УДК 517.95, 532.5

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ СИСТЕМАМ НАВЬЕ-СТОКСА И ЭЙЛЕРА

Григорьева В.В.[*], **Шеретов Ю.В.**[**]
[*]Тверской государственный технический университет, г. Тверь
[**]Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 16.03.2021, после переработки 30.03.2021.

Квазигидродинамическая система была предложена Шеретовым Ю.В. в 1993 году. Известные точные решения этой системы в подавляющем большинстве случаев удовлетворяют либо уравнениям Навье–Стокса, либо уравнениям Эйлера. В настоящей работе описан новый класс точных решений квазигидродинамической системы, которые не удовлетворяют ни уравнениям Навье–Стокса, ни уравнениям Эйлера. Соответствующие точные решения системы Навье–Стокса получаются из построенных решений предельным переходом при $c_s \to +\infty$, где c_s – скорость звука в жидкости.

Ключевые слова: система Навье–Стокса, система Эйлера, квазигидродинамическая система, точные решения, принцип суперпозиции.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 2. С. 5–15.
https://doi.org/10.26456/vtpmk611

Введение

Научное направление, связанное с построением точных решений системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости, представлено во многих монографиях и научных статьях [1–6]. Альтернативная квазигидродинамическая (КГД) модель, имеющая глубокие связи с указанной классической системой, была предложена Шеретовым Ю.В. в 1993 году [7]. Теоретическому обоснованию подхода посвящены монографии [8, 9]. Найденные точные решения КГД системы в подавляющем большинстве случаев удовлетворяли либо уравнениям Навье – Стокса, либо уравнениям Эйлера [8–12]. Единственным исключением было решение, построенное в [8] на с. 106–107 и описывающее течение жидкости в плоском канале с пористыми стенками.

В настоящей работе описан новый класс точных решений квазигидродинамической системы, которые не удовлетворяют ни уравнениям Навье–Стокса, ни уравнениям Эйлера. При $c_s \to +\infty$, где c_s – скорость звука в жидкости, эти решения стремятся поточечно к соответствующим точным решениям системы Навье–Стокса.

1. Квазигидродинамическая система и система Навье–Стокса

Квазигидродинамическая система для нестационарных течений слабосжимаемой вязкой жидкости в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_x}{\partial t} + (u_x - w_x)\frac{\partial u_x}{\partial x} + (u_y - w_y)\frac{\partial u_x}{\partial y} + (u_z - w_z)\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ &= \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big) + \\ &+ \frac{\partial (u_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y w_x)}{\partial y} + \frac{\partial (u_z w_x)}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_y}{\partial t} + (u_x - w_x)\frac{\partial u_y}{\partial x} + (u_y - w_y)\frac{\partial u_y}{\partial y} + (u_z - w_z)\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \\ &= \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big) + \\ &+ \frac{\partial (u_x w_y)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y w_y)}{\partial y} + \frac{\partial (u_z w_y)}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_z}{\partial t} + (u_x - w_x)\frac{\partial u_z}{\partial x} + (u_y - w_y)\frac{\partial u_z}{\partial y} + (u_z - w_z)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \\ &= \nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big) + \\ &+ \frac{\partial (u_x w_z)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y w_z)}{\partial y} + \frac{\partial (u_z w_z)}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь

$$w_x = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big), \tag{1.5}$$

$$w_y = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big), \tag{1.6}$$

$$w_z = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z}\Big). \tag{1.7}$$

Влияние внешних сил не учитывается. Символом ν обозначен коэффициент кинематической вязкости жидкости. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}, \tag{1.8}$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Параметры ν и τ являются положительными константами. Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Система (1.1) – (1.4) замкнута относительно неизвестных функций – компонент вектора скорости $u_x = u_x(x, y, z, t)$, $u_y = u_y(x, y, z, t)$, $u_z = u_z(x, y, z, t)$ и давления $p = p(x, y, z, t)$.

Пренебрегая в (1.1) –(1.4) членами, содержащими τ, получим классическую систему Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big), \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big), \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big). \tag{1.12}$$

2. Частные решения квазигидродинамической системы специального вида

Будем искать решения системы (1.1) – (1.4) в виде

$$u_x = U, \qquad u_y = V, \qquad u_z = \varphi(x, y, t), \qquad p = p_0. \tag{2.1}$$

Здесь U, V и p_0 – заданные положительные константы. Подстановка (2.1) в (1.5) – (1.7) дает

$$w_x = 0, \qquad w_y = 0, \qquad w_z = \tau\Big(U\frac{\partial\varphi}{\partial x} + V\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big). \tag{2.2}$$

Для зависимостей (2.1) уравнения (1.1) – (1.3) удовлетворяются тождественно. Уравнение (1.4) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x} + V\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big) +$$
$$+\tau\left(U^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2UV\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + V^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right). \tag{2.3}$$

Любое решение $\varphi = \varphi(x, y, t)$ уравнения (2.3) порождает точное решение (u_x, u_y, u_z, p) КГД системы (1.1) – (1.4).

Займемся построением частных решений уравнения (2.3). Пусть $\varphi = \varphi(x, t)$. Тогда (2.3) примет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x} = (\nu + \tau U^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{2.4}$$

Принимая во внимание (1.8), представим (2.4) в эквивалентной форме

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \nu_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{2.5}$$

Здесь

$$\nu_1 = \nu\left(1 + \left(\frac{U}{c_s}\right)^2\right). \tag{2.6}$$

Дополним (2.5) начальным условием

$$\varphi\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Здесь $\varphi_0(x) = u_z$ – заданная функция. Решение одномерного нестационарного уравнения конвекции–диффузии (2.5) будем искать в виде

$$\varphi = \Phi(\xi, t), \tag{2.8}$$

где

$$\xi = x - Ut. \tag{2.9}$$

Подставив (2.8) в (2.5), получим классическое линейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}. \tag{2.10}$$

Из (2.7) и (2.9) следует, что к (2.10) необходимо присоединить начальное условие

$$\Phi\Big|_{t=0} = \varphi_0(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Решение задачи Коши (2.10), (2.11) дается [13] формулой Пуассона

$$\Phi(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_1 t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x_*) \exp\left(-\frac{(\xi - x_*)^2}{4\nu_1 t}\right) dx_*, \qquad t > 0. \tag{2.12}$$

Следствием (2.8), (2.9), (2.12) является зависимость

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_1 t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x_*) \exp\left(-\frac{(x - Ut - x_*)^2}{4\nu_1 t}\right) dx_*, \qquad t > 0, \tag{2.13}$$

которая определяет решение задачи Коши (2.5), (2.7).

3. Примеры точных решений. Принцип суперпозиции

Приведем примеры точных решений квазигидродинамической системы.

Пример 1. Будем искать решение уравнения (2.10) в виде

$$\Phi(\xi, t) = A \sin\left(\frac{\xi}{H}\right) \exp(-\lambda t). \tag{3.1}$$

Здесь A и H – положительные константы, имеющие размерности *см/с* и *см* соответственно. Подставляя (3.1) в (2.10), находим

$$\lambda = \frac{\nu_1}{H^2}. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что

$$\varPhi(\xi,t) = A\sin\Big(\frac{\xi}{H}\Big)\exp\Big(-\frac{\nu_1 t}{H^2}\Big). \tag{3.3}$$

Используя (2.1), (2.8), (2.9) и (3.3), выписываем точное решение КГД системы

$$u_x = U, \qquad u_y = V, \qquad u_z = A\sin\Big(\frac{x-Ut}{H}\Big)\exp\Big(-\frac{\nu_1 t}{H^2}\Big), \qquad p = p_0. \tag{3.4}$$

Пример 2. Пусть B и t_0 – положительные постоянные, имеющие размерности *см*^{2}/*с* и *с* соответственно. Функция

$$\varPhi(\xi,t) = \frac{B}{2\sqrt{\pi\nu_1(t+t_0)}}\exp\bigg(-\frac{\xi^2}{4\nu_1(t+t_0)}\bigg), \qquad t>0, \tag{3.5}$$

задает [13] точное решение уравнения теплопроводности (2.10). Соответствующее точное решение системы КГД имеет вид

$$u_x = U, \qquad u_y = V, \qquad u_z = \frac{B}{2\sqrt{\pi\nu_1(t+t_0)}}\exp\bigg(-\frac{(x-Ut)^2}{4\nu_1(t+t_0)}\bigg), \qquad p = p_0. \tag{3.6}$$

Пример 3. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что набор функций

$$u_x = U, \qquad u_y = V, \qquad u_z = A\sin\Big(\frac{x-Ut}{H}\Big)\exp\Big(-\frac{\nu_1 t}{H^2}\Big)+$$
$$+\frac{B}{2\sqrt{\pi\nu_1(t+t_0)}}\exp\bigg(-\frac{(x-Ut)^2}{4\nu_1(t+t_0)}\bigg), \qquad p = p_0, \tag{3.7}$$

также представляет собой точное решение КГД системы (1.1) – (1.4). При этом составляющая скорости u_z является формальной алгебраической суммой (суперпозицией) соответствующих компонент u_z из двух предыдущих примеров.

Пусть функции $\varphi_1 = \varphi_1(x,t)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(y,t)$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + U\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \nu_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} \tag{3.8}$$

и

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + V\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \nu_2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}. \tag{3.9}$$

Здесь

$$\nu_1 = \nu\bigg(1+\Big(\frac{U}{c_s}\Big)^2\bigg), \qquad \nu_2 = \nu\bigg(1+\Big(\frac{V}{c_s}\Big)^2\bigg).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$\varphi(x,y,t) = \varphi_1(x,t) + \varphi_2(y,t) \tag{3.10}$$

является решением уравнения (2.3). Принцип суперпозиции (3.10) можно проиллюстрировать на примере.

Пример 4. Набор функций

$$u_x = U, \qquad u_y = V, \qquad u_z = A \sin\Big(\frac{x - Ut}{H}\Big) \exp\Big(-\frac{\nu_1 t}{H^2}\Big) +$$
$$+ \frac{B}{2\sqrt{\pi \nu_2 (t + t_0)}} \exp\bigg(-\frac{(y - Vt)^2}{4\nu_2 (t + t_0)}\bigg), \qquad p = p_0, \tag{3.11}$$

образует точное решение КГД системы (1.1) – (1.4).

Пример 5. Убеждаемся в том, что функция

$$\varphi = \varphi(x, y, t) = C\Big(\big(x - Ut\big)\big(y - Vt\big) + 2\tau UVt\Big)$$

удовлетворяет уравнению (2.3). Здесь положительная константа C имеет размерность *см*$^{-1}$*с*$^{-1}$. Соответствующее точное решение системы КГД имеет вид

$$u_x = U, \qquad u_y = V, \qquad u_z = C\Big(\big(x - Ut\big)\big(y - Vt\big) + 2\tau UVt\Big), \qquad p = p_0, \tag{3.12}$$

Заметим, что все построенные решения квазигидродинамической системы не удовлетворяют ни системе Навье–Стокса, ни системе Эйлера. Однако соответствующие точные решения системы Навье–Стокса можно получить формальным предельным переходом при $c_s \to +\infty$.

Заключение

Актуальной и непростой является задача о нахождении новых классов точных решений квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих классическим уравнениям гидродинамики. Это позволило бы понять, при каких условиях наблюдаются заметные расхождения решений КГД системы и системы Навье–Стокса, и какое из решений лучше соответствует экспериментальным данным. Использованию регуляризованных уравнений гидродинамики для построения новых вычислительных алгоритмов посвящены работы [14–17].

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[3] Riley N., Drazin P.G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.

[4] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.

[5] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.

[6] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

[7] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[8] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[9] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[10] Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 84–96. https://doi.org/10.26456/vtpmk557

[11] Шеретов Ю.В. О классах точных решений квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 5–17. https://doi.org/10.26456/vtpmk592

[12] Шеретов Ю.В. О построении точных решений двумерной квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. С. 5–20. https://doi.org/10.26456/vtpmk605

[13] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

[14] Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. 30 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66

[15] Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. 30 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66

[16] Balashov V.A., Zlotnik A.A. An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // Journal of Computational Dynamics. 2020. Vol. 7, № 2. Pp. 291–312. https://doi.org/10.3934/jcd.2020012

[17] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Регуляризованная модель типа фазового поля для описания динамики системы «жидкость-твердое тело». Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. 29 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-96

[18] Balashov V.A., Zlotnik A.A. On a new spatial discretization for a regularized 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard system of equations with boundary conditions // Journal of Scientific Computing. 2021. Vol. 86, № 33. Pp. 1–30. https://doi.org/10.1007/s10915-020-01388-6

Образец цитирования

Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих системам Навье-Стокса и Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 2. С. 5–15. https://doi.org/10.26456/vtpmk611

Сведения об авторах

1. **Григорьева Вера Владимировна**
доцент кафедры высшей математики Тверского государственного технического университета.

Россия, 170026, г. Тверь, наб. А. Никитина, д. 22, ТвГТУ.
E-mail: pontida@list.ru

2. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON EXACT SOLUTIONS OF QUASI–HYDRODYNAMIC SYSTEM THAT DON'T SATISFY THE NAVIER-STOKES AND EULER SYSTEMS

Grigoryeva Vera Vladimirovna
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics,
Tver State Technical University
Russia, 170026, Tver, A. Nikitin emb., 22, TvSTU.
E-mail: pontida@list.ru

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis Department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 16.03.2021, revised 30.03.2021.

The quasi-hydrodynamic system was proposed by Sheretov Yu.V. in 1993. The known exact solutions of this system in the overwhelming majority of cases satisfy either the Navier–Stokes equations or the Euler equations. This paper describes a new class of exact solutions of quasi-hydrodynamic system that satisfy neither the Navier–Stokes equations, nor the Euler equations. The corresponding exact solutions of the Navier–Stokes system are obtained from the constructed solutions by passing to the limit at $c_s \to +\infty$, where c_s is the sonic velocity in the fluid.

Keywords: Navier–Stokes system, Euler system, quasi–hydrodynamic system, exact solutions, principle of superposition.

Citation

Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V., "On exact solutions of quasi-hydrodynamic system that don't satisfy the Navier-Stokes and Euler systems", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 2, 5–15(in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk611

References

[1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[2] Landau L.D., Lifshits E.M., *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 736 pp.

[3] Riley N., Drazin P.G., *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 pp.

[4] Shmyglevskij Yu.D., *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti [Analytical Investigations of Gas and Fluid Dynamics]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 1999 (in Russian), 232 pp.

[5] Pukhnachev V.V., "Symmetries in the Navier-Stokes equations", *Uspekhi mekhaniki [Achievements in Mechanics]*, 2006, № 1, 6–76 (in Russian).

[6] Wang C.Y., "Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations", *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.

[7] Sheretov Yu.V., "On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).

[8] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[9] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[10] Sheretov Yu.V., "On the solutions of Cauchy problem for quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 1, 84–96 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk557.

[11] Sheretov Yu.V., "On classes of exact solutions of quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 5–17 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk592.

[12] Sheretov Yu.V., "On the construction of exact solutions of two-dimensional quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 1, 5–20 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk605.

[13] Vladimirov V.S., *Uravneniya Matematicheskoi Fiziki [Equations of Mathematical Physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (in Russian), 512 pp.

[14] Stenina T.V., Elizarova T.G., Kraposhin M.V., *Regularized equations for disk pump simulation problems in OpenFOAM implementation*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2020 (in Russian), 30 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66.

[15] Stenina T.V., Elizarova T.G., Kraposhin M.V., *Regularized equations for disk pump simulation problems in OpenFOAM implementation*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2020 (in Russian), 30 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66.

[16] Balashov V.A., Zlotnik A.A., "An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations", *Journal of Computational Dynamics*, **7**:2 (2020), 291–312, https://doi.org/10.3934/jcd.2020012.

[17] Balashov V.A., Savenkov E.B., *Regularized phase-field model for description of dynamics of "solid-fluid" system*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2020 (in Russian), 29 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2020-96.

[18] Balashov V.A., Zlotnik A.A., "On a new spatial discretization for a regularized 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard system of equations with boundary conditions", *Journal of Scientific Computing*, **86**:33 (2021), 1–30, https://doi.org/10.1007/s10915-020-01388-6.