^{3}|\alpha_{k1}+\alpha_{k7}|=2\sum_{k=2}^{3}|\alpha_{k4}|,$$

что доказывает первое неравенство. Для доказательства второго неравенства воспользуемся тем, что $\alpha_{11}+\alpha_{17}=1-r\alpha_{14}$. Получим

$$|\alpha_{11}|+|\alpha_{17}|\geqslant|\alpha_{11}+\alpha_{17}|=|1-r\alpha_{14}|=r\left|\frac{1}{r}-\alpha_{14}\right|\geqslant 2\left|\alpha_{14}-\frac{1}{r}\right|.$$

Таким образом, неравенство (3.2) доказано.

Если $B_i<B_4$ $(i=1,7)$, то неравенство (3.2) не выполняется. Следовательно, или $B_1\geqslant B_4$, или $B_7\geqslant B_4$ (или справедливы оба неравенства). Значит,

$$\max_{i=1,4,7}B_i=\max_{i=1,7}B_i.$$

Аналогично доказывается,что

$$\max_{i=2,5,8}B_i=\max_{i=2,8}B_i,\quad \max_{i=3,6,9}B_i=\max_{i=3,9}B_i. \tag{3.3}$$

Пусть

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 9}B_i=\max_{i=1,7}B_i.$$

Для доказательства неравенства (3.1) достаточно доказать неравенства

$$1+\frac{r}{r+2}\cdot B_i\leqslant T_i\ (i=1,7).$$

т.е.

$$1+r\sum_{k=1}^{3}|\alpha_{ki}|\leqslant|1-\alpha_{1i}|+(1+r)|\alpha_{1i}|+(2+r)\sum_{k=2}^{3}|\alpha_{ki}|.$$

Так как $|1-\alpha_{1i}|+(1+r)|\alpha_{1i}|\geqslant 1-|\alpha_{1i}|+(1+r)|\alpha_{1i}|=1+r|\alpha_{1i}|$, то остается доказать неравенство $r\sum_{k=2}^{3}|\alpha_{ki}|\leqslant(2+r)\sum_{k=2}^{3}|\alpha_{ki}|$, которое очевидно, так как $r<2+r$.

Случаи (3.3) доказываются аналогично.

□

**Теорема 4.** *Оператор проектирования* $\widetilde{\pi}_\alpha^{(0)}$ *пространства* $l_\infty^9$ *на подпространство* $\widetilde{Y}_6$*, определяемое функционалами (2.3), является сильно единственным и максимальное значение константы сильной единственности* $k_0$ *равно* $\frac{1}{2r+1}$*, если* $0<r\leqslant\frac{1}{2}$.

*Доказательство.* Снова от функционалов (2.3) перейдем к функционалам (2.4). Обозначив $s = 1/r$, легко заметить, что для функционалов (2.4) выполняется теорема 3. Тогда $k_0 = \frac{s}{s+2} = \frac{1}{2r+1}$, если $s \geqslant 2$ (или $0 < r \leqslant \frac{1}{2}$).

$\square$

*Замечание* 1. Вопрос о сильной единственности минимальных проекций с неединичной нормой, найденных в теоремах 1 и 2 при $0 < r < 2$ и $r > 1/2$ соответственно, остается нерешенным.

## Заключение

В работе найдены проекционные константы для минимальных операторов проектирования на на некоторый класс подпространств коразмерности 3 в пространстве $l_\infty^9$. Подпространства образованы с помощью гиперплоскостей рассматриваемого конечномерного пространства. Относительные проекционные константы вычислены как для минимальных проекций с единичной нормой, так и для минимальных проекций с нормой больше единицы. Максимальные значения констант сильной единственности найдены только для минимальных операторов проектирования с единичной нормой.

## Список литературы

[1] Blätter J., Cheney E.W. Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1974. Vol. 101. Pp. 215–227.

[2] Bohnenblust H.F. Convex regions and projections in Minkowski spaces // Annals of Mathematics. 1938. Pp. 301–308.

[3] Chalmers B. L., Lewicki G. Three-dimensional subspace of with maximal projection constants // Journal of Functional Analysis. 2009. Vol. 257. Pp. 553–592.

[4] König H.P., Lewis D.R., Lin P.-K. Finite dimensional projections // Studia Mathematica. 1983. Vol. 75, № 3. Pp. 341–358.

[5] Lewicki G. Best Approximation in Spaces of Bounder Linear Operators: Dissertationes Mathematicae. Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1994. 103 p.

[6] Lewicki G., Micek A. Equality of two strong unique projection constants // Journal of Approximation Theory. 2010. Vol. 162, № 12. Pp. 2278–2289.

[7] Lokot' V.V. On a class of minimal projections in finite dimensional spaces // Optimization. 1994. Vol. 29. Pp. 311–317.

[8] Локоть В.В. Константы сильной единственности минимальных проекций на гиперплоскости в пространстве $l_\infty^n (n \geqslant 3)$ // Математические заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 723–728. https://doi.org/10.4213/mzm461

[9] Локоть В.В., Мартынов О.М. Проекционные константы. Мурманск: МГГУ, 2013. 302 с.

[10] Martinov O.M. Constants of strong unicity of minimal projections onto some two-dimensional subspaces of $l_\infty^4$ // Journal of Approximation Theory. 2002. Vol. 118. Pp. 175–187.

[11] Мартынов О.М. Некоторые свойства операторов проектирования в банаховых пространствах: Диссертация к.ф.-м.н.. СПб: РГПУ им. А.И. Герцена, 2002.

[12] Мартынов О.М. Проекционные константы некоторого класса подпространств коразмерности два в пространстве $l_\infty^{2n}$ // Функциональный анализ и его приложения. 2019. Т. 53, № 3. С. 33–44.

[13] Мартынов О.М. О сильной единственности некоторых проекций с единичной нормой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. Т. 2. С. 33–48.

[14] Newman D.J., Shapiro H.S. Some theorems on Chebyshev approximation // Duke Mathematical Journal. 1963. Vol. 30, № 4. Pp. 673–681.

[15] Newman D.J., Shapiro H.S. Approximation by Generalized Rational Functions // On Approximation Theory. Eds. by P.L. Butzer, J. Korevaar. Vol. 5. Basel: Springer, 1964. Pp. 245–251. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-4131-3_25

[16] Одинец В.П. О семинаре по геометрии банаховых пространств в 1990-97 гг. // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения 2007. Т. LX. СПб: Изд-во БАН, 2007. С. 12–26.

[17] Odyniec W., Lewicki G. Minimal Projections in Banach Spaces. Series: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1449. Berlin, New York: Springer, 1990.

[18] Odyniec W., Prophet M. The strong unicity constant and its applications // Banach Center Publications. 2008. Vol. 79, № 1. Pp. 167–172. http://dx.doi.org/10.4064/bc79-0-13

[19] Odyniec W., Prophet M.P. A lower bound of the strongly unique minimal projection constant of $l_\infty^n, (n \geqslant 3)$ // Journal of Approximation Theory. 2007. Vol. 145. Pp. 111–121.

[20] Одинец В.П., Якубсон М.Я. Проекторы и базисы в нормированных пространствах. М.: Едиториал УРСС, 2004.

**Образец цитирования**

Мартынов О.М. О сильной единственности минимальных проекций в пространстве $l_\infty^9$ // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 4. С. 28–42. https://doi.org/10.26456/vtpmk603

### Сведения об авторах

1. **Мартынов Олег Михайлович**
доцент кафедры №13 военной академии воздушно-космической обороны имени Маршала Советского Союза Г.К. Жукова.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Жигарева, д.50, ВА ВКО им. Маршала Советского Союза Г.К. Жукова. E-mail: olegmartynov@yandex.ru*

## ON THE STRONG UNIQUENESS OF MINIMAL PROJECTIONS IN THE SPACE $l_\infty^9$

**Martynov Oleg Mikhailovich**
Associate professor at department №13,
Zhukov Air and Space Defense Academy
*Russia, 170100, Tver, Zhigarev Str., 50, Military Aerospace Defense Academy.*
*E-mail: olegmartynov@yandex.ru*

*Received 30.09.2020, revised 23.10.2020.*

In this paper we consider minimal projections of the space $l_\infty^9$ on some subspaces of codimension 3. Relative projection constants are found for them, and in the case of a minimal projection with a unit norm, we find maximum value of the strong uniqueness constant.

**Keywords:** space, subspace, projection operator, relative projection constant, the constant of strong uniqueness.

### Citation

Martynov O.M., "On the strong uniqueness of minimal projections in the space $l_\infty^9$", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 4, 28–42(in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk603

### References

[1] Blätter J., Cheney E.W., "Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces", *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **101** (1974), 215–227.

[2] Bohnenblust H.F., "Convex regions and projections in Minkowski spaces", *Annals of Mathematics*, 1938, 301–308.

[3] Chalmers B. L., Lewicki G., "Three-dimensional subspace of with maximal projection constants", *Journal of Functional Analysis*, **257** (2009), 553–592.

[4] König H.P., Lewis D.R., Lin P.-K., "Finite dimensional projections", *Studia Mathematica*, **75**:3 (1983), 341–358.

[5] Lewicki G., *Best Approximation in Spaces of Bounder Linear Operators*, Dissertationes Mathematicae, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 1994, 103 pp.

[6] Lewicki G., Micek A., "Equality of two strong unique projection constants", *Journal of Approximation Theory*, **162**:12 (2010), 2278–2289.

[7] Lokot' V.V., "On a class of minimal projections in finite dimensional spaces", *Optimization*, **29** (1994), 311–317.

[8] Lokot' V.V., "Constants of Strong Uniqueness of Minimal Projections onto Hyperplanes in the Space $l_\infty^n (n \geqslant 3)$", *Mathematical Notes*, **72**:5 (2002), 667–671, https://doi.org/10.4213/mzm461.

[9] Lokot V.V., Martynov O.M., *Proektsionnye konstanty [Projection constants]*, MGGU, Murmansk, 2013 (in Russian), 302 pp.

[10] Martinov O.M., "Constants of strong unicity of minimal projections onto some two-dimensional subspaces of $l_\infty^4$", *Journal of Approximation Theory*, **118** (2002), 175–187.

[11] Martynov O.M., *Nekotorye svojstva operatorov proektirovaniya v banakhovykh prostranstvakh*, PhD Thesis, RGPU im. A.I. Gertsena, SPb, 2002 (in Russian).

[12] Martynov O.M., "Projection constants of a certain class of subspaces of codimension two in the space $l_\infty^{2n}$", *Funktsionalnyj analiz i ego prilozheniya [Functional analysis and its applications]*, **53**:3 (2019), 33–44 (in Russian).

[13] Martynov O.M., "On the strong uniqueness of some projections with unit norm", *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya [Differential equations and control processes]*, **2** (2020), 33–48 (in Russian).

[14] Newman D.J., Shapiro H.S., "Some theorems on Chebyshev approximation", *Duke Mathematical Journal*, **30**:4 (1963), 673–681.

[15] Newman D.J., Shapiro H.S., "Approximation by Generalized Rational Functions", *On Approximation Theory*. V. 5, eds. P.L. Butzer, J. Korevaar, Springer, Basel, 1964, 245–251, https://doi.org/10.1007/978-3-0348-4131-3_25.

[16] Odinets V.P., "On the seminar on the geometry of Banach spaces in 1990-97.", *Nekotorye aktualnye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovaniya. Gertsenovskie chteniya 2007 [Some actual problems of modern mathematics and mathematical education. Herzen Readings 2007]*. V. LX, Izd-vo BAN, SPb, 2007, 12–26 (in Russian).

[17] Odyniec W., Lewicki G., *Minimal Projections in Banach Spaces*. V. 1449, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, New York, 1990.

[18] Odyniec W., Prophet M., "The strong unicity constant and its applications", *Banach Center Publications*, **79**:1 (2008), 167–172, http://dx.doi.org/10.4064/bc79-0-13.

[19] Odyniec W., Prophet M.P., "A lower bound of the strongly unique minimal projection constant of $l_\infty^n, (n \geqslant 3)$", *Journal of Approximation Theory*, **145** (2007), 111–121.

[20] Odinets V.P., Yakubson M.Ya., *Proektory i bazisy v normirovannykh prostranstvakh [Projectors and bases in normed spaces]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 2004 (in Russian).