ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

УДК 510.6

ТАБЛИЧНЫЕ УНОИДЫ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УСЛОВИЯМ УЖИЧИНА

Дадеркин Д.О.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 26.02.2021, после переработки 15.04.2021.

В работах П. Ужичина [1-3] были предложены достаточные условия табличности уноидов, однако эти алгебраические условия Ужичина трудно проверяемы на практике и не дают возможности строить нетривиальные примеры табличных уноидов. В данной работе вводятся понятия локально-заданных и разделённых уноидов и доказывается, что разделённые уноиды удовлетворяют условиям Ужичина. Таким образом, получены просто проверяемые достаточные условия, при выполнении которых уноид, в том числе и с достаточно сложно заданным связным множеством, является табличным.

Ключевые слова: алгебраическая система, алгебра, уноид, свойство табличности, динамические логики, терм.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. С. 59–70.
https://doi.org/10.26456/vtpmk609

Введение

Свойство табличности, использованное А.Кфури в [8] при доказательстве несравнимости динамических логик, является одним из важнейших свойств, характеризующих работу программы в алгебраической системе, поэтому очевиден интерес к изучению этого свойства (см., например, [4, 6, 7, 9, 10]).

Все необходимые базовые понятия изложены в [4–6].

Условия Ужичина - это наличие в каждой системе равенств эквивалентной конечной подсистемы и наличие конечного базиса для каждой системы равенств, однако, исходя из этих алгебраических условий Ужичина, основанных на системе равенств, достаточно сложно построить нетривиальные примеры табличных уноидов. Например, единственным табличным уноидом, известным Ужичину (см. [2]), был уноид с несвязным основным множеством.

В [6] доказано существование табличного уноида со связным основным множеством, тем самым показано, что требование несвязности основного множества уноида не является существенным.

Покажем, что существуют в некотором смысле просто проверяемые достаточные условия, при выполнении которых уноид удовлетворяет условиям Ужичина.

Алгебраические системы, в которых каждая тотальная программа эквивалентна бесцикловой, будем называть табличными.

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ - множество натуральных чисел, $\mathfrak{A} =< \mathbb{A}, \Omega >$ - алгебра, $\mathbb{A}$ - основное множество, Ω - сигнатура.

Равенство с n переменными - это формула вида $t_1 = t_2$, где $t_1, t_2 \in T_\Omega(n)$, здесь $T_\Omega(n)$ — множество всех термов сигнатуры Ω. Поскольку равенства задаются входящими в них термами, под *множеством* (или *системой) равенств* E будем понимать подмножество $(T_\Omega(n))^2$.

Каждый вектор $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, содержащийся в $\mathbb{A}^n$, такой, что все равенства из E истинны в $\mathfrak{A}$ при соответствующих значениях переменных (обозначим это $\mathfrak{A}, \overline{a} \models E$), назовем *решением* множества E равенств с n переменными.

Скажем, что алгебра $\mathfrak{A}$*удовлетворяет условию обрывающейся цепи*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого множества равенств E с n переменными найдется такое конечное подмножество $E_0 \subseteq E$, что $E_0 = E$.

Пусть E_0 - конечное множество равенств с n переменными, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$. Будем говорить, что совокупность векторов $\{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m\} \subseteq \mathbb{A}^n$ образует *базис* для E_0 в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда

(a) каждое $\overline{a}_i$ есть решение E_0 , $i \in \{1, \ldots, m\}$;

(b) для любых равенств $e_1, \ldots, e_m$ с n переменными из того, что $\mathfrak{A}, \overline{a}_i \models e_i$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$, следует $E_0 \models e_1 \vee \ldots \vee e_m$, то есть одно из равенств $e_1, \ldots, e_m$ истинно на любом решении E_0.

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *табличной*, если она обладает свойством табличности для тотальных детерминированных регулярных программ.

Я. Ужичин в [2] связал понятия базиса, условия обрывающейся цепи и свойство табличности для алгебры $\mathfrak{A}$, доказав, что если алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию обрывающейся цепи и при этом любое конечное совместное множество равенств с n переменными имеет некоторый базис в $\mathfrak{A}$, то алгебра $\mathfrak{A}$ является табличной.

Будем говорить, что *алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям Ужичина*, если для любого натурального числа n и любого множества равенств E с n переменными найдется такое конечное подмножество $E_0 \subseteq E$, что $E_0 = E$ в $\mathfrak{A}$ (первое условие Ужичина), и любое конечное совместное множество равенств с n переменными имеет базис (второе условие Ужичина).

Тогда результат Ужичина в [2] можно переформулировать следующим образом:

Теорема 1. *Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям Ужичина. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ является табличной.*

Говоря о свойстве табличности для алгебры $\mathfrak{A}$, будем рассматривать табличность $\mathfrak{A}$ для класса тотальных детерминированных регулярных программ.

Пусть $\mathfrak{A}$ - уноид, $\mathfrak{A} =< \mathbb{A}, \Omega >$, сигнатура Ω состоит из s одноместных функциональных символов, программные переменные $x_1, \ldots, x_n$ принимают значения из $\mathbb{A}$.

Пусть t — некоторый терм сигнатуры Ω. Через $|t|$ будем обозначать *длину* терма t, которую определим как число функциональных символов сигнатуры Ω, содержащихся в t.

Определим расстояние $\delta(x,y)$ между элементами x и y основного множества $\mathbb{A}$. Для натурального числа l, если $|t| = l, x = t(y)$ либо $y = t(x)$, то скажем, что $\delta_0(x,y) \leqslant l$. Если существуют последовательности $x_0, \ldots, x_m$ элементов $\mathbb{A}$ такие, что $x_0 = x, x_m = y, \delta_0(x_i, x_j) \leqslant l_i$ для $i \in 0, \ldots, m$,

$$\sum_{i=0}^{m-1} l_i = l,$$

то наименьшее из таких l назовем *расстоянием* $\delta(x,y)$ между элементами x и y. Будем говорить, что $\delta(x,y) = \infty$, если такие l не существуют.

1. Локально-заданные и разделенные уноиды.

Пусть r — натуральное число. Подмножество $\mathfrak{D}$ в уноиде $\mathfrak{A}$ назовем *r-окрестностью*, если для любых $x, y \in \mathfrak{D}$ $\delta(x,y) \leqslant r$.

Будем говорить, что две r-окрестности $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ *изоморфны*, если существует одно-однозначное отображение ψ из $\mathfrak{D}_1$ на $\mathfrak{D}_2$, при котором для любых термов t_1, t_2, если $|t_1| \leqslant r, |t_2| \leqslant r$, то $t_1(x) = t_2(y)$ в $\mathfrak{D}_1$ тогда и только тогда, когда $t_1(\psi(x)) = t_2(\psi(y))$ в $\mathfrak{D}_2$.

Уноид $\mathfrak{A}$ назовем *l-локально-заданным*, если существует такое натуральное l , что для любого $r > l$ любой изоморфизм любых двух r-окрестностей $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ в $\mathfrak{A}$ продолжается до изоморфизма подуноида, порожденного r-окрестностностью $\mathfrak{D}_1$ в $\mathfrak{A}$ на подуноид, порожденный r-окрестностностью $\mathfrak{D}_2$ в $\mathfrak{A}$.

Уноид назовем *локально-заданным*, если найдется такое натуральное l, что уноид - l-локально-заданный.

Пусть $R \in \mathbb{N}$. R-локально-заданный уноид назовем *разделенным*, если для любых $r > R, n \in \mathbb{N}$ для любых n заранее заданных r-окрестностей $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n$ найдутся такие r-окрестности $\mathfrak{D}'_1, \ldots, \mathfrak{D}'_n$, что

$a)$ для $i \in \{1, \ldots, n\}$$r$-окрестности $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}'_i$ изоморфны;

$b)$ r-окрестности $\mathfrak{D}'_1, \ldots, \mathfrak{D}'_n$ порождают попарно непересекающиеся подуноиды.

Теорема 2. *Каждый разделенный уноид удовлетворяет условиям Ужичина.*

Доказательство прямо следует из предыдущих определений.

Покажем, что приведенный в [2] табличный уноид $\mathfrak{U}$, построенный Ужичиным, является разделенным уноидом.

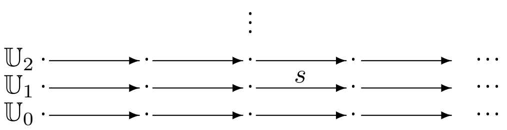

Рис. 1: Уноид $\mathfrak{U}$

Лемма 1. *Уноид* $\mathfrak{U} =< \mathbb{U}, s >$, *в котором*

$$\mathbb{U} = \{< m, n >: m, n \in \mathbb{N}\}, s(< m, n >) =< m+1, n >,$$

является разделенным уноидом.

Доказательство. Действительно, очевидно, что если любые две r-окрестности $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ в $\mathfrak{U}$ изоморфны, то и порожденные ими подуноиды также изоморфны, следовательно, $\mathfrak{U}$ — локально-заданный подуноид.

Пусть заданы kr-окрестностей $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_k$. Рассмотрим множество

$\mathbb{Z} = \{j :< m, j >\in \mathfrak{D}_l, l \in \{1, \dots, k\}\}$. Пусть j^* - наибольший элемент в $\mathbb{Z}$. Определим r-окрестности $\mathfrak{D}'_1, \dots, \mathfrak{D}'_k$ следующим образом. Если $< m_1, m_2 >\in \mathfrak{D}_l$, то $\psi(< m_1, m_2 >) \in \mathfrak{D}'_l$ и $\psi(< m_1, m_2 >) =< m_1, j^* + l >$. Очевидно, что отображение ψ задает изоморфизм r-окрестности $\mathfrak{D}_l$ на r-окрестность $\mathfrak{D}'_l$, поскольку, если термы t_1 и t_2 таковы, что их длина не превосходит r, то для элементов $x, y \in \mathfrak{D}_l$ и $\psi(x), \psi(y) \in \mathfrak{D}'_l t_1(x) = t_2(y)$ тогда и только тогда, когда $t_1(\psi(x)) = t_2(\psi(y)), l \in \{1, \dots, k\}$. Из построения r-окрестностей $\mathfrak{D}'_1, \dots, \mathfrak{D}'_k$ ясно, что если $\mathfrak{D}'_i \subseteq \mathbb{U}_{j_i}, \mathfrak{D}'_l \subseteq \mathbb{U}_{j_l}$ $(i \neq l, i, l \in \{1, \dots, k\})$, то $j_i \neq j_l$, но тогда подуноиды $\mathfrak{U}_i^{\mathfrak{D}'}$ и $\mathfrak{U}_l^{\mathfrak{D}'}$, порожденные, соответственно, r-окрестностями $\mathfrak{D}'_i$ и $\mathfrak{D}'_l$, попарно не пересекаются, откуда, учитывая, что уноид $\mathfrak{U}$, как показано ранее, является локально-заданным, получаем, что $\mathfrak{U}$ - разделенный уноид. □

Ясно, что $\mathfrak{U}$, как разделенный уноид, является табличным уноидом по теореме 2.

Покажем, что приведенный в [6] табличный уноид $\mathfrak{B}$ со связным основным множеством является разделенным уноидом:

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{B} =< \mathbb{B}; f, g >, \mathbb{B} = 0(0+1)^*$ - полное бесконечное бинарное дерево, унарные операции f и g заданы так: $f(x) = x0, g(x) = x1$ для любых $x \in \mathbb{B}$. Тогда $\mathfrak{B}$ является разделенным уноидом.*

Доказательство. Очевидо, что $\mathfrak{B}$ — локально-заданный уноид.

Пусть заданы kr-окрестностей $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k$. Покажем, как построить такие r-окрестности $\mathfrak{b}'_1, \dots, \mathfrak{b}'_k$, чтобы порожденные ими подуноиды $\mathfrak{u}^{\mathfrak{b}'_1}, \dots, \mathfrak{u}^{\mathfrak{b}'_k}$ попарно не пересекались и r-окрестности $\mathfrak{b}'_i$ и $\mathfrak{b}_i$ были изоморфны.

Пусть $\mathfrak{b}_i = \{x_1^i, \dots, x_{n_i}^i\}, i \in \{1, \dots, k\}$.

Длиной элемента $x \in \mathfrak{B}$ назовем натуральное число $d(x) = |t| + 1$, где терм t сигнатуры $\{f, g\}$ определяется из равенства $x = t(0)$, длина элемента 0 есть 1. С каждой r-окрестностью $\mathfrak{b}_i$ свяжем натуральное число n_i, определяющее количество элементов, принадлежащих r-окрестности $\mathfrak{b}_i$, и $\mathbb{L}^i$ — множество длин всех входящих в r-окрестность элементов:

$$\mathbb{L}^i = \{d(x_1^i), \dots, d(x_{n_i}^i)\}, i \in \{1, \dots, k\}.$$

Пусть d^i есть максимальный в $\mathbb{L}^i$ элемент. Будем говорить, что элемент h^i - ***корневой для r-окрестности*** $\mathfrak{b}_i$, если для каждого элемента $x \in \mathfrak{b}_i$ можно указать такой терм t_x , что $x = t_x(h^i)$. Понятно, что корневой элемент существует для каждой r-окрестности $\mathfrak{b}_i$, например, 0 — корневой элемент для любой r-окрестности в $\mathfrak{B}$. Ясно также, что каждой r-окрестности соответствует конечное число корневых элементов.

Пусть P_i — количество корневых элементов для r-окрестности $\mathfrak{b}_i$. Скажем, что H^i — *максимальный корневой элемент* для r-окрестности $\mathfrak{b}_i$, если $d(H^i) = max\{d(h_1^i), \dots, d(h_{P_i}^i)\}$. Пусть $d = max\{d(H^1), \dots, d(H^k)\}$.

Пусть термы $t_1^i, \dots, t_{n_i}^i$ таковы, что $x_1^i = t_1^i(H^i), \dots, x_{n_i}^i = t_{n_i}^i(H^i)$ в r-окрестности $\mathfrak{b}_i, i \in \{1, \dots, k\}$.

Зададим отображение $\psi : \mathfrak{b}_i \to \mathfrak{b}'_i$ следущим образом:
$\psi(x^i_j) = t^i_j(g(f^{d+i}(0))), j \in \{1, \dots, n_i\},\ i \in \{1, \dots, k\}, f^1 = f, f^{i+1} = f(f^i)$.

Сдвигом на $d+i$ достигаем того, что новые максимальные корневые элементы $(H^i)' \in \mathfrak{b}'_i, i \in \{1, \dots, k\}$ различных r-окрестностей будут располагаться на попарно различных расстояниях от элемента 0 на одной линии, задаваемой всеми степенями f, а последующий сдвиг на g гарантирует, что подуноиды $\mathfrak{u}^{(H^i)'}$, порожденные максимальными корневыми элементами $(H^i)'$, будут попарно непересекающимися. Ясно также, что $\mathfrak{u}^{\mathfrak{b}'_i} \subseteq \mathfrak{u}^{(H^i)'}$, следовательно, подуноиды $\mathfrak{u}^{\mathfrak{b}'_i}$, порожденные r-окрестностями $\mathfrak{b}'_i, i \in \{1, \dots, k\}$, также попарно не пересекаются. Изоморфизм r-окрестностей $\mathfrak{b}_i$ и $\mathfrak{b}'_i$ очевиден. Итак, $\mathfrak{B}$ - разделенный уноид, по теореме 2 удовлетворяющий условиям Ужичина и, следовательно, табличный.

$\square$

Опираясь на теорему 2, построим более сложный пример удовлетворящего условиям Ужичина уноида со связным основным множеством.

2. Пример удовлетворящего условиям Ужичина разделенного уноида со связным основным множеством

Пусть G — группа с образующими $f_1, \dots, f_k, D$ — такое дерево, что из каждой его вершины исходит счетное число ребер, помеченных элементами группы G таким образом, что ребра, выходящие из одной вершины, метятся элементами группы G одно-однозначно.

Обозначим через $\mathbb{V}(D)$ множество вершин дерева D. Рассмотрим множество пар $\mathbb{P} = \{< v, g >: v \in \mathbb{V}(D), g \in G\}$.

Пусть $\mathbb{E}(D)$ — множество ребер дерева $D, e(v, w)$ — ребро, соединяющее вершины $v, w \in \mathbb{V}(D)$. Зададим отображение $\psi : \mathbb{P} \to \mathbb{E}(D)$ следущим образом:

$\psi(< v, g >) = e(v, w)$ тогда и только тогда, когда w — вершина, в которую входит ребро, помеченное элементом $g \in G$.

Понятно, что ψ определяет одно-однозначное соответствие между элементами множеств $\mathbb{P}$ и $\mathbb{E}(D)$.

Вершину $w \in \mathbb{V}(D)$, в которую входит ребро $\psi(< v, g >) \in \mathbb{E}(D)$, будем обозначать gv.

Рассмотрим уноид $\mathfrak{E} =< \mathbb{E}(D); f_1, \dots, f_k, h >$, в котором операции заданы следующем образом:

$f_j(\psi(< v, g >)) = \psi(< v, f_j g >), j \in \{1, \dots, k\}$,

$h(\psi(< v, g >)) = \psi(< gv, e >)$, где e — единица группы G.

Лемма 3. *Ребра, исходящие из любой вершины дерева D, образуют группу, изоморфную группе G .*

Доказательство. Пусть $\mathbb{E}_v(D)$ - множество ребер, исходящих из вершины $v \in \mathbb{V}(D)$. Зададим операцию $\circ$ на $\mathbb{E}_v(D)$:

$\psi(< v, g_1 >) \circ \psi(< v, g_2 >) = \psi(< v, g >)$ тогда и только тогда, когда $g = g_1 g_2$ в G.

При таком задании операции $\circ$ верно следующее:

$a)$ для любых ребер $\psi(< v, g_1 >), \psi(< v, g_2 >), \psi(< v, g_3 >)$ имеем:

$(\psi(< v, g_1 >) \circ \psi(< v, g_2 >)) \circ \psi(< v, g_3 >) =$

$\psi(< v, g_1 >) \circ (\psi(< v, g_2 >) \circ \psi(< v, g_3 >))$.

В самом деле, в группе G для любых g_1, g_2, g_3 имеет место $(g_1 g_2) g_3 = g_1(g_2 g_3)$, и тогда, по заданию операции $\circ$, получаем:

$$(\psi(< v, g_1 >) \circ \psi(< v, g_2 >)) \circ \psi(< v, g_3 >) = \psi(< v, g_1 g_2 >) \circ \psi(< v, g_3 >) =$$

$$= \psi(< v, (g_1 g_2) g_3 >) = \psi(< v, g_1(g_2 g_3) >)) =$$

$$= \psi(< v, g_1 >) \circ \psi(< v, (g_2 g_3) >) = \psi(< v, g_1 >) \circ (\psi(< v, g_2 >) \circ \psi(< v, g_3 >));$$

b) существует ребро $\psi(< v, e >)$ такое, что для любого $\psi(< v, g >) \in \mathbb{E}_v(D)$ имеет место

$\psi(< v, g >) \circ \psi(< v, e >) = \psi(< v, e >) \circ \psi(< v, g >) = \psi(< v, g >)$.

Действительно, для e — единицы группы G — верно $ge = eg = e$ для любых $g \in G$, поэтому

$\psi(< v, g >) \circ \psi(< v, e >) = \psi(< v, ge >) = \psi(< v, g >)$,

$\psi(< v, e) \circ \psi(< v, g >) = \psi(< v, eg >) = \psi(< v, g >)$.

Ребро $\psi(< v, e >)$ назовем *единицей* в $\mathbb{E}_v(D)$;

c) Для любого ребра $\psi(< v, g >) \in \mathbb{E}_v(D)$ найдется такое ребро $\psi(< v, x >) \in \mathbb{E}_v(D)$), что

$\psi(< v, g >) \circ \psi(< v, x >) = \psi(< v, x >) \circ \psi(< v, g >) = \psi(< v, e >)$.

Поскольку для любого $g \in G$ имеется такой $x \in G$, что $gx = xg = e$, получим :

$\psi(< v, g >) \circ \psi(< v, x >) = \psi(< v, gx >) = \psi(< v, e >)$ и

$\psi(< v, x >) \circ \psi(< v, g >) = \psi(< v, xg >) = \psi(< v, e >)$.

Такое ребро $\psi(< v, x >)$ назовем *обратным* к ребру $\psi(< v, g >)$.

Таким образом, $\mathbb{E}_v(D)$ с бинарной операцией $\circ$ есть группа.

Рассмотрим отображение $\phi : G \to \mathbb{E}_v(D)$, заданное следующим образом:

$\phi(g) = \psi(< v, g >), g \in G, \psi(< v, g >) \in \mathbb{E}_v(D)$.

Из построения дерева D ясно, что если $g_1 \neq g_2$, то

$\phi(g_1) \neq \phi(g_2), g_1, g_2 \in G, \phi(g_1), \phi(g_2) \in \mathbb{E}_v(D)$,

поскольку все выходящие из вершины v ребра метятся элементами группы G одно-однозначно.

Покажем, что для любых $g_1, g_2 \in G$ имеет место равенство

$\phi(g_1, g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$. Действительно, по заданию отображения ϕ получим: $\phi(g_1) = \psi(< v, g_1 >), \phi(g_2) = \psi(< v, g_2 >)$, и тогда, учитывая, что для любых $g_1, g_2 \in G$ найдется такой $g \in G$, что $g = g_1 g_2$, по определению операции $\circ$ на $\mathbb{E}_v(D)$ имеем : $\psi(< v, g_1 >) \circ \psi(< v, g_2 >) = \psi(< v, g_1 g_2 >)$. Итак, группы $\mathbb{E}_v(D)$ и G изоморфны, поскольку ϕ — изоморфизм G на $\mathbb{E}_v(D)$).

$\square$

Теорема 3. *Уноид $\mathfrak{E}$ удовлетворяет условиям Ужичина.*

Доказательство. Запись $\mathfrak{E}^{\mathfrak{O}}$ будет обозначать подуноид, порожденный в уноиде $\mathfrak{E}r$-окрестностью $\mathfrak{O}$.

Нам потребуется

Лемма 4. $\mathfrak{E}$ — *локально-заданный уноид.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ — две изоморфные r-окрестности в унoиде $\mathfrak{E}$, ϕ — изоморфизм этих r-окрестностей. Пусть элементы z, y и терм t_1, являющийся словом в алфавите символов сигнатуры унoида $\mathfrak{E}$ таковы, что

$z \in \mathfrak{E}^{\mathfrak{O}_1} \setminus \mathfrak{O}_1, y \in \mathfrak{O}_1$ и $z = t_1(y)$.

Под длиной $|t|$ терма t будем понимать количество символов h в терме t. Через Φ обозначим расширение ϕ на $\mathfrak{E}^{\mathfrak{O}_1}$ и $\mathfrak{E}^{\mathfrak{O}_2}$. Найдутся такие элементы $u, v \in \mathfrak{O}_2$, что $u = \Phi(z), v = \Phi(y)$, и пусть $\Phi(z) \neq t_1(\Phi(y))$.

Рассмотрим такой элемент $x \in \mathfrak{O}_1$, что $z = t_2(x), x = t_3(y)$, и пусть $\Phi(x) = w$ для некоторого $w \in \mathfrak{O}_2$ (предполагаем, что y выбран так, что $|t3| > 0$). Ясно,что для данных $t_1, t_2, , t_3$ элемент x — единственный в $\mathfrak{O}_1$.

Пусть $\Phi(z) = t_1'(\Phi(y)), t_1' \neq t_1$, терм t_2 имеет вид $b_1(\ldots(b_{|t_2|}(x))\ldots), b_i$ есть либо $c_i h$, либо hc_i, c_i — слово в алфавите $\{f_1, \ldots, f_k\} \cup \lambda$, где λ — пустое слово, $i \in \{1, \ldots, |t_2|\}, |t_2| > 0$.

Тогда найдутся такие элементы $p_1, \ldots, p_{|t_2|}, s_1, \ldots, s_{|t_2|}$, что $c_1(h(p_1)) = z, s_1 = \Phi(p_1), c_1(h(s_1)) = u = \Phi(z), \ldots, c_{|t_2|}(h(p_{|t_2|})) = p_{|t_2|-1}$ и $s_{|t_2|} = \Phi(p_{|t_2|}) : c_{|t_2|}(h(s_{|t_2|})) = s_{|t_2|-1}$, но $p_{|t_2|} = x$, следовательно, $\Phi(x) = s_{|t_2|} = w$ и $u = t_2(w)$.

Но тогда $z = t_2(x)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(z) = t_2(\Phi(x))$, а так как $z = t_2(x), x = t_3(y), \Phi(z) = t_2(\Phi(x))$ и $\Phi(z) \neq t_2(t_3(\Phi(y)))$, то $\Phi(x) \neq t_3(\Phi(y))$ - получили противоречие с тем, что r-окрестности $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ изоморфны.

Таким образом, для любого терма t равенство $z = t(y)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Phi(z) = t(\Phi(y))$, здесь z и y - элементы подунoида $\mathfrak{E}^{\mathfrak{O}_1}, \Phi(z), \Phi(y) \in \mathfrak{E}^{\mathfrak{O}_2}$.

Итак, унoид $\mathfrak{E}$ — локально-заданный. □

Лемма 5. $\mathfrak{E}$ — *разделенный унoид.*

Доказательство. Из задания унoида $\mathfrak{E}$ ясно, что существует такая единственная группа $\mathbb{E}_{v_0}(D)$, что для любого элемента x из множества $\mathbb{E}(D) \setminus \mathbb{E}_{v_0}(D)$ найдется такой $y \in \mathbb{E}_{v_0}(D)$, что $x = t(y)$ и $|t| > 0$. Группу $\mathbb{E}_{v_0}(D)$ назовем ***корневой группой унoида*** $\mathfrak{E}$.

Понятно, что для любого элемента x произвольной группы $\mathbb{E}_v(D)$ найдется такой терм t, что $x = t(y)$, где $y \in \mathbb{E}_{v_0}(D)$.

Наименьшее натуральное число $H(\mathbb{E}_v(D)) = |t|$ назовем ***высотой группы*** $\mathbb{E}_v(D)$. Положим для корневой группы $H(\mathbb{E}_{v_0}(D)) = 0$. Пусть зафиксировано nr-окрестностей $\mathfrak{O}_1, \ldots, \mathfrak{O}_n$. Обозначим через $\mathbb{W}_i$ множество таких вершин, что для любой вершины $v \in \mathbb{W}_i$ имеет место $\mathbb{E}_v(D) \cap \mathfrak{O}_i \neq \varnothing, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Пусть

$$H_i = \max_{v \in \mathbb{W}_i}(H(\mathbb{E}_v(D)), H = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}}(H_i).$$

Пусть $\mathfrak{O}$ — некоторая r-окрестность. Группу $\mathbb{E}_v(D)$ такую, что для любого элемента x из r-окрестности $\mathfrak{O}$ найдется такой y из группы $\mathbb{E}_v(D)$, для которого $x = t(y)$, где t - некоторый терм, будем называть ***корневой группой*** для r-окрестности $\mathfrak{O}$.

Пусть $u, v, w \in \mathbb{V}(D)$. Определим действие h и f_1 на $\mathbb{V}(D)$.

Будем говорить, что $h(v) = w$, если $w = ev$ и $h(< v, e >) = (< ev, e >)$.

Будем говорить, что $h(f_1(w)) = u$, если $u = gw, f_1(< w, e >) =< w, f_1 e >$ и $h(f_1(< w, e >)) = (< gw, e >)$. Рассмотрим отображение

$$\Theta : \mathbb{V}(\mathfrak{O}) \to \mathbb{V}(\mathfrak{O}'),$$

где $\mathbb{V}(\mathfrak{O})$ – множество таких вершин, что если $v \in \mathbb{V}(\mathfrak{O})$, то соответствующая этой вершине группа $\mathbb{E}_v(D)$ — корневая группа для некоторой r-окрестности $\mathfrak{O}_i \in \{\mathfrak{O}_1, \ldots, \mathfrak{O}_n\}$.

Положим

$$\Theta(v_i) = h(f_1(h^{H+i}(v_0))),$$

здесь v_0 — такая вершина, что $\mathbb{E}_{v_0}(D)$ — корневая группа уноида $\mathfrak{C}$, а вершина v_i такова, что соответствующая ей группа $\mathbb{E}_{v_i}(D)$ есть корневая группа для r-окрестности $\mathfrak{O}_i, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Покажем, что отображение Θ таково, что r-окростности $\mathfrak{O}_i$ и $\mathfrak{O}'_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ изоморфны и порождают попарно непересекающиеся подуноиды.

Рассмотрим некоторую r-окрестность $\mathfrak{O}_i \in \{\mathfrak{O}_1, \ldots, \mathfrak{O}_n\}$, и пусть $\mathbb{E}_{v_i}(D)$ — корневая группа для r-окрестности $\mathfrak{O}_i, w \in \mathbb{V}(D)$ — такая вершина, что $w = \Theta(v_i)$, и пусть $\beta_1, \ldots, \beta_{m_i}$ — такие перечисленные в некотором порядке элементы r-окрестности $\mathfrak{O}_i$, что $\beta_j \notin \mathbb{E}_{v_i}(D), \tau_1, \ldots, \tau_{m_i}$ — такие термы сигнатуры $\Omega(\mathfrak{C})$, что $|\beta_j| \leqslant r, \beta_j = \tau_j(\alpha_l)$, где α_l — элементы корневой для r-окрестности $\mathfrak{O}_i$ группы $\mathbb{E}_{v_i}(D), j \in \{1, \ldots, m_i\}$.

По лемме 3, группы $\mathbb{E}_{v_i}(D)$ и $\mathbb{E}_w(D)$, где $w = \Theta(v_i)$, изоморфны.
Пусть $\gamma_l \in \mathbb{E}_w(D), \gamma_l$ — изоморфные копии элементов $\alpha_l \in \mathbb{E}_{v_i}(D)$. Рассмотрим элементы $\beta'_j = \tau_j(\gamma_l)$. Из задания элементов α_l следует, что $|\tau_j| \leqslant r, j \in \{1, \ldots, m_i\}$. Заметим, что и расстояние между самими элементами α_l не превосходит r. Но тогда, учитывая изоморфизм групп $\mathbb{E}_{v_i}(D)$ и $\mathbb{E}_w(D)$, получим, что и расстояние между различными γ_l не превосхродит r. Ясно также, что расстояние $\rho(\beta'_j, \gamma_l) \leqslant r$ для $j \in \{1, \ldots, m_i\}, \gamma_l \in \mathbb{E}_w(D)$, и множество $\{\beta'_1, \ldots, \beta'_{m_i}\} \cup \{\gamma_l\}$ есть r-окрестность. Будем обозначать эту r-окрестность через $\mathfrak{O}'_i$.

Зададим отображение $\Phi_\Theta : \mathfrak{O}_i \to \mathfrak{O}'_i (i \in \{1, \ldots, n\})$ так:

$\Phi_\Theta(\beta_j) = \beta'_j, \Phi_\Theta(\alpha_l) = \gamma'_l(\beta_j, \alpha_l \in \mathfrak{O}_i, \beta'_j, \gamma'_l \in \mathfrak{O}'_i)$. Ясно, что для $i \in \{1, \ldots, n\}$ отображение Φ_Θ определяет изоморфизм r-окрестности $\mathfrak{O}_i$ на r-окрестность $\mathfrak{O}'_i$. В самом деле, пусть $x, y \in \mathfrak{O}_i, x', y' \in \mathfrak{O}'_i, t \in \Omega(\mathfrak{C})$. В таком случае $x = t(y)$ тогда и только тогда, когда $x' = \Phi_\Theta(x), y' = \Phi_\Theta(y), x' = t(y')$, то есть, $\Phi_\Theta(x) = t(\Phi_\Theta(y)$.

Пусть r-окрестности $\mathfrak{O}_i$ и $\mathfrak{O}_j$ таковы, что порожденные ими подуноиды $\mathfrak{C}^{\mathfrak{O}_i}$ и $\mathfrak{C}^{\mathfrak{O}_j}$ пересекаются, то есть, найдется такой x, что $x \in \mathfrak{C}^{\mathfrak{O}_i} \cap \mathfrak{C}^{\mathfrak{O}_j}$. Тогда найдутся такие y и z, что $y \in \mathbb{E}_{v(\mathfrak{O}_i)}(D), z \in \mathbb{E}_{v(\mathfrak{O}_j)}(D)$, и при этом $x = t_1(y), x = t_2(z)$ (здесь $\mathbb{E}_{v(\mathfrak{O}_l)}(D)$ — группа, корневая для r-окрестности $\mathfrak{O}_l, l \in \{i, j\}, t_1, t_2 \in \Omega(\mathfrak{C})$). Пусть $\mathfrak{O}'_i = \Phi_\Theta(\mathfrak{O}_i), \mathfrak{O}'_j = \Phi_\Theta(\mathfrak{O}_j)$, и пусть

$x' = t_1(y')$, где $y' \in \mathbb{E}_{v(\mathfrak{O}'_i)}(D), x'' = t_2(z')$, где $z' \in \mathbb{E}_{v(\mathfrak{O}'_j)}(D)$,

здесь через $\mathbb{E}_{v(\mathfrak{O}'_l)}(D)$ обозначена группа, корневая для r-окрестности $\mathfrak{O}'_l = \Phi_\Theta(\mathfrak{O}_l,), l \in \{i, j\}$.

По заданию отображения Θ получаем:

$x' = t_1(y') = t_1(h(f_1(h^{H+i}(y'')))), x'' = t_2(z') = t_2(h(f_1(h^{H+j}(z'')))),$

где y'', z'' — изоморфные копии элементов y и z , соответственно, существующие по лемме 3. Поскольку $i \neq j$, ясно, что $x' \neq x''$.

Итак, в случае, когда подуноиды,порожденные r-окрестностями $\mathfrak{O}_i$ и $\mathfrak{O}_j$, пересекаются, подуноиды, порожденные r-окрестностями $\mathfrak{O}'_i = \Phi_\Theta(\mathfrak{O}_i)$ и $\mathfrak{O}'_j = \Phi_\Theta(\mathfrak{O}_j)$, не имеют общих элементов.

Ясно также, что $\mathfrak{E}^{\mathfrak{O}'_k} \cap \mathfrak{E}^{\mathfrak{O}'_l}$ для $k, l \in \{1, \ldots, n\}, k \neq l$, то есть, r-окрестности $\mathfrak{O}'_1, \ldots, \mathfrak{O}'_n$ порождают попарно непересекающиеся подуноиды. Ранее показан изоморфизм r-окрестностей $\mathfrak{O}_i$ и $\mathfrak{O}'_i, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Учитывая, что по лемме 4 $\mathfrak{E}$ - локально - заданный уноид, окончательно получаем, что $\mathfrak{E}$ - разделенный уноид.

Лемма 5 доказана. □

Тогда, поскольку по лемме 5 уноид $\mathfrak{E}$ - разделенный уноид, то по теореме 2 он удовлетворяет условиям Ужичина.

Теорема 3 доказана. □

Итак, поскольку уноид $\mathfrak{E}$ удовлетворяет условиям Ужичина, он является табличным по теореме 1.

Заключение

Достаточные условия табличности уноидов, предложенные в работах П. Ужичина [1–3], не позволяют строить нетривиальные примеры табличных уноидов. В данной работе приведены легко проверяемые достаточные условия табличности, из которых вытекают условия Ужичина: с использованием введенных понятий r-окрестности, локально-заданного и разделенного уноида показано, что каждый разделенный уноид удовлетворяет условиям Ужичина (теорема 2). Приведен пример такого уноида (теорема 3).

Благодарность

Автор выражает искреннюю благодарность участникам научного семинара «Теоретические основы информатики» под руководством проф. С.М. Дудакова за продуктивные обсуждения и важные замечания в процессе подготовки этой работы.

Список литературы

[1] Urzyczyn P. Algorithmic triviality of abstract structures // Fundamenta Informaticae. 1981. № 4. Pp. 819–849.

[2] Urzyczyn P. The unwind property in certain algebras // Information and Control. 1981. Vol. 50, № 2. Pp. 91–109.

[3] Urzyczyn P. Deterministic context-free dynamic logic is more expressive than deterministic dynamic logic of regular programs // Foundation of computer theory. Berlin: Springer-Verlag, 1983. Pp. 469–504.

[4] Столбоушкин А.П., Тайцлин М.А. Динамические логики // Кибернетика и вычислительная техника. 1986. № 2. С. 180–230.

[5] Дудаков С.М., Карлов Б.Н. Математическое введение в информатику. Учебник. Тверь: Тверской государственный университет, 2017. 320 с.

[6] Дадеркин Д.О. Об унoидах Ужичина со связным основным множеством // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 117–125. https://doi.org/10.26456/vtpmk551

[7] Kfoury A.J., Urzyczyn P. Necesseary and sufficient conditions for the universality of programming formalisms // Acta informatica. 1985. Vol. 22. Pp. 347–377.

[8] Kfoury A.J. Definability by deterministic and nondeterministic programs (with applications to first-order dynamic logic) // Information and Control. 1985. Vol. 65. Pp. 98–121.

[9] Tiuryn J. Unbounded program memory adds to the expressive power of first-order programming logic // Information and Control. 1984. Vol. 60. Pp. 12–35.

[10] Tiuryn J., Urzyczyn P. Remarks on comparing expressive power of Logics of Programms // Mathematical Foundations of Computer Science. Eds. by M.P. Chytil, V. Koubek. Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 176. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984. https://doi.org/10.1007/BFb0030337

Образец цитирования

Дадеркин Д.О. Табличные унoиды, удовлетворяющие условиям Ужичина // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. №1. С. 59–70. https://doi.org/10.26456/vtpmk609

Сведения об авторах

1. **Дадеркин Дмитрий Ольгердович**
доцент кафедры информатики Тверского государственного университета.

170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: d.daderkin@yandex.ru

TRUTH-TABLE UNOIDS SATISFYING THE URZYCZYN'S CONDITIONS

Daderkin Dmitry Olgerdovich
Associate Professor at the Department of Informatics,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabov st., TverSU.
E-mail: d.daderkin@yandex.ru

Received 26.02.2021, revised 15.04.2021.

In the works of P. Urzyczyn [1-3] were suggested sufficient conditions of truth-table property of unoids, however, these algebraic conditions of Urzyczyn are difficult to be checked in practice and leave no possibilities to build non-trivial examples of truth-table unoids. In this work concepts of locally-given and divided unoids are proposed, and it is proved that divided unoids satisfy the conditions of Urzyczyn. Thus, simply verifiable sufficient conditions are achieved, on the basis of which unoid, including with enough complicated specified connected underlying set, is truth-table.

Keywords: algebraic system, algebra, unoid, truth-table property, dynamic logics, term.

Citation

Daderkin D.O., "Truth-table Unoids Satisfying the Urzyczyn's Conditions", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 1, 59–70(in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk609

References

[1] Urzyczyn P., "Algorithmic triviality of abstract structures", *Fundamenta Informaticae*, 1981, № 4, 819–849.

[2] Urzyczyn P., "The unwind property in certain algebras", *Information and Control*, **50**:2 (1981), 91–109.

[3] Urzyczyn P., "Deterministic context-free dynamic logic is more expressive than deterministic dynamic logic of regular programs", *Foundation of computer theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 469–504.

[4] Stolboushkin A.P., Tajtslin M.A., "Dynamic logic", *Kibernetika i vychislitelnaya tekhnika [Cybernetics and computing]*, 1986, № 2, 180–230 (in Russian).

[5] Dudakov S.M., Karlov B.N., *Matematicheskoe vvedenie v informatiku [Mathematical Introduction to Computer Science]*, Tutorial, Tver State University, Tver, 2017 (in Russian), 320 pp.

[6] Daderkin D.O., “On Urzyczyn’s Unoids with a Connected Underlying Set”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 4, 117–125 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk551.

[7] Kfoury A.J., Urzyczyn P., “Necesseary and sufficient conditions for the universality of programming formalisms”, *Acta informatica*, **22** (1985), 347–377.

[8] Kfoury A.J., “Definability by deterministic and nondeterministic programs (with applications to first-order dynamic logic)”, *Information and Control*, **65** (1985), 98–121.

[9] Tiuryn J., “Unbounded program memory adds to the expressive power of first-order programming logic”, *Information and Control*, **60** (1984), 12–35.

[10] Tiuryn J., Urzyczyn P., “Remarks on comparing expressive power of Logics of Programms”, *Mathematical Foundations of Computer Science*. V. 176, Lecture Notes in Computer Science, eds. M.P. Chytil, V. Koubek, Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, https://doi.org/10.1007/BFb0030337.