

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПЛОСКИМИ СТЕНКАМИ В ПРИСУТСТВИИ ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

Сыромясов А.О., Меньшакова Т.В.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,
г. Саранск

Поступила в редакцию 02.06.2021, после переработки 06.07.2021.

В статье изучается медленный поток вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной двумя параллельными плоскостями. Течение вызвано либо движением одной плоскости относительно другой, либо перепадом давления вдоль двух неподвижных плоскостей. Предполагается, что вязкость жидкости есть многочлен первой степени от температуры, а в рассматриваемом объеме поддерживается постоянный градиент этой величины. Это приводит к возмущению потока по сравнению с изотермическим случаем. Асимптотическими методами исследована зависимость возникающих искажений от типа потока и взаимной ориентации потока и градиента температуры. При этом перепад температуры на расстоянии, равном зазору между плоскостями, считается малым. Показано, что эти искажения могут вноситься как в скорость, так и в давление жидкости. В последнем случае при наличии в жидкости взвеси возможно возникновение дополнительной подъемной силы или силы тяги, действующей на инородные частицы.

Ключевые слова: вязкая жидкость, приближение Стокса, переменная вязкость, градиент температуры.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 2. С. 26–38.
<https://doi.org/10.26456/vtppmk613>

Введение

Многие природные, а также широко применяемые в промышленности и перспективные материалы представляют собой жидкости или суспензии, свойства которых зависят от температуры. Изменяя имеющееся в среде распределение тепла, можно влиять на картину течения и тем самым управлять естественным или технологическим процессом, в который вовлечены упомянутые жидкости.

Классическим примером процесса, возникающего вследствие неоднородности поля температуры, служит свободная конвекция [1]. Она хорошо изучена; для ее протекания необходимо, чтобы от температуры зависела плотность жидкости.

Другой характеристикой текучих сред, зависящей от температуры, является вязкость, причем эта зависимость выражена гораздо более ярко, чем у плотности.

Так, в диапазоне температур от 10°C до 90°C плотность воды практически не меняется, а вязкость уменьшается в 4 раза [2].

Значительную часть исследований о движении жидкости с переменной вязкостью составляет решение задач о термофорезе частиц в покоящейся среде или в ее однородном потоке под действием продольного градиента температуры. При этом условие прилипания на поверхности тела заменяется на более сложное [3–5]. Подклассом данных исследований является моделирование термокапиллярных эффектов на поверхности капель или пузырьков (см., например, [6]). Иным примером задач об инородных включениях в текучей среде служит движение тел в геофизических потоках. Так, всплытие шара с иными физическими свойствами в раскаленной магме исследовалось в [7, 8].

Тем не менее, моделирование жидкостей с вязкостью, зависящей от температуры, представляет и самостоятельный интерес. К примеру, к таким средам относятся нефть [9]; соответственно, при извлечении из пласта породы ее можно нагревать с целью повысить ее текучесть. Моделирование сдвигового потока в присутствии градиента температуры, лежащего в плоскости этого потока, составляет содержание статьи [10].

Излагаемая далее работа продолжает описанную тематику и посвящена математическому описанию различных движений вязкой жидкости между двумя параллельными пластинами. С одной стороны, такие модели служат достаточно хорошим приближением многих реальных технологических процессов. С другой стороны, в силу своей простоты эти потоки, называемые также вискозиметрическими, имеют особое значение, поскольку служат эталонами, при рассмотрении которых определяется вязкость как чистых жидкостей, так и дисперсных сред – суспензий и эмульсий [11, 12].

1. Общая постановка задачи

Будем рассматривать несжимаемую жидкость и считать ее движение настолько медленным, а числа Рейнольдса такими малыми, что инерционными слагаемыми в уравнениях движения можно пренебречь. Предположим также, что на изучаемое вещество не действуют внешние силы.

Если бы температура в жидкости была постоянной, то ее течение подчинялось бы уравнению Стокса и условию несжимаемости [1]:

$$\eta\Delta\vec{u} = \text{grad } p, \quad \text{div } \vec{u} = 0,$$

или, после введения декартовой прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$, в координатной форме,

$$\eta\Delta u_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

где η – вязкость среды, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и p – скорость и давление в ней. Повторение буквенного индекса означает суммирование по нему в пределах от 1 до 3.

Если учитывать перепады температуры T в жидкости, то недостаточно в уравнении (1) заменить η на известную функцию $\eta(T)$. Вместо этого приходится рас-

смагивать уравнения динамики сплошной среды, содержащие компоненты тензора напряжений p_{ij} [13]:

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь ρ – плотность вещества, t – время, f_i – ускорение (массовая плотность) внешних сил. При малых числах Рейнольдса левой частью последнего равенства можно пренебречь. Кроме того, как было сказано вначале, внешние силы отсутствуют, т.е. $f_i = 0$. Наконец, для вязкой жидкости

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right);$$

δ_{ij} есть символ Кронекера. Тогда уравнение движения примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p\delta_{ij} + \eta(T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0. \quad (2)$$

При $T = \text{const}$ отсюда получается уравнение (1). Условие несжимаемости не меняет своего вида.

Будем рассматривать простейший случай, когда температура зависит от координат линейно:

$$T = T_0 + T_j x_j, \quad (3)$$

где число T_0 – значение T в начале координат, $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ есть постоянный градиент температуры.

Зависимость вязкости от температуры возьмем в форме

$$\eta(T) = \eta_0 \left(1 - \alpha \frac{T - T_0}{T_0} \right). \quad (4)$$

здесь $\eta_0 = \eta(T_0)$, коэффициент $\alpha > 0$ постоянен. Формула (4) отражает известное свойство вязкости (ее убывание при возрастании температуры) и может служить приближением для более сложных зависимостей в случае, когда перепад температуры не слишком велик.

Наконец, опишем геометрию задачи. Плоскости, между которыми заключена жидкость, считаются горизонтальными, а зазор между ними равен R . Без ограничения общности, начало координат можно поместить на нижнюю плоскость, а ось Ox_2 направить вертикально вверх. Тем самым, нижняя плоскость имеет уравнение $x_2 = 0$, а верхняя – уравнение $x_2 = R$ (рис. 1).

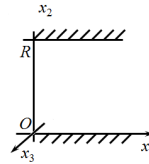


Рис. 1: Геометрия задачи

В зависимости от того, какие условия задать на этих плоскостях, будут возникать разные типы основного потока. В свою очередь, они будут по-разному видоизменяться в зависимости от того, куда направлен градиент температуры.

2. Сдвиговой поток между пластинами

2.1 Невозмущенный сдвиговой поток

При граничных условиях

$$\begin{aligned} u_1 \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u_2 \Big|_{x_2=0} = 0, \quad u_3 \Big|_{x_2=0} = 0, \\ u_1 \Big|_{x_2=R} &= U, \quad u_2 \Big|_{x_2=R} = 0, \quad u_3 \Big|_{x_2=R} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

размерность задачи об изотермическом течении жидкости понижается, поскольку очевидно, что вдоль оси Ox_3 движения не происходит. Это позволяет получить следующее хорошо известное решение системы уравнений (1):

$$p = \text{const}, \quad u_1 = \frac{U}{R}x_2, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0. \quad (6)$$

Условия (5) означают, что нижняя плоскость неподвижна, а верхняя перемещается параллельно ей со скоростью U в направлении Ox_1 . Без ограничения общности далее считается, что $U > 0$.

Из (6) следует, что жидкость движется вслед за верхней плоскостью, причем чем ближе слой жидкости расположен к этой плоскости, тем пропорционально больше скорость течения. При этом давление в жидкости сохраняется постоянным.

2.2 Введение малого параметра

Учитывая перепад температуры в жидкости, вместо общего выражения (3) будем рассматривать три варианта, в которых вектор \vec{T} направлен вдоль осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 :

$$T = T_0 + T_1x_1; \quad T = T_0 + T_2x_2; \quad T = T_0 + T_3x_3. \quad (7)$$

Относительную скорость изменения температуры от точки к точке опишем с помощью безразмерного параметра δ , в этих трех случаях равного

$$\delta = \alpha \frac{T_1 R}{T_0}; \quad \delta = \alpha \frac{T_2 R}{T_0}; \quad \delta = \alpha \frac{T_3 R}{T_0}. \quad (8)$$

Из (4), (7), (8) следуют, соответственно, три варианта представления вязкости:

$$\eta = \eta_0 \left(1 - \delta \frac{x_1}{R}\right), \quad (9)$$

$$\eta = \eta_0 \left(1 - \delta \frac{x_2}{R}\right), \quad (10)$$

$$\eta = \eta_0 \left(1 - \delta \frac{x_3}{R}\right). \quad (11)$$

Перепад температуры на толщине зазора между плоскостями каждый раз считается малым; поэтому δ есть малый параметр. Следовательно, очевидным методом решения задачи (2) с учетом условия несжимаемости является использование асимптотических разложений

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^{(0)} + u_i^{(1)}\delta + \dots, \\ p &= p^{(0)} + p^{(1)}\delta + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

Далее в суммах такого рода ограничимся слагаемыми не выше первого порядка малости по δ .

Отметим, что нулевые приближения $u_i^{(0)}$, $p^{(0)}$ разложений (12) являются решениями уравнений Стокса (1). Например, при моделировании течения сдвига они удовлетворяют (5) и задаются формулами (6).

2.3 Возмущения сдвигового потока продольным градиентом температуры

В случае, когда градиент температуры направлен вдоль Ox_1 , после подстановки (9), (12) в (2) и (5), а также после упрощений, придем к уравнениям:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_1} + \eta_0 \left(\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_2^2} \right) &= 0, \\ -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_2} - \eta_0 \frac{U}{R^2} + \eta_0 \left(\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_2^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} &= 0, \\ u_1^{(1)} \Big|_{x_2=0} = u_2^{(1)} \Big|_{x_2=0} = u_1^{(1)} \Big|_{x_2=R} = u_2^{(1)} \Big|_{x_2=R} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Чтобы решить полученную систему, представим возмущения скорости и давления в виде

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= u_{i,\text{одн}}^{(1)} + u_{i,\text{частн}}^{(1)}, \\ p^{(1)} &= p_{\text{одн}}^{(1)} + p_{\text{частн}}^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь $(u_{i,\text{частн}}^{(1)}, p_{\text{частн}}^{(1)})$ – произвольное частное решение первых двух уравнений в (13); $(u_{i,\text{одн}}^{(1)}, p_{\text{одн}}^{(1)})$ есть решение однородной системы

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p_{\text{одн}}^{(1)}}{\partial x_1} + \eta_0 \left(\frac{\partial^2 u_{1,\text{одн}}^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{1,\text{одн}}^{(1)}}{\partial x_2^2} \right) &= 0, \\ -\frac{\partial p_{\text{одн}}^{(1)}}{\partial x_2} + \eta_0 \left(\frac{\partial^2 u_{2,\text{одн}}^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_{2,\text{одн}}^{(1)}}{\partial x_2^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

По форме последняя система представляет собой “обычные” уравнения Стокса (1). Ее решение подбирается так, чтобы в сумме с частным решением удовлетворять

граничным условиям и условию несжимаемости:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(u_{1,\text{одн}}^{(1)} + u_{1,\text{частн}}^{(1)} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(u_{2,\text{одн}}^{(1)} + u_{2,\text{частн}}^{(1)} \right) = 0.$$

В данном случае нетрудно подобрать

$$u_{1,\text{частн}}^{(1)} = u_{2,\text{частн}}^{(1)} = 0, \quad p_{\text{частн}}^{(1)} = -\eta_0 \frac{U}{R^2} x_2.$$

Поскольку для таких $u_{1,\text{частн}}^{(1)}$ и $u_{2,\text{частн}}^{(1)}$ условия несжимаемости вместе с граничными уже выполнены, то решение однородной системы можно считать нулевым. Действительно, при этом исходная система (13) удовлетворяется полностью, а по физическим соображениям она имеет единственное решение. Окончательно

$$u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = 0, \quad p^{(1)} = -\eta_0 \frac{U}{R^2} x_2.$$

Тем самым, если градиент температуры направлен вдоль по движению верхней плоскости, то двумерность сдвигового течения не нарушается, а распределение скоростей жидкости не искажается. Однако в этом случае возникает дополнительный градиент давления. В силу того, что $p^{(1)}$ зависит только от x_2 , он направлен вертикально, т.е. поперек потока, а не вдоль него, как можно было ожидать.

Общее выражение для давления в изучаемом случае есть

$$p = -\delta\eta_0 \frac{U}{R^2} x_2 + \text{const} + \dots = -\eta_0 U \frac{T_1 x_2}{T_0 R} + \text{const} + \dots$$

Предположим теперь, что в изучаемый поток помещены инородные тела (частицы взвеси), имеющие ту же теплопроводность, что и исходная жидкость, и потому не влияющие на распределение температуры. Поскольку при $T_1 > 0$ давление будет убывать при удалении от нижней плоскости, то возникнет подъемная сила, действующая на эти тела. Аналогично, если $T_1 < 0$, то появится сила, прижимающая частицы к нижней плоскости.

Подчеркнем, что *поперечная* по отношению к потоку сила (подъемная или прижимающая), приложенная к взвеси, возникает вследствие *продольного* градиента температуры.

2.4 Возмущения сдвигового потока поперечным градиентом температуры

Рассмотрим теперь случаи, когда вектор \vec{T} направлен вдоль оси Ox_2 или Ox_3 , и будем действовать аналогично тому, как описано выше:

1. Подставим одно из равенств (10) или (11), а также (12) в (2) и граничные условия (5). Тем самым будут выведены уравнения для функций первого приближения $u_i^{(1)}$ и $p^{(1)}$.
2. Далее подберем частное решение полученной неоднородной системы.
3. Наконец, удовлетворим граничные условия и условия несжимаемости подбором подходящего решения однородных уравнений.

Когда градиент температуры параллелен Ox_2 , решением служит

$$u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = 0, p^{(1)} = -\eta_0 \frac{U}{R^2} x_1.$$

Т.о., плоская картина течения вновь не нарушается, но возникает добавочный перепад давления. Вследствие зависимости $p^{(1)}$ от x_1 он ориентирован *вдоль* потока или вновь *поперек* градиента температуры.

Теперь на частицы взвеси, которые могут быть помещены в жидкость, будет действовать направленная параллельно течению сила тяги (при $T_2 > 0$) или сопротивления (при $T_2 < 0$, соответственно).

В случае, если $\vec{T} \parallel Ox_3$, для неизвестных $u_i^{(1)}$ и $p^{(1)}$ получается однородная система уравнений с нулевыми граничными условиями. Соответственно, ее решение тоже является нулевым. Тем самым, в первом приближении по параметру δ градиент температуры, приложенный перпендикулярно плоскости, в которой происходит сдвиг, не оказывает на течение никакого влияния.

Это явление можно объяснить тем, что при $T = T_0 + T_3 x_3$ изменение температуры, а вместе с ней и вязкости, происходит лишь при переходе от одной плоскости $x_3 = \text{const}$ к другой. Но внутри каждой из этих плоскостей, параллельных плоскости сдвига Ox_1x_2 , течение не искажается.

3. Параболический поток в плоском канале

3.1 Невозмущенный параболический поток

Теперь предположим, что обе плоские стенки неподвижны, и установим постоянный перепад давления вдоль оси Ox_1 , параллельной стенкам:

$$\begin{aligned} u_1 \Big|_{x_2=0} &= 0, u_2 \Big|_{x_2=0} = 0, u_3 \Big|_{x_2=0} = 0, \\ u_1 \Big|_{x_2=R} &= 0, u_2 \Big|_{x_2=R} = 0, u_3 \Big|_{x_2=R} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} &= -\frac{\Delta p}{l}, \end{aligned}$$

где Δp – падение давления на продольном участке длины l .

Решение (1) при этих дополнительных условиях также известно:

$$p = -\frac{\Delta p}{l} x_1 + \text{const}, u_1 = \frac{1}{2\eta_0} \cdot \frac{\Delta p}{l} x_2(R - x_2), u_2 = 0, u_3 = 0. \quad (14)$$

Вязкость η в последнем равенстве заменена на значение η_0 , характерное для изотермического потока при температуре T_0 . Равенства (14) описывают параболический поток, параллельный плоскости Ox_1x_2 . При этом распределение скоростей симметрично относительно плоскости $x_2 = R/2$, находящейся посередине между неподвижными пластинами.

3.2 Параболический поток с продольным градиентом температуры

Вновь рассмотрим искажения течения, возникающие при линейном распределении температуры и зависимости $\eta(T)$ вида (4). Разложим \vec{u} и p по малому параметру δ и будем действовать согласно алгоритму, описанному в разделе 2.3.

При учете вязкости вида (9), т.е. при $\vec{T} \parallel Ox_1$, для функций первого приближения получаем уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_1} + \eta_0 \left(\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial x_3^2} \right) + \Phi_1 &= 0, \\ -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_2} + \eta_0 \left(\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial x_3^2} \right) + \Phi_2 &= 0, \\ -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_3} + \eta_0 \left(\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial x_3^2} \right) + \Phi_3 &= 0, \\ \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

с нулевыми граничными условиями при $x_2 = 0$ и $x_2 = R$. Здесь

$$\Phi_1 = \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{x_1}{R}, \quad \Phi_2 = -\frac{\Delta p}{2l} + \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{x_2}{R}, \quad \Phi_3 = 0.$$

По сравнению с невозмущенным сдвиговым течением данный вариант сложнее: не одно, а сразу два из уравнений (15) содержат неоднородность, что затрудняет подбор частного решения системы.

Конкретно в исследуемом случае $\text{rot } \vec{\Phi} = \vec{0}$, а значит, существует такая скалярная функция F , что $\vec{\Phi} = \text{grad } F$. Поэтому систему для определения частного решения можно записать в виде

$$-\frac{\partial p_{\text{частн}}^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} + \eta_0 \Delta u_{i,\text{частн}}^{(1)} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Если теперь взять $p_{\text{частн}}^{(1)} = F$, то можно положить

$$u_{1,\text{частн}}^{(1)} = u_{2,\text{частн}}^{(1)} = u_{3,\text{частн}}^{(1)} = 0.$$

Тем самым, $\vec{u}_{\text{частн}}^{(1)}$ удовлетворяет граничным условиям на обеих плоскостях $x_2 = 0$ и $x_2 = R$, а также условию несжимаемости. Поэтому решение соответствующей однородной системы уравнений можно считать нулевым.

Остается найти потенциал F . Т.к. Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 определены при $\vec{x} = \vec{0}$, то без ограничения общности

$$F = \int_0^{x_1} \Phi_1(t, 0, 0) dt + \int_0^{x_2} \Phi_2(x_1, t, 0) dt + \int_0^{x_3} \Phi_3(x_1, x_2, t) dt.$$

Тогда функция $p^{(1)}$ находится из цепочки равенств:

$$p^{(1)} = p_{\text{частн}}^{(1)} = F = \frac{\Delta p}{2l} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{R} - x_2 \right). \quad (16)$$

Нетрудно проверить, что итоговое распределение давления симметрично относительно $x_2 = R/2$, т.е. относительно середины зазора $0 \leq x_2 \leq R$ между неподвижными плоскостями. Тем самым, симметрия в распределении давления совпадает с симметрией температуры и невозмущенного потока.

Из (16) следует, что давление минимально при $x_2 = R/2$. Это значит, что если бы изучаемая жидкость содержала взвесь, то инородные частицы под действием возникающего перепада давления собирались бы ближе к середине зазора, “отталкиваясь” от его границ. В этом состоит отличие неизотермического параболического потока от течения при постоянной температуре: в последнем случае миграции взвеси не происходит.

3.3 Параболический поток с поперечным градиентом температуры

Обратимся к вариантам, когда невозмущенный (изотермический) поток описывается формулами (14), а зависимость вязкости от координат – формулами (10) или (11). При этом градиент температуры направлен перпендикулярно потоку – вдоль осей Ox_2 и Ox_3 , соответственно.

В обоих случаях для первого приближения скорости и давления справедливы уравнения (15), но при $\vec{T} \parallel Ox_2$

$$\Phi_1 = -\frac{\Delta p}{2l} + 2\frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{x_2}{R}, \quad \Phi_2 = \Phi_3 = 0,$$

а если градиент температуры параллелен Ox_3 , то

$$\Phi_1 = -\frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{x_3}{R}, \quad \Phi_2 = \Phi_3 = 0.$$

Какой бы из этих вариантов ни был рассмотрен, условие $\text{rot } \vec{\Phi} = \vec{0}$ не выполняется. Это означает, что и в том, и в другом случае градиент температуры приводит к искажению не только давления в жидкости, но и распределения скоростей, причем это добавочное поле скоростей должно быть вихревым.

Заключение

Итак, в рамках статьи изучались происходящие при неоднородном распределении температуры медленные линейные (сдвиговые) и параболические течения вязкой жидкости, помещенной в зазор между твердыми пластинами. Изменение температуры влияет на вязкость жидкости; в свою очередь, это искажает первоначальную картину течения.

Градиент температуры считается относительно малым, что позволяет представить скорость и давление в виде асимптотических разложений по соответствующему безразмерному параметру. Возмущения, вносимые неизотермичностью потока, найдены в первом приближении по этому малому параметру.

Получено, что в большинстве случаев искажению подвергается только давление. Неожиданным результатом служит то, что в сдвиговом потоке возникающий дополнительный градиент давления может оказаться не коллинеарным, а перпендикулярным приложенному градиенту температуры. Если же основное течение

является параболическим, то искажению может подвергаться и его скорость, при этом возмущение потока является вихревым.

Расчеты в статье проведены для чистой жидкости, не содержащей инородных включений. Однако эти результаты позволяют сделать первоначальные выводы и о поведении дисперсных сред. Так, известная зависимость добавочного градиента давления от перепада температуры может помочь при управлении миграцией твердых частиц в суспензии, что важно, например, при очистке жидкостей от вредных примесей.

Более сложной проблемой является задача о термогидродинамическом взаимодействии твердых частиц в жидкости. В ней требуется рассчитать перекрестный эффект от искажения температуры, скорости и давления с учетом возмущений, вносимых в эти поля каждым из инородных тел. Результаты, полученные в данной статье, служат необходимым подготовительным этапом для решения указанной задачи.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. 736 с.
- [2] Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. 720 с.
- [3] Малай Н.В. К вопросу о термофорезе твердой сферической частицы в жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 6. С. 145–154.
- [4] Глушак А.В., Малай Н.В., Миронова Н.Н. Решение краевой задачи для линеаризованных по скорости уравнений Навье-Стокса в случае неизотермического обтекания нагретого сфероида газообразной средой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 946–959.
- [5] Глушак А.В., Малай Н.В., Щукин Е.Р. Решение краевой задачи для линеаризованных по скорости уравнений Навье-Стокса в случае седиментации нагретой твердой гидрозольной частицы сферической формы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 7. С. 1178–1188.
- [6] Felderhof В. U. Thermocapillary mobility of bubbles and electrophoretic motion of particles in a fluid // Journal of Engineering Mathematics. 1996. Vol. 30. Pp. 299–305.
- [7] Morris S. The effects of a strongly temperature-dependent viscosity on a slow flow past a hot sphere // Journal of Fluid Mechanics. 1982. Vol. 124. Pp. 1–26.
- [8] Ansari A., Morris S. The effects of a strongly temperature-dependent viscosity on Stokes's drag law: experiments and theory // Journal of Fluid Mechanics. 1985. Vol. 159. Pp. 459–476.
- [9] Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. 606 с.

- [10] Абрамов А.А., Абрамов Ф.А., Бутковский А.В., Чернышев С.Л. Эффект снижения вязкого трения путем блокирования диссипации // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 6. С. 25–32.
- [11] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
- [12] Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
- [13] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. СПб.: Лань, 2004. 528 с.

Образец цитирования

Сыромясов А.О., Меньшакова Т.В. Течение вязкой жидкости между плоскими стенками в присутствии градиента температуры // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 2. С. 26–38. <https://doi.org/10.26456/vtprmk613>

Сведения об авторах

1. Сыромясов Алексей Олегович

доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва.

Россия, 430005, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1, Мордовский государственный университет. E-mail: syal1@yandex.ru

2. Меньшакова Татьяна Вячеславовна

аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва.

Россия, 430005, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1, Мордовский государственный университет. E-mail: menshakova_94@mail.ru

VISCOUS FLUID FLOW BETWEEN PLANE WALLS IN PRESENCE OF TEMPERATURE GRADIENT

Syromiasov Aleksei Olegovich

Associate Professor at the department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University
*Russia, 430005, Saransk, Bolshevistskaya str., 68/1,
Ogarev Mordovia State University.
E-mail: syal1@yandex.ru*

Menshakova Tatyana Vyacheslavovna

PhD student at the department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University
*Russia, 430005, Saransk, Bolshevistskaya str., 68/1,
Ogarev Mordovia State University.
E-mail: menshakova_94@mail.ru*

Received 02.06.2021, revised 06.07.2021.

Slow flow of incompressible viscous fluid confined by two parallel planes is studied in the paper. The flow is caused either by motion of one plane with respect to another or by pressure drop along the planes. It is supposed that fluid viscosity is the first-order polynomial of temperature and that its gradient is constant in the entire domain under study. These two reasons cause the flow to be disturbed (compared with isothermal case). Dependence of these disturbances on the type of flow and on the orientation of temperature gradient with respect to the flow is investigated by asymptotic methods. Temperature drop on distances equal to the gap between planes is supposed to be small during the investigation. It is shown that both fluid velocity and pressure may be disturbed. In the last case additional lift or drag force may act on the alien particles suspended in the fluid (if it contains any).

Keywords: viscous fluid, Stokes approximation, variable viscosity, temperature gradient.

Citation

Syromiasov A.O., Menshakova T.V., “Viscous fluid flow between plane walls in presence of temperature gradient”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 2, 26–38(in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtprm613>

References

- [1] Landau L.D., Lifshitz E.M., *Fluid Mechanics*, 2nd ed., Butterworth–Heinemann, Waltham, Massachusetts, 1986, 736 pp.
- [2] Vargaftik N.B., *Spravochnik po teplofizicheskim svojstvam gazov i zhidkostej [Handbook of thermophysical properties of gases and liquids]*, Second Edition, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, Moscow, 1972 (in Russian), 720 pp.
- [3] Malai N.V., “Thermophoresis of a Rigid Spherical Particle in a Fluid”, *Fluid Dynamics*, **38**:6 (2003), 954–962.
- [4] Glushak A.V., Malai N.V., Mironova N.N., “Boundary value problem for the Navier–Stokes equations linearized in rate in the case of non-isothermal flow of heated gaseous medium spheroid”, *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **52**:5 (2012), 946–959 (in Russian).
- [5] Glushak A.V., Malai N.V., Shchukin E.R., “Solution of a boundary value problem for velocity-linearized Navier–Stokes equations in the case of a heated spherical solid particle settling in fluid”, *Journal of computational mathematics and mathematical physics*, **58**:7 (2018), 1132–1141.
- [6] Felderhof B.U., “Thermocapillary mobility of bubbles and electrophoretic motion of particles in a fluid”, *Journal of Engineering Mathematics*, **30** (1996), 299–305.
- [7] Morris S., “The effects of a strongly temperature-dependent viscosity on a slow flow past a hot sphere”, *Journal of Fluid Mechanics*, **124** (1982), 1–26.
- [8] Ansari A., Morris S., “The effects of a strongly temperature-dependent viscosity on Stokes’s drag law: experiments and theory”, *Journal of Fluid Mechanics*, **159** (1985), 459–476.
- [9] Muskat M., *Physical Principles of Oil Production*, McGraw-Hill, New York, Izhevsk, 1949, 606 pp.
- [10] Abramov A.A., Abramov F.A., Butkovskii A.V., Chernyshev S.L., “Effect of Viscous Friction Reduction by Blocking Dissipation”, *Fluid Dynamics*, **55**:6 (2020), 743–750.
- [11] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Drofa Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.
- [12] Happel J., Brenner H., *Low Reynolds-number hydrodynamics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1965, 632 pp.
- [13] Sedov L.I., *Mechanics of Continuous Media. V.1*, World Scientific Publishing Company, New Jersey, 1997, 528 pp.