ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 517.982.43, 519.213.7

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ МНОГОМЕРНЫХ СТРОГО УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РЯДАМИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Архипов С.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 10.02.2021, после переработки 02.04.2021.

В статье рассматриваются многомерные строго устойчивые распределения. Как известно, функции плотности этих законов не представляются в явном виде за исключением известных законов Гаусса и Коши. Отправным пунктом для исследований являются характеристические функции. Имеется несколько различных форм их представления. В статье выбирается форма, предложенная в [1]. Применение обратного преобразования Фурье совместно с суммированием интегралов по Абелю позволило получить разложения функций плотности многомерных устойчивых распределений (см.[1], [12]). Основным результатом статьи являются представления этих функций с помощью рядов обобщенных функций над пространством Лизоркина. Они позволяют определить порядок убывания главного члена разложения на бесконечности для любого радиального направления. Кроме того, выведенные формулы дают возможность увидеть структуру формирования слагаемых в разложениях. В следствии приводятся примеры для различных случаев носителей спектральной меры многомерных устойчивых законов.

Ключевые слова: многомерные строго устойчивые распределения, ряды обобщенных функций, поведение функции плотности для различных радиальных направлений.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. С. 33–47.
https://doi.org/10.26456/vtpmk606

Введение

В статье рассматриваются многомерные строго устойчивые распределения (МСУР). Говорят, что случайный вектор X имеет указанное распределение, если для $\forall a_1, a_2 > 0 \quad \exists a > 0$ такие, что выполняется следующее равенство в смысле функций распределения:

$$a_1X_1 + a_2X_2 \overset{\mathrm{d}}{=} aX, \tag{1}$$

где X, X_1, X_2 – независимые одинаково распределенные случайные векторы в $R^n, n \geq 2$. Особенностью МСУР является тот факт, почти все функции плотности не имеют явного представления. Исключением являются многомерные нормальные распределения и распределения Коши.

Равенство (1) позволяет получить выражения для характеристических функций МСУР. Первый результат относится к 1937 году и принадлежит Фельдгейму [14]. Наиболее часто предлагается, так называемое представление в форме (A). Оно определяется характеристическим показателем $\alpha \in (0, 2)$ и спектральной мерой на единичной сфере $M(d\xi)$

$$g(t) = \begin{cases} -|t|^{\alpha} \int_{S^{n-1}} |(\tau, \xi)|^{\alpha} \left(1 - i \cdot sign\left((\tau, \xi)\right) tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) M(d\xi), & \alpha \neq 1, \\ -\frac{\pi}{2} |t| \int_{S^{n-1}} |(\tau, \xi)| \left(1 + i \cdot sign\left((\tau, \xi)\right)\right) M(d\xi), & \alpha = 1, \end{cases}$$

где $g(t) = lnf(t)$ и $t = |t| \tau, \tau \in S^{n-1}$.

В монографии [6] предложены другие представления: формы (B) и (M). В данной статье предлагается использовать представление $f(t)$ при $\alpha \neq 1$, введенное в [1,12] и позволяющее получить наиболее простой вид слагаемых в нижеследующей теореме. Кроме того, будем предполагать, что спектральная мера абсолютно непрерывна, т. е.

$$M(d\xi) = \mu(\xi) d\xi, \quad \mu(\xi) \in C^{\infty}\left(S^{n-1}\right),$$

а логарифм характеристической функции равен

$$g(t) = \begin{cases} \left\{\Gamma(-\alpha) \int_{S^{n-1}} (-it, \xi)^{\alpha} \left(1 - i \cdot sign\left((\tau, \xi)\right)\right) \mu(\xi) d\xi, & \alpha \neq 1, \\ -\frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} |(\tau, \xi)| \mu(\xi) d\xi, & \alpha = 1, \end{cases} \tag{2}$$

причем в последнем случае предполагается, что $\mu(\xi) = \mu(-\xi) \quad \forall \xi \in S^{n-1}$.

Для описания плотностей МСУР наиболее часто применяют разложения в ряды. Ранее они были получены для сферически симметричных распределений [17], для модуля функции плотности [15]. В [1,12] были получены разложения функций плотности на основе Фурье-анализа на сфере. Позднее Заиграев в [16] получил аналогичные представления для МСУР в форме (A).

Для того, чтобы определить порядок степенного убывания в разложениях плотностей из [1,12] применяется подход с помощью обобщенных функций (о.ф.), который позволяет увидеть структуру формирования каждого слагаемого. Целью настоящей работы является следующая

Теорема ([1], гл.3).*Пусть* $\mu(\xi) \in C^{\infty}\left(S^{n-1}\right)$. *Тогда о.ф., соответствующая плотности МСУР и рассматриваемая над основным пространством* Φ *Лизоркина, представляется в виде:*

При $0 < \alpha < 1$

$$p = \delta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(p.f. \frac{\mu(\xi)}{|x|^{\alpha+n}}\right)^{*k}}{k!},$$

при $1 \leq \alpha < 2$

$$p = \delta + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\left(p.f.\frac{\mu(\xi)}{|x|^{\alpha+n}}\right)^{*k}}{k!} + \lim_{\varepsilon \to 0} R_m^\varepsilon,$$

где δ – дельта-функция Дирака, R_m^ε – функционал, порожденный остатком (12), $m < \infty$.

1. Некоторые сведения из теории обобщенных функций

О.ф., построенные по функции $f(x)$ над некоторым пространством основных функций, будем обозначать следующим образом

$$(f, \varphi) \equiv \int_{R^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

или буквой f. Такой функционал называется регулярным или функционалом типа функции.

Так как (см. [5], с. 108-109) для каждого основного пространства, содержащего все финитные бесконечно дифференцируемые функции, значения регулярного функционала (f, φ) на основных функциях из этого пространства однозначно с точностью до значений на множестве меры ноль определяют функцию $f(x)$, то будем отождествлять функцию $f(x)$ и (f, φ) и говорить, что $f(x)$ совпадает с f.

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ последовательность о.ф. Если для любой основной функции $\varphi(x)$ имеет место равенство

$$\lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi) = (f, \varphi),$$

то говорят, что последовательность сходится к о.ф. f.

Будем говорить, что ряд из о.ф. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится к о.ф. f, если последовательность частичных сумм $f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ сходится к f.

Прежде чем перейти к изложению специальных вопросов отметим, что материал этого пункта основан на конструкциях, предложенных в работах Самко С.Г. [8-10] и связанных с теорией гиперсингулярных интегралов.

В качестве пространства основных функций будем использовать пространство Лизоркина, введенное в [11]. Определим его. Пусть S состоит из бесконечно дифференцируемых функций в R^n, убывающих вместе со своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Это так называемый шварцев класс функций. Рассмотрим его подпространство:

$$\Psi = \left\{\psi : \psi \in S, \left(D^j \psi\right)(0) = 0, \quad |j| = 0, 1, 2, \ldots\right\}.$$

Определение 1. *Пространство Лизоркина определяется следующим образом*

$$\Phi = \{\varphi : \varphi = F\psi(t), \psi \in \Psi\},$$

где

$$F\psi(t) = \int_{R^n} \exp(i(x, t))\, \psi(t)\, dt$$

– преобразование Фурье функции $\psi(t)$. Пространства о.ф. над Φ и Ψ будем обозначать Φ' и Ψ' соответственно.

Пусть

$$J=\int_{R^n}\frac{\theta(\xi)}{|x|^{\gamma+n}}\varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Необходимо построить функционалы, порождаемые однородными функциями $\theta(\xi)/|x|^{\gamma+n}, \gamma>0$. Интеграл (3) имеет степенную особенность в нуле. Поэтому для построения нужно воспользоваться понятием регуляризации расходящихся интегралов, которое рассматривалось в [4], гл.1, § 1.7. Оно состоит в следующем: строят функционал над Φ, соответствующий $\theta(\xi)/|x|^{\gamma+n}$ таким образом, чтобы он на основные функции $\varphi(x)$, равные нулю в окрестности нуля, действовал по формуле (3). Отметим, что такой функционал по построению всюду вне начала координат совпадает (в приведенном выше смысле) с функцией $\theta(\xi)/|x|^{\gamma+n}$.

Для определения регуляризованного функционала воспользуемся понятием конечной части интеграла по Адамару (см. [13], с.424).

Определение 2. *Если в представлении*

$$\int_{|x|>\varepsilon}f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{L}a_k\varepsilon^{-\nu_k}+b\ln\frac{1}{\varepsilon}+A_\varepsilon,\qquad \nu_k>0$$

существует предел последнего слагаемого при $\varepsilon\to0$, то полагают (p.f. – конечная часть)

$$p.f.\int_{R^n}f(x)\,dx=A_0.$$

Исследуем интеграл

$$J=\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\theta(\xi)}{|x|^{\gamma+n}}\varphi(x)\,dx,\qquad \varphi(x)\in\Phi.$$

Разобьем его на две области $\varepsilon<|x|<1, |x|\geq1$, затем в интеграле по первой области добавим и вычтем отрезок ряда Тейлора функции $\varphi(x)$. Получим

$$J=\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\theta(\xi)}{|x|^{\gamma+n}}\varphi(x)\,dx=\int_{\varepsilon<|x|<1}\theta(\xi)\,\frac{\varphi(x)-P^{[\gamma]}(0)}{|x|^{\gamma+n}}dx+$$
$$+\int_{|x|\geq1}\frac{\theta(\xi)}{|x|^{\gamma+n}}\varphi(x)\,dx+\sum_{|j|\leq[\gamma]}\frac{\left(D^j\varphi\right)(0)}{j!}\cdot\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{x^j\theta(\xi)}{|x|^{\gamma+n}}dx,$$

где $P^{[\gamma]}(0)=\sum_{|j|\leq[\gamma]}\frac{(D^j\varphi)(0)}{j!}x^j$.

Первые два интеграла имеют конечный предел при $\varepsilon\to0$. Вычислим интеграл в третьем слагаемом при условии, что γ – нецелое:

$$J_3=\sum_{|j|\leq[\gamma]}\frac{\left(D^j\varphi\right)(0)}{j!}\cdot\int_{\varepsilon<|x|<1}\frac{x^j\theta(\xi)}{|x|^{\gamma+n}}dx=$$

$$= \sum_{|j|\le[\gamma]} \frac{\left(D^j\varphi\right)(0)}{j!} \cdot \int_\varepsilon^1 |x|^{|j|-\gamma-1}\, d\,|x| \int_{S^{n-1}} \xi^j \theta(\xi)\, d\xi.$$

Если для сферических моментов ввести обозначение $\theta_j = \int_{S^{n-1}} \xi^j \theta(\xi)\, d\xi$, то

$$J_3 = \sum_{|j|\le[\gamma]} \frac{\left(D^j\varphi\right)(0)}{j!} \cdot \theta_j \cdot \left(\frac{1}{(|j|-\gamma)} - \frac{\varepsilon^{|j|-\gamma}}{(|j|-\gamma)} \right).$$

Если же γ – целое, то

$$J_3 = \sum_{|j|\le\gamma-1} \frac{\left(D^j\varphi\right)(0)}{j!} \cdot \theta_j \cdot \left(\frac{1}{(|j|-\gamma)} - \frac{\varepsilon^{|j|-\gamma}}{(|j|-\gamma)} \right) +$$

$$+ \sum_{|j|=[\gamma]} \frac{\left(D^j\varphi\right)(0)}{j!} \cdot \theta_j \cdot ln\varepsilon.$$

Таким образом, в силу определения конечной части интеграла в нуле получаем следующее представление

$$p.f. \int_{R^n} \frac{\theta(\xi)}{|x|^{\gamma+n}} \varphi(x)\, dx = \int_{R^n} \theta(\xi) \frac{\varphi(x) - \chi(x) P^{[\gamma]}(0)}{|x|^{\gamma+n}} dx +$$

$$+ {\sum_{|j|\le[\gamma]}}' \frac{\theta_j}{(|j|-\gamma)} \frac{\left(D^j\varphi\right)(0)}{j!}, \qquad (4)$$

где $\chi(x)$ – х.ф. шара $|x| < 1$, а штрих у суммы означает пропуск слагаемых с номером $|j| = \gamma$, если γ – целое. Обозначим о.ф. в (4) через $p.f.\theta(\xi) / |x|^{\gamma+n}$. Отметим, что если бы $\varphi(x)$ вместе со своими производными до порядка γ равнялась нулю в окрестности нуля, то

$$p.f. \int_{R^n} \frac{\theta(\xi)}{|x|^{\gamma+n}} \varphi(x)\, dx = \int_{R^n} \frac{\theta(\xi)}{|x|^{\gamma+n}} \varphi(x)\, dx,$$

то есть $p.f.\theta(\xi) / |x|^{\gamma+n}$ является регуляризацией расходящегося интеграла (3) и в силу этого везде кроме начала координат совпадает с $\theta(\xi) / |x|^{\gamma+n}$.

2. Преобразование Фурье о.ф. $p.f.\theta(\xi) / |x|^{\gamma+n}$

Определение 3. *Преобразование Фурье о.ф.* $\mathbb{F}f$ *над основным пространством* Φ *определяется равенством*

$$(\mathbb{F}f, \varphi) = (f, F\varphi). \qquad (5)$$

Следующая лемма выявляет связь между о.ф., порожденными функциями $\mu(\xi) / |x|^{\alpha+n}$ и $g(t)$ из (2).

Лемма 1. *Пусть* $\mu(\xi) \in C^{\infty}\left(S^{n-1}\right)$. *Тогда*

$$\mathbb{F}\left(p.f.\frac{\mu(\xi)}{|x|^{\alpha+n}}\right) = g, \tag{6}$$

где

$$g = \int_{R^n} g(t)\,\psi(t)\,dt, \qquad 0 < \alpha < 2,$$

а преобразование Фурье понимается в смысле Φ*-распределений.*

Доказательство. В соответствии с определением преобразования Фурье о.ф. (5) необходимо доказать равенство:

$$p.f.\int_{R^n} \frac{\theta(\xi)}{|x|^{\alpha+n}}\varphi(x)\,dx = \int_{R^n} g(t)\,\psi(t)\,dt. \tag{7}$$

Пусть сначала $\alpha \neq 1$. Действительно, тогда имеет место цепочка равенств

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\mu(\xi)}{|x|^{\alpha+n}}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{R^n} \psi(t) \int_{|x|>\varepsilon} \exp\left(i\,(t,\xi)\,|x|\right) \frac{\mu(\xi)}{|x|^{\alpha+n}}\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{R^n} \psi(t) \int\limits_{S^{n-1}} \mu(\xi) \left\{ \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left(\exp(i(t,\xi)|x|) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(i(t,\xi)|x|)^k}{k!} \right) |x|^{-\alpha-1} d|x| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(i(t,\xi))^k}{k!} \int_{\varepsilon}^{\infty} |x|^{k-\alpha-1} d|x| \right\} d\xi dt. \tag{8}$$

Первый интеграл по $|x|$ имеет предел при $\varepsilon \to 0$. Чтобы его вычислить, применим формулу 2.319.5 из [7]. Окончательно первое слагаемое будет равно

$$\int_{R^n} g(t)\,\psi(t)\,dt.$$

Второй интеграл по $|x|$ в (8) равен

$$\sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{1}{(k-\alpha)} \int_{R^n} \psi(t) \int_{S^{n-1}} \mu(\xi) \frac{\left(i\,(t,\xi)\right)^k}{k!}\,d\xi dt \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-k}}.$$

По определению конечной части интеграла в нуле

$$p.f.\int_{R^n} \frac{\theta(\xi)}{|x|^{\alpha+n}}\varphi(x)\,dx = \int_{R^n} g(t)\,\psi(t)\,dt.$$

Напомним, что при $\alpha = 1$ $\mu(\xi)$ – четная функция. Тогда

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\mu(\xi)}{|x|^{1+n}} \varphi(x)\, dx =$$
$$= \int_{R^n} \psi(t) \int_{|x|>\varepsilon} \exp\left(i\,(t,\xi)\,|x|\right) \frac{\mu(\xi)}{|x|^{1+n}}\, dxdt =$$
$$\int_{R^n} \psi(t) \int_{S^{n-1}} \mu(\xi) \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos\left((t,\xi)\,|x|\right) - 1}{|x|^2} d\,|x| + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{|x|^2} d\,|x| \right\} d\xi dt.$$

Вычислим отдельно первое и второе слагаемое. При интегрировании первого слагаемого будем учитывать четность подынтегральных функций на сфере. Применение формулы 2.5.29.4.[7], приводит к выражению

$$-\frac{\pi}{2} \int_{R^n} \psi(t) \int_{S^{n-1}} |t,\xi|\, \mu(\xi)\, d\xi dt.$$

Второе слагаемое дает

$$-\frac{1}{\varepsilon} \int_{R^n} \psi(t) \int_{S^{n-1}} \mu(\xi)\, d\xi dt.$$

Понятно, что и при $\alpha = 1$ (7) выполняется. □

3. О преобразовании Фурье свертки о.ф.

Важную роль в этом пункте играет теорема Гельфанда-Шилова о преобразовании Фурье свертки о.ф. (см. [5], с.179). Введем несколько понятий, используемых в ее формулировке.

Определение 4 (5, с. 128). *Функция q называется мультипликатором в пространстве Ψ, если для любой $\psi \in \Psi$: $q(x) * \psi(x) \in \Psi$ и из $\psi_k \to 0$ следует $q(x) * \psi_k(x) \to 0$ по топологии Ψ.*

Операция в пространстве Ψ, определяемая формулой

$$(fq, \psi) = (f, q\psi)$$

называется умножением на функцию $q(t)$, а $q(t)$ мультипликатором в Ψ'.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что $g(t) = |t|^{\alpha} g(\tau)$ из (2) является мультипликатором в Ψ, если $\mu(\xi) \in C^{\infty}\left(S^{n-1}\right)$, так как тогда $g(t/|t|) \in C^{\infty}\left(S^{n-1}\right)$, $|t|^{\alpha} \psi(t) \in \Psi$ и $g(t/|t|) * \psi_1(t) \in \Psi$. (см. [1] с. 26).

Определение 5 (см. 5, с. 169). *О.ф. f_0 называется свертывателем в пространстве Φ, если*

$$f_0 * \varphi = \int_{R^n} f_0(y-x)\, \varphi(x)\, dx \in \Phi$$

для любой $\varphi \in \Phi$ и из $\varphi_k \to 0$ следует, что $f_0 * \varphi_k \to 0$ по топологии Φ.

Операцию

$$(f_0 * f, \varphi) = (f, f_0 * \varphi)$$

будем называть сверткой со свёртывателем f_0.

k-кратная свертка определяется рекуррентно, а именно

$$\left(f^{*k}, \varphi\right) = \left(f^{*(k-1)}, f * \varphi\right), \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

Приведем теперь формулировку теоремы Гельфанда-Шилова в терминах пространств из нашей задачи.

Пусть даны основное пространство Φ Лизоркина с непрерывным сдвигом (этот факт доказывается в [5]) и двойственное пространство Ψ. Если функционал g типа функции $g\,(t)$ является мультипликатором в пространстве $\Psi^{'}$, то функционал $f = \mathbb{F}^{-1}g-$ свертыватель в пространстве $\Phi^{'}$ и имеет место формула

$$\mathbb{F}\,(f * f_1) = \mathbb{F}f \cdot \mathbb{F}f_1.$$

Лемма 2. *Пусть $\mu\,(\xi) \in C^{\infty}\left(S^{n-1}\right)$. Тогда $p.f.\theta\,(\xi)\,/\,|x|^{\alpha+n}$ является свертывателем в Φ и выполняется равенство*

$$\mathbb{F}\left(p.f.\frac{\mu\,(\xi)}{|x|^{\alpha+n}}\right)^{*k} = g^k, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{9}$$

где $*k$ – кратная свертка о.ф., а

$$g^k = \int_{R^n} g^k\,(t)\,\psi\,(t)\,dt.$$

Доказательство леммы при $k = 2$ сразу вытекает из теоремы Гельфанда-Шилова, рассмотренной для о.ф. g и $p.f.\theta\,(\xi)\,/\,|x|^{\alpha+n}$. В силу связи (6) достаточно проверить лишь тот факт, что g является мультипликатором в Φ (см. замечание 1). Для $k > 2$ формула (9) получается рекуррентным образом из доказательства теоремы Гельфанда-Шилова ([5], с.180).

4. Доказательство теоремы

Запишем формулу для обратного преобразования Фурье над основным пространством Φ:

$$\int_{R^n} p\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx = (2\pi)^{-n}\int_{R^n}\int_{R^n} \exp\left(-i\,(t,x) + g\,(t)\right)dt\varphi\,(x)\,dx.$$

В силу сходимости интеграла в правой части можно применить суммирование интегралов по Абелю

$$\int_{R^n} p\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx = (2\pi)^{-n}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R^n}\int_{R^n} \exp\left(-i\,(t,x) - \varepsilon\,|t| + g\,(t)\right)dt\varphi\,(x)\,dx. \tag{10}$$

Наша цель – получить разложения в терминах о.ф., соответствующие (2.18) и (2,19) из [1], позволяющие определить носитель функции плотности. Для этого представим х.ф. по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$\exp\left(g\,(t)\right) = 1 + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{g^k\,(t)}{k!} + r_m\,(t), \tag{11}$$

где

$$r_m(t) = \frac{|t|^{\alpha m} g^m(\tau)}{(m-1)!} \int_0^1 (1-u)^{m-1} e^{|t|^\alpha g(\tau) u} du.$$

Дальнейшие рассуждения возможны только в классе о.ф. Они сводятся к использованию формулы

$$\psi(t) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \exp(-i(t,x)) \varphi(x) \, dx.$$

После подстановки (11) в (10) получим

$$p = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \exp(-\varepsilon |t|) \psi(t) \, d|t| \, d\tau + \right.$$
$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \left(\int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \exp(-\varepsilon |t|) \frac{g^k(t)}{k!} \psi(t) |t|^{n-1} d|t| \, d\tau \right) +$$
$$\left. + (2\pi)^{-n} \int_{R^n} R_m^\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx \right\},$$

где

$$R_m^\varepsilon(x) = \int_{R^n} \exp(-i(t,x) - \varepsilon |t|) \cdot r_m(t) \, dt. \tag{12}$$

В силу того, что $\psi(t) \in S$, можно перейти к пределу по $\varepsilon \to 0$ в первых двух слагаемых. После преобразований получаем

$$p = \int_{R^n} \psi(t) \, dt + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\int_{R^n} \frac{g^k(t)}{k!} \psi(t) \, dt \right) + (2\pi)^{-n} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R^n} R_m^\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx.$$

Соотношение (см. [2], с. 106):

$$\mathbb{F}^{-1} 1 = \delta$$

или $(1, \psi(t)) = (\delta(x), \varphi(x))$ позволяет определить первое слагаемое. Это дельта-функция Дирака.

Формула (9) дает следующие k слагаемых. Это k–кратные свертки о.ф.

$$p.f.\theta(\xi) / |x|^{\alpha+n}.$$

Остаток $R_m(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} R_m^\varepsilon(x)$ мажорируется сходящимся рядом только при $0 < \alpha < 1$. Этот факт определяется поведением множителя

$$a_m = \frac{\Gamma\left(l + \frac{\alpha m + n}{2}\right)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(l - \frac{\alpha m}{2}\right)},$$

отвечающего за сходимость ряда по m. Используя асимптотическое поведение гамма-функции на бесконечности, можно сделать вывод о том, что $a_m \to 0$ при $0 < \alpha < 1$ и $a_m \to \infty$ при $1 \le \alpha < 2$. Поэтому во втором случае разложение возможно лишь для любого конечного m. $\square$

Введем обозначения: $\Gamma = \{x : x \in \Gamma \Rightarrow c \cdot x \in \Gamma, c > 0\}$ – конус, $\gamma = \Gamma \cap S^{n-1}$ $convA$ – выпуклая оболочка множества $A, intA$ – внутренность Γ.

Следствие 1. *Пусть* Γ *– острый выпуклый конус в* R^n *и* $supp\mu(\xi) = \gamma$. *Имеют место следующие утверждения о порядке убывания главного члена разложения при* $|x| \to \infty$ *плотностей МСУР:*

i) $p(x) = O\left(|x|^{-\alpha-n}\right)$ *для* $\xi \in \gamma$. *Если же* $\xi \notin \gamma$, *то* $p(x) = 0$ *при* $0 < \alpha < 1$ *и как отмечено В.М. Золотаревым в американском издании книги [6]* $p(x)$ *для* $x \notin int\Gamma$ *и* $|x| \to \infty$ *имеет экспоненциальный порядок убывания при* $1 \le \alpha < 2$.

ii) Если γ *образует невыпуклую область на сфере, то* $p(x) = O\left(|x|^{-\alpha-n}\right)$ *для направлений* $\xi \in \gamma$ *и* $p(x) = O\left(|x|^{-2\alpha-n}\right)$ *для* $\xi \in \left((conv\Gamma) \cap S^{n-1}\right) \setminus \gamma$.

iii) Если носителем спектральной меры является несколько областей $\gamma_1, \ldots, \gamma_L$ *и порожденный ими конус не является острым, то* $p(x) = O\left(|x|^{-\alpha-n}\right)$ *для* $\xi \in T_1 = \{\xi : \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_L\}$. *Для рассмотрения остальных направлений* ξ *введем обозначение*

$$T_k = \left\{\xi : \left((\Gamma_{j_1} + \ldots + \Gamma_{j_k}) \cap S^{n-1}\right) \setminus T_{k-1}, \quad k = \overline{2,n}\right\},$$

где Γ_j*- конусы, порожденные областями* γ_j *на сфере. Тогда*
$p(x) = O\left(|x|^{-\alpha k-n}\right)$ *для* $\xi \in T_k, \quad k = \overline{2,n}$.

Доказательство. Выводы о представимости $p(x)$ главного члена разложениями в каждом направлении $\xi \in S^{n-1}$ в зависимости от структуры носителя спектральной плотности $\mu(\xi)$ основаны на двух фактах. Во-первых, формулы (8) и (9) получены таким образом, что они соответствуют разложениям (2.18) и (2.19) из [1]. Во-вторых, о.ф. над пространством S с носителем в остром выпуклом конусе Γ образуют свёрточную алгебру (см. [3], с. 35). Поэтому, принимая во внимание, что $\Phi' \subset S'$, несложно вывести следующую импликацию:

$$supp\left(p.f. \frac{\mu(\xi)}{|x|^{\alpha+n}}\right) = \Gamma \Rightarrow supp\left(\left(p.f. \frac{\mu(\xi)}{|x|^{\alpha+n}}\right)^{*k}\right) = \Gamma.$$

Кроме того, при доказательстве необходимо использовать включение, справедливое для носителей о.ф. из класса S' (см. §1.7 [3]):

$$supp\,(f_1 * f_2) \subset \overline{supp\,f_1 + supp\,f_2},$$

где $\overline{B}$ – замыкание B. Связывая воедино эти факты, приходим к заключениям, сделанным в пунктах i), ii), iii). □

Заключение

В статье рассматривался обширный класс многомерных распределений – устойчивые законы, не имеющие явного представления функций плотности. Ранее в [1,12] для них были получены разложения в ряд. Для того, чтобы определить порядок степенного убывания в разложениях плотностей, применяется подход с помощью обобщенных функций, который позволяет увидеть структуру формирования каждого слагаемого. Основным результатом статьи является теорема, позволяющая определить порядок убывания главного члена разложения на бесконечности для любого радиального направления.

Список литературы

[1] Архипов С.В. Разложения плотности строго устойчивых распределений в $\mathbb{R}^n$ в случае абсолютно непрерывной спектральной меры: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. 1989. 102 с.

[2] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.

[3] Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986. 304 с.

[4] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: ГИФМЛ, 1958. 440 с.

[5] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. М.: ГИФМЛ, 1958. 307 с.

[6] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.

[7] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.

[8] Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов: Изд-во Ростов. ун-та, 1984. 208 с.

[9] Самко С.Г. Обобщённые риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы с однородными характеристиками, их символы и обращение // Труды Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук СССР. 1980. Т. 156. С. 152–222.

[10] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[11] Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E^n)$. Теоремы вложения // Математический сборник. 1963. Т. 60(102), № 3. С. 325–353.

[12] Arkhipov S.V. The density function's asymptotic representation in the case of multidimensional strictly stable distributions // Stability Problems for Stochastic Models. Eds. by Kalashnikov V.V., Zolotarev V.M.. Series: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1412. Berlin, Heidelberg: Springer, 1989. https://doi.org/10.1007/BFb0084161

[13] Edwards R.E. Functional Analysis. Theory and Applications. Holt, Rinehart and Winston, 1965. 781 p.

[14] Feldheim E. Etude de la stabilitede probabilite. These de la Faculte des Sciences de Paris. 1937. 65 p.

[15] Friestedt B. Expansions for density of the absolute value of a strictly stable vector // Annals of Mathematical Statistics. 1972. Vol. 43. Pp. 669–672.

[16] Zaigraev A. On asymptotic properties of multidimensional α-stable densities // Mathematische Nachrichten. 2006. Vol. 279, № 16. Pp. 1–20.

[17] Zolotarev V.M. Integral Transformations of distributions and estimatesof parameters of multidimensional spherically symmetric stable laws // Contributions to Prabability. A collection of Papers dedicated to Eugene Lukacs. New York: Academic Press, 1981. Pp. 283–305.

Образец цитирования

Архипов С.В. О представлении функций плотности многомерных строго устойчивых распределений рядами обобщенных функций // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. С. 33–47. https://doi.org/10.26456/vtpmk606

Сведения об авторах

1. **Архипов Сергей Викторович**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

REPRESENTATION OF THE DENSITY FUNCTIONS OF A MULTIDIMENSIONAL STRICTLY STABLE DISTRIBUTIONS BY SERIES OF GENERALIZED FUNCTIONS

Arkhipov Sergey Viktorovich
Associate Professor at the Department of Mathematical Statistics and System Analysis, Tver State University
170100, Russia, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.

Received 10.02.2021, revised 02.04.2021.

The article discusses multidimensional strictly stable distributions. As is known, the density functions of these laws are not represented in closed form, with the exception of the well-known laws of Gauss and Cauchy. Characteristic functions are the starting point for research. There are several different forms of their presentation. The article chooses the form proposed in [1]. The application of the inverse Fourier transform together with the Abel summation of the integrals made it possible to obtain expansions of the density functions of multidimensional stable distributions (see [1], [12]). The main result of the article is the representation of these functions using series of generalized functions over the Lizorkin space. They make it possible to determine the order of decay of the principal term of the expansion at infinity for any radial direction. In addition, the derived formulas make it possible to see the structure of the formation of terms in expansions. In the corollary, examples are given for various cases of the support of the spectral measure of multidimensional stable laws.

Keywords: multidimensional strictly stable distributions, series of generalized functions, behavior of the density function for different radial directions.

Citation

Arkhipov S.V., "Representation of the density functions of a multidimensional strictly stable distributions by series of generalized functions", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 1, 33–47(in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk606

References

[1] Arkhipov S.V., *Razlozheniya plotnosti strogo ustojchivykh raspredelenij v $\mathbb{R}n$ v sluchae absolyutno nepreryvnoj spektralnoj mery*, PhD Thesis, 1989 (in Russian), 102 pp.

[2] Vladimirov V.S., *Obobshchennye funktsii v matematicheskoj fizike [Generalized functions in mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1979 (in Russian), 318 pp.

[3] Vladimirov V.S., Drozzinov Yu.N., Zavialov B.I., *Tauberian Theorems for Generalized Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988, 292 pp.

[4] Gelfand I.M., Shilov G.E., *Obobshchennye funktsii i dejstviya nad nimi [Generalized functions and actions on them]*, GIFML Publ., Moscow, 1958 (in Russian), 440 pp.

[5] Gelfand I.M., Shilov G.E., *Prostranstva osnovnykh i obobshchennykh funktsij [Spaces of basic and generalized functions]*, GIFML Publ., Moscow, 1958 (in Russian), 307 pp.

[6] Zolotarev V.M., *Odnomernye ustojchivye raspredeleniya [One-dimensional stable distributions]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian), 304 pp.

[7] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I., *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii [Integrals and series. Elementary functions]*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (in Russian), 798 pp.

[8] Samko S.G., *Gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya [Hypersingular Integrals and Their Applications]*, Rostov University Press, Rostov, 1984 (in Russian), 208 pp.

[9] Samko S.G., "Obobshchyonnye rissovy potentsialy i gipersingulyarnye integraly s odnorodnymi kharakteristikami, ikh simvoly i obrashchenie", *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova Akademii nauk SSSR [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics]*, **156** (1980), 152–222 (in Russian).

[10] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I., *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Fractional integrals and derivatives: theory and applications]*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian), 688 pp.

[11] Lizorkin P.I., "Generalized Liouville differentiation and function spaces $L_p^r(E^n)$. Embedding theorems", *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, **60(102)**:3 (1963), 325–353 (in Russian).

[12] Arkhipov S.V., "The density function's asymptotic representation in the case of multidimensional strictly stable distributions", *Stability Problems for Stochastic Models*. V. 1412, Lecture Notes in Mathematics, eds. Kalashnikov V.V., Zolotarev V.M., Springer, Berlin, Heidelberg, 1989, 21 pp., https://doi.org/10.1007/BFb0084161.

[13] Edwards R.E., *Functional Analysis. Theory and Applications*, Holt, Rinehart and Winston, 1965, 781 pp.

[14] Feldheim E., *Etude de la stabilitede probabilite*, These de la Faculte des Sciences de Paris, 1937, 65 pp.

[15] Friestedt B., "Expansions for density of the absolute value of a strictly stable vector", *Annals of Mathematical Statistics*, **43** (1972), 669–672.

[16] Zaigraev A., "On asymptotic properties of multidimensional α-stable densities", *Mathematische Nachrichten*, **279**:16 (2006), 1–20.

[17] Zolotarev V.M., "Integral Transformations of distributions and estimatesof parameters of multidimensional spherically symmetric stable laws", *Contributions to Prabability. A collection of Papers dedicated to Eugene Lukacs*, Academic Press, New York, 1981, 283–305.