УДК 517.95, 532.5

О ПОСТРОЕНИИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 15.01.2021, после переработки 03.02.2021.

Предложены новые методы построения точных решений квазигидродинамической системы для двумерных течений. Показано, что с любым гладким решением некоторой переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных можно ассоциировать общее точное решение квазигидродинамической системы и системы Навье–Стокса. Любая собственная функция двумерного оператора Лапласа также порождает общее решение указанных систем. Приведены примеры решений как в нестационарном, так и в стационарном случае. Обсужден принцип суперпозиции векторных полей скорости жидкости для конкретных течений.

Ключевые слова: система Навье–Стокса, квазигидродинамическая система, точные решения, принцип суперпозиции.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. С. 5–20.
https://doi.org/10.26456/vtpmk605

Введение

Научные достижения в направлении, связанном с построением точных решений системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости, отражены в [1–6]. Эти решения могут использоваться в качестве тестов компьютерных программ. Кроме того, они позволяют лучше понять свойства указанной классической математической модели. В 1993 г. автором была предложена [7] альтернативная математическая модель, получившая названия квазигидродинамической (КГД). В [8, 9] изложены физические принципы, на основе которых она может быть получена, выявлены глубокие связи КГД модели с системами Навье–Стокса и Эйлера. Семейства точных решений КГД системы в динамике слабосжимаемой вязкой жидкости представлены в монографиях [8, 9] и статьях [10–13]. Они подтверждают физическую адекватность данной диссипативной математической модели, поскольку в подавляющем большинстве случаем эти решения являются точными и для системы Навье–Стокса.

В настоящей статье предложены новые методы построения точных решений квазигидродинамической системы для двумерных течений. Показано, что с любым гладким решением некоторой переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных можно ассоциировать общее точное решение квазигидродинамической системы и системы Навье–Стокса. Любая собственная функция двумерного оператора Лапласа также порождает общее решение указанных систем. Приведены примеры решений как в нестационарном, так и в стационарном случае. Обсужден принцип суперпозиции векторных полей скорости жидкости для конкретных течений.

1. Квазигидродинамическая система и система Навье–Стокса для двумерных неустановившихся течений

Квазигидродинамическая система для двумерных нестационарных течений слабосжимаемой вязкой жидкости может быть записана в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + (u_x - w_x)\frac{\partial u_x}{\partial x} + (u_y - w_y)\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} =$$
$$= \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big) + \frac{\partial (u_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y w_x)}{\partial y}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + (u_x - w_x)\frac{\partial u_y}{\partial x} + (u_y - w_y)\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} =$$
$$= \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big) + \frac{\partial (u_x w_y)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y w_y)}{\partial y}. \tag{1.3}$$

Здесь

$$w_x = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big), \tag{1.4}$$

$$w_y = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big). \tag{1.5}$$

Влияние внешних сил не учитывается. Символом ν обозначен коэффициент кинематической вязкости жидкости. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2},$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Параметры ν и τ являются положительными константами. Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Система (1.1) – (1.3) замкнута относительно неизвестных функций – компонент вектора скорости $u_x = u_x(x,y,t)$, $u_y = u_y(x,y,t)$ и давления $p = p(x,y,t)$.

Пренебрегая в (1.1) –(1.3) членами, содержащими τ, получим классическую систему Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\Big), \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\Big). \tag{1.8}$$

2. Метод построения общих точных решений системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы

Рассмотрим переопределенную систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu\Delta\psi + C(t), \tag{2.1}$$

$$\Delta\psi = -\omega, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $C(t)$ – заданная бесконечно дифференцируемая функция на промежутке $[0, +\infty)$,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.4}$$

– двумерный оператор Лапласа. Система (2.1) – (2.3) включает две неизвестные функции $\psi = \psi(x, y, t)$ и $\omega = \omega(x, y, t)$.

Определение 1. *Решение* (ψ, ω) *системы* (2.1) – (2.3) *назовем гладким, если* $\psi \in C^\infty(V)$ *и* $\omega \in C^\infty(V)$, *где* $V = \mathbb{R}^2_{x,y} \times [0, +\infty)$.

Теорема 1. *Пусть* (ψ, ω) *– гладкое решение системы* (2.1) – (2.3). *Тогда тройка функций* (u_x, u_y, p) *образует общее точное бесконечно дифференцируемое на множестве* V *решение системы Навье–Стокса* (1.6) – (1.8) *и квазигидродинамической системы* (1.1) – (1.3). *Здесь*

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{2.5}$$

$$u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{2.6}$$

$$p = p_0(t) + \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \Big(Q(x_*, y_*, t)dx_* + R(x_*, y_*, t)dy_*\Big). \tag{2.7}$$

Символом $p_0(t)$ *обозначена произвольная бесконечно дифференцируемая функция времени на промежутке* $[0, +\infty)$,

$$Q = -u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} - u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}, \tag{2.8}$$

$$R = -u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} - u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Пусть (ψ,ω) – гладкое решение системы (2.1) – (2.3). Сложим равенство (2.5), продифференцированное по x, с равенством (2.6), продифференцированным по y. Получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}. \tag{2.10}$$

Правая часть (2.10) равна нулю в силу теоремы Шварца. Таким образом, уравнение (1.6) удовлетворяется.

Продифференцируем (2.1) сначала по y, а затем по x. Принимая во внимание (2.5), (2.6) и (2.4), получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=\nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\Big), \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t}=\nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\Big). \tag{2.12}$$

Из (2.2), (2.5), (2.6) вытекает равенство

$$\omega=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{2.13}$$

Следовательно, функция ω есть завихренность плоского векторного поля (u_x,u_y). Криволинейный интеграл второго рода в правой части (2.7) не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки $(0,0)$ и (x,y), если выполнено условие

$$\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}=0. \tag{2.14}$$

С помощью (2.8) и (2.9) преобразуем (2.14) к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=0. \tag{2.15}$$

Эквивалентная запись (2.15) такова:

$$\begin{aligned}u_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)+u_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)+\\+\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=0.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Справедливость равенства (2.16) вытекает из (1.6) и (2.3), если принять во внимание (2.5), (2.6) и (2.13). Дифференцирование (2.7) по x и по y приводит к соотношениям

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{2.17}$$

$$u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=0. \tag{2.18}$$

Принимая во внимание (2.11), (2.12), (2.17) и (2.18), убеждаемся в том, что уравнения движения (1.7) и (1.8) также удовлетворяются. В силу (2.17), (2.18), (1.4), (1.5) все содержащие τ добавочные члены в КГД системе (1.1) – (1.3) обращаются в ноль. Таким образом, тройка функций (u_x,u_y,p) является точным решением не только системы Навье–Стокса, но и квазигидродинамической системы. □

Проиллюстрируем использование Теоремы 1 на примере.

Пример 1. Пусть функция $C(t)$ равна нулю на промежутке $[0,+\infty)$. Тогда (2.1) принимает вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\nu\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\Big). \tag{2.19}$$

Линейное уравнение теплопроводности (2.19), как известно [14], имеет на V точное решение

$$\psi=\frac{A}{t_0+t}e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}}. \tag{2.20}$$

Здесь положительная постоянная A имеет размерность *см*^{2}, t_0 – заданная положительная константа. С помощью (2.20), (2.5) и (2.6) находим компоненты поля скорости

$$u_x=-\frac{Ay}{2\nu(t_0+t)^2}e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}}, \tag{2.21}$$

$$u_y=\frac{Ax}{2\nu(t_0+t)^2}e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}}. \tag{2.22}$$

Из (2.2), (2.19) и (2.20) вытекает цепочка равенств

$$\omega=-\Delta\psi=-\frac{1}{\nu}\frac{\partial\psi}{\partial t}=$$

$$=\frac{A}{\nu(t_0+t)^2}\left(1-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}}.$$

Таким образом,

$$\psi=f(\xi,t),\qquad \omega=g(\xi,t), \tag{2.23}$$

где $\xi=x^2+y^2$, f и g – бесконечно дифференцируемые функции своих аргументов. Условие (2.3) выполняется, поскольку

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}=4xy\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\xi}-4xy\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial g}{\partial\xi}=0. \tag{2.24}$$

По формуле (2.7) находим распределение давления:

$$p=p_0(t)+\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\Big(Q(x_*,y_*,t)dx_*+R(x_*,y_*,t)dy_*\Big)=$$

$$=p_0(t)+\frac{A^2}{4\nu^2(t_0+t)^4}\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(x_*e^{-\dfrac{x_*^2+y_*^2}{2\nu(t_0+t)}}dx_*+y_*e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2\nu(t_0+t)}}dy_*\right)=$$

$$= p_0(t) - \frac{A^2}{4\nu(t_0+t)^3} \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} d\left(e^{-\dfrac{x_*^2+y_*^2}{2\nu(t_0+t)}}\right) =$$

$$= p_0(t) + \frac{A^2}{4\nu(t_0+t)^3}\left(1 - e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2\nu(t_0+t)}}\right). \tag{2.25}$$

В (2.25) положим

$$p_0(t) = p_\infty - \frac{A^2}{4\nu(t_0+t)^3}. \tag{2.26}$$

Тогда зависимость (2.25) принимает вид

$$p = p_\infty - \frac{A^2}{4\nu(t_0+t)^3} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2\nu(t_0+t)}}. \tag{2.27}$$

При этом выполнено условие

$$p\Big|_{x^2+y^2\to+\infty} = p_\infty,$$

где p_∞ – давление в бесконечно удаленной точке. Общее точное вихревое решение систем Навье–Стокса и КГД, определяемое формулами (2.21), (2.22) и (2.27), для квазигидродинамической системы построено впервые.

3. Точные решения, порождаемые собственными функциями двумерного оператора Лапласа

Пусть функция $C(t)$ тождественно равна нулю на промежутке $[0, +\infty)$. Тогда уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \nu\Delta\psi. \tag{3.1}$$

Будем искать решение (3.1) на множестве V в виде

$$\psi = \psi_0 e^{-\lambda\nu t}, \tag{3.2}$$

где $\psi_0 = \psi_0(x, y)$ – бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}^2_{x,y}$ функция, отличная от тождественного нуля, $\lambda = const \neq 0$. Подстановка (3.2) в (3.1) дает

$$-\Delta\psi_0 = \lambda\psi_0, \qquad \psi_0 \neq 0. \tag{3.3}$$

Таким образом, ψ_0 является собственной функцией оператора $(-\Delta)$.

Теорема 2. *Пусть ψ_0 – отличная от тождественного нуля собственная функция оператора $(-\Delta)$ класса гладкости $C^\infty\big(\mathbb{R}^2_{x,y}\big)$, соответствующая собственному числу λ. Тогда тройка функций (u_x, u_y, p), определяемых формулами*

$$u_x = \frac{\partial\psi_0}{\partial y} e^{-\lambda\nu t}, \tag{3.4}$$

$$u_y = -\frac{\partial\psi_0}{\partial x}e^{-\lambda\nu t}, \tag{3.5}$$

$$p = p_1(t) - \frac{1}{2}\left(\lambda\psi_0^2 + \Big(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\Big)^2\right)e^{-2\lambda\nu t}, \tag{3.6}$$

задает на множестве V *общее точное бесконечно дифференцируемое решение системы Навье–Стокса* (1.6) – (1.8) *и квазигидродинамической системы* (1.1) – (1.3). *Здесь* $p_1(t)$ *– произвольная бесконечно дифференцируемая на промежутке времени* $[0,+\infty)$ *функция.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий Теоремы 1.
Функция (3.2) удовлетворяет уравнению (3.1). С помощью (2.2), (3.2) и (3.3) находим

$$\omega = \lambda\psi_0 e^{-\lambda\nu t} = \lambda\psi. \tag{3.7}$$

Подстановка (3.3) и (3.7) в (2.3) дает

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} =$$

$$= \lambda\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}e^{-2\lambda\nu t} - \lambda\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}e^{-2\lambda\nu t} = 0. \tag{3.8}$$

Тем самым, пара функции (ψ,ω) подчиняется условию (2.3).

Равенства (3.4) и (3.5) получаются подстановкой (3.2) в (2.5) и (2.6). Пусть $\psi_0^* = \psi_0(x_*,y_*)$. По формуле (2.7) находим

$$p = p_0(t) - e^{-2\lambda\nu t}\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\Big[\Big(\frac{\partial\psi_0^*}{\partial y_*}\frac{\partial^2\psi_0^*}{\partial x_*\partial y_*} - \frac{\partial\psi_0^*}{\partial x_*}\frac{\partial^2\psi_0^*}{\partial y_*^2}\Big)dx_* +$$

$$+\Big(-\frac{\partial\psi_0^*}{\partial y_*}\frac{\partial^2\psi_0^*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial\psi_0^*}{\partial x_*}\frac{\partial^2\psi_0^*}{\partial y_*\partial x_*}\Big)dy_*\Big] =$$

$$= p_0(t) + e^{-2\lambda\nu t}\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\Big(\frac{\partial\psi_0^*}{\partial x_*}\Delta\psi_0^* dx_* + \frac{\partial\psi_0^*}{\partial y_*}\Delta\psi_0^* dy_*\Big) -$$

$$-e^{-2\lambda\nu t}\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\Big[\Big(\frac{\partial\psi_0^*}{\partial y_*}\frac{\partial^2\psi_0^*}{\partial x_*\partial y_*} + \frac{\partial\psi_0^*}{\partial x_*}\frac{\partial^2\psi_0^*}{\partial x_*^2}\Big)dx_* +$$

$$+\Big(\frac{\partial\psi_0^*}{\partial y_*}\frac{\partial^2\psi_0^*}{\partial y_*^2} + \frac{\partial\psi_0^*}{\partial x_*}\frac{\partial^2\psi_0^*}{\partial y_*\partial x_*}\Big)dy_*\Big] =$$

$$= p_0(t) - \lambda e^{-2\lambda\nu t}\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\Big(\frac{\partial\psi_0^*}{\partial x_*}\psi_0^* dx_* + \frac{\partial\psi_0^*}{\partial y_*}\psi_0^* dy_*\Big) -$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2\lambda\nu t}\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left[\frac{\partial}{\partial x_*}\left(\left(\frac{\partial\psi_0^*}{\partial x_*}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_0^*}{\partial y_*}\right)^2\right)dx_*+\frac{\partial}{\partial y_*}\left(\left(\frac{\partial\psi_0^*}{\partial x_*}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_0^*}{\partial y_*}\right)^2\right)dy_*\right]=$$

$$=p_0(t)+\frac{1}{2}\left[\lambda\Big(\psi_0(0,0)\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}(0,0)\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi_0}{\partial y}(0,0)\Big)^2\right]e^{-2\lambda\nu t}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\lambda\psi_0^2+\Big(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\Big)^2\right)e^{-2\lambda\nu t}=$$

$$=p_1(t)-\frac{1}{2}\left(\lambda\psi_0^2+\Big(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\Big)^2\right)e^{-2\lambda\nu t}. \tag{3.9}$$

Здесь

$$p_1(t)=p_0(t)+\frac{1}{2}\left[\lambda\Big(\psi_0(0,0)\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}(0,0)\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi_0}{\partial y}(0,0)\Big)^2\right]e^{-2\lambda\nu t}$$

– произвольная функция времени. □

Покажем применение Теоремы 2 на конкретных примерах.

Пример 2. Пусть

$$\psi_0=\psi_0^{(1)}=-\frac{U_0H}{2\pi}\cos\Big(\frac{2\pi y}{H}\Big). \tag{3.10}$$

Здесь U_0 и H – положительные константы, имеющие размерности *см/с* и *см* соответственно. Нетрудно проверить, что ψ_0 удовлетворяет уравнению (3.3), причем $\lambda=4\pi^2/H^2$. С помощью (3.4), (3.5), (3.6) находим составляющие поля скорости

$$u_x=U_0\sin\Big(\frac{2\pi y}{H}\Big)e^{-\dfrac{4\pi^2\nu t}{H^2}}, \tag{3.11}$$

$$u_y=0, \tag{3.12}$$

и давление

$$p=p_1(t)-\frac{U_0^2}{2}e^{-\dfrac{8\pi^2\nu t}{H^2}}=p_2(t). \tag{3.13}$$

Здесь $p_2(t)$ – произвольная функция времени.

Пример 3. Пусть

$$\psi_0=\psi_0^{(2)}=-\frac{V_0H}{2\pi}\sin\Big(\frac{2\pi x}{H}\Big), \tag{3.14}$$

где V_0 – положительная постоянная, имеющая размерность *см/с*. Константа $H>0$ такая же, как и в предыдущем примере. Функция (3.14) также удовлетворяет уравнению (3.3), а собственное значение λ, как и в Примере 2, вычисляется по формуле

$$\lambda=\frac{4\pi^2}{H^2}. \tag{3.15}$$

Используя (3.4), (3.5) и (3.6), вычисляем компоненты поля скорости

$$u_x=0, \tag{3.16}$$

$$u_y = V_0 \cos\Big(\frac{2\pi x}{H}\Big) e^{-\dfrac{4\pi^2 \nu t}{H^2}}, \tag{3.17}$$

и давление

$$p = p_1(t) - \frac{V_0^2}{2} e^{-\dfrac{8\pi^2 \nu t}{H^2}} = p_3(t). \tag{3.18}$$

Здесь $p_3(t)$ – произвольная функция времени.

Пример 4. Предположим, что

$$\psi_0 = \psi_0^{(1)} + \psi_0^{(2)} = -\frac{U_0 H}{2\pi} \cos\Big(\frac{2\pi y}{H}\Big) - \frac{V_0 H}{2\pi} \sin\Big(\frac{2\pi x}{H}\Big). \tag{3.19}$$

Это – новая собственная функция, отвечающее собственному числу (3.15). Соответствующее ей поле скорости есть суперпозиция (векторная сумма) полей (u_x, u_y) в двух предыдущих примерах:

$$u_x = U_0 \sin\Big(\frac{2\pi y}{H}\Big) e^{-\dfrac{4\pi^2 \nu t}{H^2}}, \tag{3.20}$$

$$u_y = V_0 \cos\Big(\frac{2\pi x}{H}\Big) e^{-\dfrac{4\pi^2 \nu t}{H^2}}. \tag{3.21}$$

Вычисление давления по формуле (3.6) дает

$$p = p_1(t) - \frac{1}{2}\Bigg(\frac{4\pi^2}{H^2}\Big(\frac{U_0 H}{2\pi} \cos\Big(\frac{2\pi y}{H}\Big) + \frac{V_0 H}{2\pi} \sin\Big(\frac{2\pi x}{H}\Big)\Big)^2 +$$

$$+ U_0^2 \sin^2\Big(\frac{2\pi y}{H}\Big) + V_0^2 \cos^2\Big(\frac{2\pi x}{H}\Big)\Bigg) e^{-\dfrac{8\pi^2 \nu t}{H^2}} =$$

$$= p_1(t) - \frac{U_0^2 + V_0^2}{2} e^{-\dfrac{8\pi^2 \nu t}{H^2}} - U_0 V_0 \cos\Big(\frac{2\pi y}{H}\Big) \sin\Big(\frac{2\pi x}{H}\Big) e^{-\dfrac{8\pi^2 \nu t}{H^2}}.$$

Таким образом,

$$p = p_4(t) - U_0 V_0 \cos\Big(\frac{2\pi y}{H}\Big) \sin\Big(\frac{2\pi x}{H}\Big) e^{-\dfrac{8\pi^2 \nu t}{H^2}}. \tag{3.22}$$

Распределение давления уже зависит не только от времени, но и от пространственных координат, и не представляет собой формальную сумму давлений в предыдущих примерах.

Описанный в данном пункте метод отыскания точных решений квазигидродинамической системы является новым. Все построенные решения системы КГД приводятся впервые. Однако в теории Навье–Стокса этот подход был известен. Он изложен, например, в [15], где приведены другие примеры точных решений двумерных нестационарных уравнений Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости.

4. Построение точных решений, описывающих стационарные течения

Для установившихся течений система (2.1) – (2.3) принимает вид

$$\Delta\psi = -\frac{C}{\nu}, \tag{4.1}$$

$$\Delta\psi = -\omega, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0. \tag{4.3}$$

Здесь C – произвольная постоянная. Из (4.1) и (4.2) находим

$$\omega = \omega_0, \tag{4.4}$$

где $\omega_0 = C/\nu = const$. Будем считать, что $\omega_0 \neq 0$. В силу (4.4), уравнение (4.3) удовлетворяется тождественно. Уравнение (4.2) принимает вид

$$\Delta\psi = -\omega_0.$$

Его общее решение выглядит следующим образом:

$$\psi = -\frac{\omega_0}{4}\big(x^2 + y^2\big) + \Phi. \tag{4.5}$$

Символом Φ обозначена произвольная гармоническая функция на плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y}$. С помощью (4.5), (2.5), (2.6) находим компоненты поля скорости

$$u_x = -\frac{\omega_0 y}{2} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \tag{4.6}$$

$$u_y = \frac{\omega_0 x}{2} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}. \tag{4.7}$$

Пусть $u_x^* = u_x(x_*, y_*)$, $u_y^* = u_y(x_*, y_*)$, $\Phi^* = \Phi(x_*, y_*)$. По формуле (2.7), адаптированной на случай стационарных течений, находим

$$p = p_0 - \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \left[\Big(u_x^*\frac{\partial u_x^*}{\partial x_*} + u_y^*\frac{\partial u_x^*}{\partial y_*}\Big)dx_* + \Big(u_x^*\frac{\partial u_y^*}{\partial x_*} + u_y^*\frac{\partial u_y^*}{\partial y_*}\Big)dy_*\right] =$$

$$= p_0 - \frac{1}{2}\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \left[\frac{\partial}{\partial x_*}\Big(\big(u_x^*\big)^2 + \big(u_y^*\big)^2\Big)dx_* + \frac{\partial}{\partial y_*}\Big(\big(u_x^*\big)^2 + \big(u_y^*\big)^2\Big)dy_*\right] +$$

$$+ \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \left[u_y^*\Big(\frac{\partial u_y^*}{\partial x_*} - \frac{\partial u_x^*}{\partial y_*}\Big)dx_* - u_x^*\Big(\frac{\partial u_y^*}{\partial x_*} - \frac{\partial u_x^*}{\partial y_*}\Big)dy_*\right] =$$

$$= p_0 - \frac{1}{2}\big(u_x^2 + u_y^2\big) + \frac{1}{2}\big(u_x^2(0,0) + u_y^2(0,0)\big) + \omega_0 \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \big(u_y^* dx_* - u_x^* dy_*\big) =$$

$$= p_0 - \frac{1}{2}\big(u_x^2 + u_y^2\big) + \frac{1}{2}\big(u_x^2(0,0) + u_y^2(0,0)\big) +$$

$$+\omega_0 \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \left[\Big(\frac{\omega_0 x_*}{2} - \frac{\partial \varPhi^*}{\partial x_*}\Big) dx_* - \Big(-\frac{\omega_0 y_*}{2} + \frac{\partial \varPhi^*}{\partial y_*}\Big) dy_*\right] =$$

$$= p_0 - \frac{1}{2}\big(u_x^2 + u_y^2\big) + \frac{1}{2}\big(u_x^2(0,0) + u_y^2(0,0)\big) +$$

$$+\frac{\omega_0^2}{4}\big(x^2 + y^2\big) - \omega_0 \varPhi + \omega_0 \varPhi(0,0).$$

Таким образом,

$$p = p_1 + \frac{\omega_0^2}{4}\big(x^2 + y^2\big) - \frac{1}{2}\big(u_x^2 + u_y^2\big) - \omega_0 \varPhi, \tag{4.8}$$

где p_1 – произвольная действительная константа.

Решение (4.6), (4.7), (4.8) системы КГД было построено другим способом в [9] на с. 90. Точные решения двумерной стационарной системы Навье–Стокса с постоянным вихрем рассматривались ранее, например, в [4].

Пример 5. Рассмотрим гармоническую на всей плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y}$ функцию

$$\varPhi = \varPhi_0 \cos\Big(\frac{x}{H}\Big) \mathrm{ch}\Big(\frac{y}{H}\Big). \tag{4.9}$$

Здесь $\varPhi_0$ и H – заданные положительные постоянные, имеющие размерности *см*$^2/$*с* и *см* соответственно. По формулам (4.6) и (4.7) вычисляем

$$u_x = -\frac{\omega_0 y}{2} + \frac{\varPhi_0}{H} \cos\Big(\frac{x}{H}\Big) \mathrm{sh}\Big(\frac{y}{H}\Big), \tag{4.10}$$

$$u_y = \frac{\omega_0 x}{2} + \frac{\varPhi_0}{H} \sin\Big(\frac{x}{H}\Big) \mathrm{ch}\Big(\frac{y}{H}\Big). \tag{4.11}$$

С помощью (4.8) находим давление

$$p = \frac{\omega_0^2}{4}\big(x^2 + y^2\big) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0 y}{2} + \frac{\varPhi_0}{H} \cos\Big(\frac{x}{H}\Big) \mathrm{sh}\Big(\frac{y}{H}\Big)\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0 x}{2} + \frac{\varPhi_0}{H} \sin\Big(\frac{x}{H}\Big) \mathrm{ch}\Big(\frac{y}{H}\Big)\right)^2 - \omega_0 \varPhi_0 \cos\Big(\frac{x}{H}\Big) \mathrm{ch}\Big(\frac{y}{H}\Big) + p_1. \tag{4.12}$$

Зависимости (4.10), (4.11) и (4.12) задают общее точное решение стационарных систем Навье–Стокса и КГД. Поскольку

$$\Delta u_x = 0, \qquad \Delta u_y = 0,$$

они удовлетворяют также уравнениям Эйлера.

Заключение

Актуальной является разработка оригинальных методов построения точных решений трехмерной квазигидродинамической системы. При этом особый интерес представляют течения, не являющиеся потенциальными или однородно-винтовыми. Научное направление, связанное с конструированием новых вычислительных алгоритмов на основе регуляризованных уравнений гидродинамики и их обоснованием, также интенсивно развивается. Некоторые полученные в последнее время результаты представлены в [16–18].

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[3] Riley N., Drazin P.G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.

[4] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.

[5] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.

[6] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

[7] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[8] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[9] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[10] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5–15. https://doi.org/10.26456/vtpmk169

[11] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье-Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13–25. https://doi.org/10.26456/vtpmk176

[12] Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 84–96. https://doi.org/10.26456/vtpmk557

[13] Шеретов Ю.В. О классах точных решений квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 5–17. https://doi.org/10.26456/vtpmk592

[14] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

[15] Prosviryakov E.Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows // Vestnik SamGTU. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki. 2020. Vol. 24, № 2. Pp. 319–330. https://doi.org/10.14498/vsgtu1766

[16] Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. 30 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66

[17] Balashov V.A., Zlotnik A.A. An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // Journal of Computational Dynamics. 2020. Vol. 7, № 2. Pp. 291–312. https://doi.org/10.3934/jcd.2020012

[18] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Регуляризованная модель типа фазового поля для описания динамики системы «жидкость-твердое тело». Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. 29 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-96

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. О построении точных решений двумерной квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. С. 5–20. https://doi.org/10.26456/vtpmk605

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON THE CONSTRUCTION OF EXACT SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL QUASI-HYDRODYNAMIC SYSTEM

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis Department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.
E-mail: *Sheretov.YV@tversu.ru*

Received 15.01.2021, revised 03.02.2021.

New methods for constructing exact solutions of the quasi–hydrodynamic system for two-dimensional flows are proposed. It is shown that with any smooth solution of some overdetermined system of partial differential equations one can associate common exact solution of the quasi–hydrodynamic system and the Navier–Stokes system. Any eigenfunction of the two–dimensional Laplace operator also generates common solution to these systems. Examples of solutions are given in both the non-stationary and stationary cases. The principle of superposition of the fluid velocity vector fields for specific flows is discussed.

Keywords: Navier–Stokes system, quasi–hydrodynamic system, exact solutions, principle of superposition.

Citation

Sheretov Yu.V., "On the construction of exact solutions of two-dimensional quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 1, 5–20(in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk605

References

[1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[2] Landau L.D., Lifshits E.M., *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 736 pp.

[3] Riley N., Drazin P.G., *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 pp.

[4] Shmyglevskij Yu.D., *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti [Analytical Investigations of Gas and Fluid Dynamics]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 1999 (in Russian), 232 pp.

[5] Pukhnachev V.V., "Symmetries in the Navier-Stokes equations", *Uspekhi mekhaniki [Achievements in Mechanics]*, 2006, №1, 6–76 (in Russian).

[6] Wang C.Y., "Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations", *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.

[7] Sheretov Yu.V., "On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).

[8] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[9] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[10] Sheretov Yu.V., "On the common exact solutions of stationary Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems, not satisfying to Euler equations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 2, 5–15 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk169.

[11] Sheretov Yu.V., "On common exact solutions of Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems for nonstationary flows", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 13–25 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk176.

[12] Sheretov Yu.V., "On the solutions of Cauchy problem for quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 1, 84–96 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk557.

[13] Sheretov Yu.V., "On classes of exact solutions of quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 5–17 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk592.

[14] Vladimirov V.S., *Uravneniya Matematicheskoi Fiziki [Equations of Mathematical Physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (in Russian), 512 pp.

[15] Prosviryakov E.Yu., "Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows", *Vestnik SamGTU. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, **24**:2 (2020), 319–330, https://doi.org/10.14498/vsgtu1766.

[16] Stenina T.V., Elizarova T.G., Kraposhin M.V., *Regularized equations for disk pump simulation problems in OpenFOAM implementation*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2020 (in Russian), 30 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66.

[17] Balashov V.A., Zlotnik A.A., "An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations", *Journal of Computational Dynamics*, **7**:2 (2020), 291–312, https://doi.org/10.3934/jcd.2020012.

[18] Balashov V.A., Savenkov E.B., *Regularized phase-field model for description of dynamics of "solid-fluid" system*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2020 (in Russian), 29 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2020-96.