УДК 519.626

МОДЕЛЬ «НАПАДЕНИЕ-ОБОРОНА» НА СЕТЯХ С НАЧАЛЬНЫМИ ОСТАТКАМИ РЕСУРСОВ СТОРОН

Перевозчиков А.Г.[*], **Решетов В.Ю.**[**], **Лесик А.И.**[***]
[*]НПО «РусБИТех», г. Тверь
[**]МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
[***]Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 09.02.2021, после переработки 15.04.2021.

Статья обобщает игру «нападение-оборона», имеющую сетевую структуру, в части учета начальных остатков ресурсов сторон и основана на работе R. Hohzaki, V. Tanaka. В отличие от последней, оборона на каждом из возможных направлений движения между вершинами сети, заданных ориентированными ребрами, может иметь ненулевые начальные остатки ресурсов сторон, что приводит в общем случае к выпуклым минимаксным задачам, которые могут быть решены методом субградиентного спуска. В частности, изучаемая модель обобщает игру «нападение-оборона» с начальными остатками, предложенную В.Ф.Огарышевым, на сетевой случай.

Ключевые слова: классическая игра «нападение-оборона» Ю.Б.Гермейера, обобщение В.Ф.Огарышева, сетевое обобщение R. Hohzaki, V. Tanaka, наилучший гарантированный результат обороны, минимаксная стратегия обороны, смешанная стратегия нападения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 2. С. 68–81.
https://doi.org/10.26456/vtpmk618

Введение

Работа основана на результатах из [1-2] и является дальнейшим развитием построений в [3-4]. Классическая модель “нападение-оборона” Ю.Б.Гермейера была определена и изученная в работе [5]. Она является модификацией модели О.Гросса [6]. В военных моделях пункты интерпретируются обычно как направления и характеризуют пространственное распределение ресурсов защиты по ширине. Однако реально имеет место также пространственное распределение ресурсов обороны по глубине, характеризующейся количеством уровней рубежей на данном направлении.

Простейшая модель, учитывающая рубежность обороны, состоит в модификации классической модели [5], в которой функция выигрыша нападения имеет вид [1]:

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \max \left[q_i^{T_i} x_i; x_i - p_i r_i y_i \right],$$

а векторы x, y принадлежат множествам

$$X = \left\{ x \in E_+^n \left| \sum_{i=1}^{n} x_i = M \right. \right\}, Y = \left\{ y \in E_+^n \left| \sum_{i=1}^{n} y_i \leq N \right. \right\},$$

где T_i - количество рубежей обороны на $i-$м направлении $i = 1, ..., n$, r_i-максимальное количество воздействий, которое может произвести одна единица обороны, p_i- вероятность поражения одного средства нападения противника одним воздействием на $i-$м направлении, которая предполагается независящей от номера $t = 1, ..., T_i$ рубежа обороны, $q_i = 1 - p_i-$соответствующая вероятность непоражения, M и N - общее количество средств нападения и обороны, которые считаются однородными и бесконечно-делимыми, x_i и y_i- количество средств нападения и обороны на $i-$м направлении. В частности формально при $p_i = 1$ получается классическая модель Гермейера [5]. Далее будем считать, что $r_i = 1$, поскольку величины r_i формально можно включить в p_i, положив $p_i' = p_i r_i$.

В работе [7] исследована игровая модель, обобщающая модели Гросса и Гермейера, учитывающая в частности ненулевые начальные остатки ресурсов сторон, и получено конструктивное описание множества всех оптимальных смешанных стратегий нападения. В работе [8] изучалась модель Гросса с непротивоположными интересами сторон, в работах [9,10] – динамические расширения модели. В работе [11] было предложено прямое обобщение игры "нападение-оборона" на сетях, описывающих топологию путей, ведущих к обороняемым объектам.

Дальнейшее обобщение игры "нападение-оборона" с начальными остатками, предложенное в работе [7], может состоять в учете сетевой структуры по схеме [16], что приводит в общем случае к выпуклым минимаксным задачам, которые могут быть решены методом субградиентного спуска. Учет начальных остатков сторон явился существенным развитием сетевой модели [16] и потребовал отдельной публикации для обобщения всех ее основных конструкций, что и сделано в настоящей работе.

1. Обобщение сетевой модели с начальными остатками сторон

Обобщая модель, предложенную в [16], определим игру "нападение-оборона" на ориентированном графе G, состоящем из множества вершин $N = \{i\}$ и множества $L = \{(i,j)\}$ ориентированных ребер (i,j), ведущих из i в j, без контуров с одним источником s и стоком t. Далее – орграфе G. Обозначим $\pi(i) = \{j \in N \,|(i,j) \in L\}, \psi(i) = \{j \in N \,|(j,i) \in L\}$. Каждое ориентированное ребро характеризуется величинами: p_{ij}, означающими вероятность поражения одного средства нападения одним средством обороны, которые считаются однородными, величинами $q_{ij} = 1 - p_{ij}$, соответственно, - не поражения, и количеством T_{ij} рубежей на оперативном направлении, задаваемым ребром (i,j).

Стратегии ρ нападения и обороны u принадлежат множествам

$$\begin{gathered} R=\left\{(\rho^i,i\in N\backslash t),\rho^i=(\rho^i_j,j\in\pi(i)),\left|\sum_{j\in\pi(i)}^{\rho^i_j=1,\rho^i_j\geq 0}\right.\right\}, \\ V=\left\{(u_{ij},(i,j)\in L)\left|\sum_{(i,j)\in L}^{u_{ij}\leq U,u_{ij}\geq 0}\right.\right\}. \end{gathered} \quad (1)$$

Используя известный алгоритм (см.[12], с.252), разобьём все вершины на ранги $N=\cup_{k=0}^{K}N_k$, так, что $\psi(i)\subseteq\cup_{j<k}N_j, i\in N_k$. Определим поток $x=x(\rho,u)$ в сети из источника s в сток t при помощи рекуррентного соотношения последовательно по мере по мере увеличения ранга $k=0,...,K$. Положим с учетом возможности наличия начальных остатков сторон (см. [7]), помеченных индексом ноль,

$$X_s=M;x_{sj}=x^0_{sj}+X_s\rho^s_j,j\in\pi(s),x'_{sj}=\max\left[q_{sj}^{T_{sj}}x_{sj};x_{sj}-p_{ij}(u^0_{sj}+u_{sj})\right]. \quad (2)$$

Пусть для вершин j-го ранга$j<k$ определены величины узловых потоков $X_i,i\in\cup_{j<k}N_j$. Определим

$$x_{ij}=x^0_{ij}+X_i\rho^i_j,j\in\pi(i),x'_{ij}=\max\left[q_{ij}^{T_{ij}}x_{ij};x_{ij}-p_{ij}(u^0_{ij}+u_{ij})\right],j\in N_k,, \quad (3)$$

и положим

$$X_j=\sum_{i\in\psi(j)}\delta_{ij}x'_{ij},j\in N_k, \quad (4)$$

и т.д. Положим $I(\rho,u)=X_t$.

Замечание 1. Здесь $\delta_{ij}\geq 0,i\in\psi(j),j\in N/s$,- коэффициенты, с помощью которых можно учесть как изменение количества средств (см. [7]), так и отсутствие передачи средств между узлами.

Таким образом, стратегия нападения $(\rho^i,i\in N\backslash t)$, определяющая поток однородных средств нападения $(x_{ij},(i,j)\in L)$ с потерями, из источника s в сток t, представляет собой набор векторов $\rho^i=(\rho^i_j,j\in\pi(i))$ целераспределения узлового потока X_i, по вытекающим из него инцидентным дугам, обеспечивающим баланс входящего и выходящего из узла потоков. Величина

$$x'_{ij}=\max\left[q_{ij}^{T_{ij}}x_{ij};x_{ij}-p_{ij}u_{ij}\right]=F_{ij}(x_{ij},u_{ij}) \quad (5)$$

представляет собой математическое ожидание количества средств нападения, преодолевших эшелонированную оборону на оперативном направлении, задаваемым ребром (i,j), и определяет потери потока на текущем ребре. Эта формула была установлена в [1], при упрощающем предположении, что вероятности поражения p_{ij} не зависят от рубежа $s=1,...,T_{ij}$. Критерий нападения состоит в максимизации величины $I(\rho,u)=X_t$, представляющей математическое количество средств нападения достигших стока t. Критерий обороны прямо противоположен. Источников и стоков может быть несколько, но эту ситуацию всегда можно свести к одному источнику и одному стоку, введя искусственно один сток, соединенный со всеми стоками и один источник, соединенный со всеми стоками ребрами с нулевыми вероятностями p_{ij} поражения. Предполагается, что эта процедура уже проделана и ориентированная сеть содержит единственный источник и сток. Заметим, что мы не накладываем априорно никаких ограничений на пропускную способность дуг.

Замечание 2. Таким образом, предложенная постановка обобщает классическую игру “нападение-оборона” по крайней мере, в трех аспектах: многорубежности на каждом направлении, произвольности топологии направлений, заданных ориентированным графом и наличие начальных остатков сил сторон.

Содержательно модель интерпретируется следующим образом: нападению нужно проникнуть из источника базирования к объекту обороны представляющему сток преодолев оборону в виде сети, которая задает возможные пути подлета к объекту. Каждая дуга сети интерпретируется как одно операционное направление, на котором нужно преодолеть локальную эшелонированную оборону противника. Результат боевого столкновения на одном рубеже обороны дается функцией $x'_{ij} = \max\left[q_{ij}x_{ij}; x_{ij} - p_{ij}u_{ij}\right]$, которая представляет собой результат дискретной одношаговой модели динамики средних Осипова-Ланчестера. Она получается следующим образом: количество средств нападения, получивших воздействие на данном рубеже равно $n_{ij} = \min\left[x_{ij}; u_{ij}\right]$ при условии, что на одно средство нападения назначается ровно одно средство обороны. Математическое количество потерь нападения составит $m_{ij} = p_{ij}n_{ij}$. В результате математическое ожидание числа прорвавшихся средств составит $x'_{ij} = x_{ij} - m_{ij} = \max\left[q_{ij}x_{ij}; x_{ij} - p_{ij}u_{ij}\right]$. Итоговая формула для математического ожидания средств нападения, преодолевших все T_{ij} рубежей составит $x'_{ij} = \max\left[q_{ij}^{T_{ij}}x_{ij}; x_{ij} - p_{ij}u_{ij}\right]$ с учетом оптимизации для обороны распределения своих u_{ij} средств по рубежам и выведена в [1]. Заметим, что в [11] был рассмотрен частный случай, когда $x'_{ij} = \max\left[0; x_{ij} - p_{ij}u_{ij}\right]$, который можно считать предельным при $T_{ij} \to \infty$, если $q_{ij} < 1$.

Пример 1. Рассмотрим орграф G из [11], состоящей из множества вершин $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}, s = 1, t = 5$ и множества ориентированных ребер $L = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,4), (2,5), (3,5), (4,5)\}$, представленный на рисунке. Требуется ранжировать его вершины.

Решение. Используя указанный алгоритм ранжирования вершин из (см.[12], с.252), получим разбиение $N = \cup_k N_k$, где $N_0 = \{1\}, N_1 = \{2, 3\}, N_2 = \{4\}, N_3 = \{5\}$.

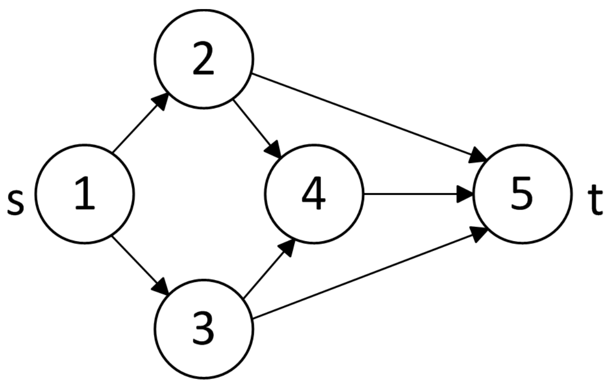

Рис. 1: Орграф к примеру 1

2. Исследование игры в чистых и смешанных стратегиях

Из выпуклости критерия по u следует, что определенная на сети игра допускает исследование полученной игры в чистых и смешанных стратегиях по схеме [13]. Наилучший гарантированный результат (НГР) обороны, совпадающий со значением игры равен:

$$\bar{v} = v = \min_{u \in V} \max_{\rho \in R} I(\rho, u). \tag{6}$$

Все угловые точки множества R описываются как множество точек вида

$$R_0 = \left\{ (\rho^i, i \in N \backslash t), \rho^i = \rho^i(k) = (\rho^i_j(k), j, k \in \pi(i) \middle| \rho^i_j(k) = \left\{ \begin{array}{c} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{array} \right\} \right.. \tag{7}$$

С учетом выпуклости функции $I(\rho, u) = X_t$ по $\rho^i = (\rho^i_j, j \in \pi(i))$ величину $\bar{v}$ можно записать в виде

$$\bar{v} = \min_{u \in Y} \max_{\rho \in R_0} I(\rho, u). \tag{8}$$

Рассмотрим смешанную стратегию вида:

$$\phi_0 = \sum_{\rho \in R_0}^{p^0_\rho} I_\rho, \sum_{\rho \in R_0}^{p^0_\rho} = 1, p^0_\rho \geq 0, \rho \in R_0, \tag{9}$$

где I_ρ– вероятностная мера, сосредоточенная в точке ρ. Повторяя почти дословно доказательство леммы 2 в [1] получим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы стратегия ϕ_0 была оптимальной смешанной стратегией нападения достаточно, чтобы

$$p^0 \in Argmax_{p^0 \in \Lambda} \min_{u \in V} \sum_{\rho \in R_0}^{p^0_\rho} I(\rho, u), \tag{10}$$

где

$$\Lambda = \left\{ p^0 = \left(p^0_\rho, \rho \in R_0\right) \middle| \sum_{\rho \in R_0}^{p^0_\rho} = 1, p^0_\rho \geq 0, \rho \in R_0 \right\}. \tag{11}$$

Таким образом, задача нахождения смешанной оптимальной стратегии нападения состоит в нахождении таких p^0, принадлежащих множеству Λ, определенному (11), которые реализуют максимум в (10).

3. Численные методы решения поставленных минимаксных и максиминных задач

Максиминная задача (10), (11) - это очень сложная задача, поскольку для решения внутренней задачи на минимум по u на каждом шаге субградиентного метода по p^0 приходится вычислять субградиенты функций $I(\rho, u)$ (см. выше) для всех бинарных векторных полей $\rho \in R_0$. Более реалистично во внутренней задаче минимизации по u использовать метод стохастического субградиента при фиксированном распределении p^0, а еще лучше стохастический метод Эрроу-Гурвица, обоснованный в работе [17], когда одновременно делается шаг во внутренней и внешней процедуре.

В этом случае во внешней процедуре в качестве стохастического субградиента берется вектор $g^k = (g^k_\rho, \rho \in R_0)$, где

$$g^k_\rho = \begin{cases} I(\rho^k, u(k)), \rho = \rho^k, \\ 0, \rho \neq \rho^k, \end{cases}$$

ρ^k – независимая реализация с.в. ρ, распределенной по закону $p^0(k)$.

Во внутренней процедуре в качестве стохастического субградиента берется вектор $r^k \in \partial I(\rho^k, u(k))$, где ρ^k- та же независимая реализация с.в. ρ, распределенной по закону $p^0(k)$.

Для сходимости п.н. стохастического метода Эрроу-Гурвица достаточно в силу выпуклости функций $I(\rho, u)$, чтобы шаги λ_k, ρ_k удовлетворяли обычным условиям (см.[17])

$$\lambda_k, \rho_k > 0; \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty, \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 < \infty; \lambda_k/\rho_k \to 0.$$

В такой форме численная реализация метода становиться реалистичной, поскольку на одном шаге используется только одно значение субградиента $r^k \in \partial I(\rho^k, u(k))$, как и в процедуре нахождения минимаксной стратегии обороны.

Минимаксную задачу (7), (8) можно решить методом субградиентного спуска, описанном в [16]. Для определения субградиентов функции $I(\rho, u)$ по u при фиксированном ρ можно представить задачу вычисления $I(\rho, u)$ в виде задачи линейного программирования и перейти к двойственной.

Положим $I(\rho, u) = X_t$. Соответствующая задача ЛП имеет вид

$$X_s = M; x_{sj} = x^0_{sj} + X_s \rho^s_j, j \in \pi(s), x'_{sj} \geq q^{T_{sj}}_{sj} x_{sj}, x'_{sj} \geq x_{sj} - p_{ij}(u^0_{sj} + u_{sj}).$$

Пусть для вершин j-го ранга$j < k$ определены величины узловых потоков $X_i, i \in \cup_{j<k} N_j$. Определим

$$x_{ij} = x^0_{ij} + X_i \rho^i_j, j \in \pi(i), x'_{ij} \geq q^{T_{ij}}_{ij} x_{ij}, x'_{ij} \geq x_{ij} - p_{ij}(u^0_{ij} + u_{ij}), j \in N_k,$$

и положим $X_j = \sum\limits_{i \in \psi(j)} \delta_{ij} x'_{ij}, j \in N_k$ и т.д. Положим

$$I(\rho, u) = \min X_t = -\max(-X_t).$$

Для однообразия можно заменить все равенства соответствующими неравенствами, например,

$$x_{ij} \geq x^0_{ij} + X_i \rho^i_j, j \in \pi(i), X_j \geq \sum_{i \in \psi(j)} \delta_{ij} x'_{ij}, j \in N_k$$

и перейти к двойственной для определения субградиента по u в субградиентном методе распределения резервов обороны. Проходит и метод определения оптимальной смешанной стратегии нападения субградиентнго типа.

Из полученного представления в частности следует лемма.

Таблица 1: Матрица задачи ЛП на максимум

v_i	1	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	x_{12}	x'_{12}	x_{13}
v_1	$-X$	-1							
v_2	$-x^0_{12}$	1					-1		
v_3	$-x^0_{13}$								-1
v_4	$p_{12}(u^0_{12}+u_{12})$						1	-1	
v_5	$p_{13}(u^0_{13}+u_{13})$		-1						1
v_6	0		-1					1	
v_7	0			-1					
v_8	$-x^0_{24}$		1						
v_9	$-x^0_{34}$			1					
v_{10}	$p_{24}(u^0_{24}+u_{24})$								
v_{11}	$p_{34}(u^0_{34}+u_{34})$								
v_{12}	$-x^0_{25}$								
v_{13}	$p_{25}(u^0_{25}+u_{25})$								
v_{14}	$-x^0_{35}$								
v_{15}	$p_{35}(u^0_{35}+u_{35})$								
v_{16}	0				-1				
v_{17}	$-x^0_{45}$				1				
v_{18}	$p_{45}(u^0_{45}+u_{45})$								
v_{19}	0					-1			
1						-1			

Лемма 1. Функция $I(\rho, u)$ выпукла по u при любом ρ.

Пример 2. Рассмотрим в развитие примера 1 пример задачи ЛП для случая

$$q_{ij} = 0, \delta^1_2 = 1, \delta^3_4 = 1, \delta^2_4 = 1, \delta^4_5 = 1..$$

Это задача линейного программирования с матрицей 19x19, которую можно решить при помощи стандартной программы симплекс-метода. После ее решения субградиент критерия $I(\rho, u)$ по $u = (u_{12}, u_{13}, u_{24}, u_{34}, u_{25}, u_{35}, u_{45})$ будет иметь вид

$$\nabla I(\rho, u) = -(v_4 p_{12}, v_5 p_{13}, v_{10} p_{24}, v_{11} p_{34}, v_{13} p_{25}, v_{15} p_{35}, v_{18} p_{45}).$$

С учетом представления (8) внутренний максимум при фиксированном u можно найти методом динамического программирования (д.п.).

Пример 3. Требуется решить внутреннюю задачу в (8) для примера 1 методом д.п. в условиях орграфа, приведённого на Рис. 1.

Решение. Используя ранжирование вершин из примера 1, определяем последо-

Таблица 2: Матрица задачи ЛП (продолжение)

x'_{13}	x_{24}	x'_{24}	x_{34}	x'_{34}	x_{25}	x'_{25}	x_{35}	x'_{35}	x_{45}	x'_{45}
-1										
1										
	-1									
			-1							
	1	-1								
			1	-1						
					-1					
					1	-1				
							-1			
							1	-1		
		1		1						
									-1	
									1	-1
						1		1		1

вательно в обратном порядке по рангам значение функции Беллмана:

$$\begin{aligned}
&B_3(X_5) = X_5;\\
&B_2(X_4) = B_3(F_{45}(x_{45}^0 + X_4; u_{45}^0 + u_{45}))_{-};\\
&B_1(X_2, X_3) = \max_{(\delta_5^2,\delta_4^2),(\delta_4^3,\delta_5^3)} \{B_3(F_{25}(x_{25}^0 + X_2\delta_5^2; u_{25}^0 + u_{25})+\\
&+B_2(F_{24}(x_{24}^0 + X_2\delta_4^2; u_{24}^0 + u_{24}) + F_{34}(x_{34}^0 + X_3\delta_4^3; u_{34}^0 + u_{34})+\\
&+B_3(F_{35}(x_{35}^0 + X_3\delta_5^3; u_{35}^0 + u_{35})\};\\
&B_0(X) = \max_{(\delta_2^1,\delta_3^1)} B_1(F_{12}(x_{12}^0 + X\delta_2^1; u_{12}^0 + u_{12}), F_{13}(x_{13}^0 + X\delta_3^1; u_{13}^0 + u_{13})),
\end{aligned}$$

где функции $F_{ij}(x_{ij}, u_{ij})$ были определены в (5), а величины $\rho_j^i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ принимают только два значения с учетом (7), причем $\sum\limits_{j\in\pi(i)}^{\rho_j^i=1}$.

Заключение

Статья обобщает игру «нападение-оборона», имеющую сетевую структуру, в части учета начальных остатков ресурсов сторон. В частности, изучаемая модель обобщает игру «нападение-оборона» с начальными остатками, предложенную В.Ф.Огарышевым, на сетевой случай. В отличие от последней, оборона на каждом из возможных направлений движения между вершинами сети, заданных ориентированными ребрами, может иметь ненулевые начальные остатки ресурсов сторон, что приводит в общем случае к выпуклым минимаксным задачам, которые могут быть решены методом субградиентного спуска.

Основной проблемой применения субградиентного метода является необходимость решения на каждом шаге внешней процедуры последовательных приближений внутренней задачи. Последняя состоит в максимизации потока целей нападения на выходе сетевой структуры защиты при заданном распределении ее ресурсов по сети. Для этого предлагается использовать метод динамического программирования. Приводятся модельный пример, который показывает принципиальную реализуемость метода субградиентного спуска в сетях с относительно небольшим числом узлов и дуг. Применение предложенного метода в задачах большой размерности - проблема, которая может быть решена с учетом возможности распараллеливания вычислительных процессов метода динамического программирования в сети, но это самостоятельная проблема, которая требует отдельного изучения.

Список литературы

[1] Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Шаповалов Т.Г. Многоуровневое обобщение модели "нападение-оборона"// Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 57–69.

[2] Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.И. Ломоносова. Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2015. С. 80–96.

[3] Лесик И.А., Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г. Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением с несколькими фазовыми ограничениями // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2017. № 1. С. 26а–32. https://doi.org/10.3103/S0278641917010058

[4] Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Яночкин И.Е. Модель «нападение-оборона» с неоднородными ресурсами сторон // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 1. С. 42–51. https://doi.org/10.7868/S004446691801012X

[5] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Мир, 1971.

[6] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

[7] Огарышев В.Ф. Смешанные стратегии в одном обобщении задачи Гросса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. Т. 13, № 1. С. 59–70.

[8] Молодцов Д.А. Модель Гросса в случае непротивоположных интересов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 309–320.

[9] Данильченко Т.Н., Масевич К.К. Многошаговая игра двух лиц при «осторожном» втором игроке и последовательной передаче информации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 19, № 5. С. 1323–1327.

[10] Крутов Б.П. Динамические квазиинформационные расширения игр с расширяемой коалиционной структурой. М.: ВЦ РАН, 1986.

[11] Hohzaki R., Tanaka V. The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network // Abstract of 27th European conference on Operation Research, EURO2015. University of Strathclyde, 2015.

[12] Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, 1989.

[13] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.

[14] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

[15] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

[16] Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Яночкин И.Е. Многорубежная модель «нападение-оборона» на сетях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 8. С. 1448–1456. https://doi.org/10.1134/S004446691908012X

[17] Завриев С.К., Перевозчиков А.Г. Стохастический квазиградиентный метод оптимизации параметров динамических систем // Киберенетика. 1990. № 4. С. 104–107.

Образец цитирования

Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Лесик А.И. Модель «нападение-оборона» на сетях с начальными остатками ресурсов сторон // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 2. С. 68–81. https://doi.org/10.26456/vtpmk618

Сведения об авторах

1. **Перевозчиков Александр Геннадьевич**
   старший научный сотрудник отдела проектирования Центра моделирования сложных систем НПО «РусБИТех».

   Россия, 170001, г. Тверь, пр. Калинина, д. 17, НПО «РусБИТех».
   E-mail: pere501@yandex.ru

2. **Решетов Валерий Юрьевич**
   доцент кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

   Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, МГУ, факультет ВМК. E-mail: kadry@cs.msu.ru

3. **Лесик Александра Ильинична**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: lesik56@mail.ru

THE "ATTACK-DEFENSE" MODEL ON NETWORKS WITH THE INITIAL RESIDUALS OF THE PARTIES

Perevozchikov Aleksandr Gennadyevich
Senior Researcher in the Design Department of Complex Systems Modeling Center, NPO "RusBITTech"
Russia, 170001, Tver, 17 Kalinina str., NPO "RusBITTech".
E-mail: pere501@yandex.ru

Reshetov Valerii Yurievich
Associate Professor in the Department of Operations Research, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1 Leninskie gory, building 1, MSU, CMC.
E-mail: kadry@cs.msu.ru

Lesik Aleksandra Ilyinichna
Associate Professor in the Department of Mathematical Statistics and Systems Analysis, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.
E-mail: lesik56@mail.ru

Received 09.02.2021, revised 15.04.2021.

The article generalizes the "attack-defense" game with the network structure, in terms of accounting for the initial residuals of the parties' resources and is based on the work by Hohzaki and Tanaka. In contrast to the latter, the defense on each of the possible movement directions between the network's vertices, given by the oriented edges, can have nonzero initial residuals of the parties' resources, which generally leads to convex minimax problems that can be solved by the subgradient descent method. In particular, the model under study generalizes the "attack-defense" game with initial residuals, proposed by Ogaryshev, to the network case.

Keywords: Germeier's classic "attack-defense" game, Ogaryshev's generalization, network generalization by Hohzaki and Tanaka, best guaranteed defense result, minimax defense strategy, mixed attack strategy.

Citation

Perevozchikov A.G., Reshetov V.Yu., Lesik A.I., "The "attack-defense" model on networks with the initial residuals of the parties", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 2, 68–81(in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk618

References

[1] Perevozchikov A.G., Reshetov V.Yu., Shapovalov T.G., “Multi-level expansion of the model “attack-defense””, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 1, 57–69 (in Russian).

[2] Reshetov V.Yu., Perevozchikov A.G., Lesik I.A., “Model for overcoming a multi-level defense system by attack”, *Prikladnaya matematika i informatika: Trudy fakulteta VMK MGU imeni M.I. Lomonosova*, ed. V.I. Dmitriev, MAX Press Publ., Moscow, 2015, 80–96 (in Russian).

[3] Lesik I.A., Perevozchikov A.G., Reshetov V.Y., “Multi-level defense system models: overcoming by means of attacks with several phase constraints”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **41**:1 (2017), 25–31, https://doi.org/10.3103/S0278641917010058.

[4] Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E., Reshetov V.Y., “An attack–defense model with inhomogeneous resources of the opponents”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **58**:1 (2018), 38–47, https://doi.org/10.7868/S004446691801012X.

[5] Germejer Yu.B., *Vvedenie v Teoriyu Issledovaniya Operatsii [Introduction to the Theory of Operations Research]*, Mir Publ., Moscow, 1971 (in Russian).

[6] Karlin S., *Matematicheskie Metody v Teorii Igr, Programmirovanii i Ekonomike [Mathematical Methods in the Theory of Games, Programming and Economics]*, Mir Publ., Moscow, 1964 (in Russian).

[7] Ogaryshev V.F., “Mixed strategies in one generalization of the gross problem”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **13**:1 (1973), 59–70 (in Russian).

[8] Molodtsov D.A., “The gross model in the case of non-conflicting interests”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **12**:2 (1972), 309–320 (in Russian).

[9] Danilchenko T.N., Masevich K.K., “Multi-step game of two persons with a ”careful” second player and sequential transmission of information”, *Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki [Journal of computational mathematics and mathematical physics]*, **19**:5 (1974), 1323–1327 (in Russian).

[10] Krutov B.P., *Dinamicheskie kvaziinformatsionnye rasshireniya igr s rasshiryaemoj koalitsionnoj strukturoj [Dynamic quasi-informational extensions of games with an expandable coalition structure]*, CC RAS Publ., Moscow, 1986 (in Russian).

[11] Hohzaki R., Tanaka V., “The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network”, *Abstract of 27th European conference on Operation Research*, EURO2015, University of Strathclyde, 2015.

[12] Tanaev V.S., Sotskov Yu.N., Strusevich V.A., *Teoriya raspisanij. Mnogostadijnye sistemy [The theory of schedules. Multi-stage systems]*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (in Russian).

[13] Vasin A.A., Morozov V.V., *Teoriya Igr i Modeli Matematicheskoi Ekonomiki [Game Theory and Models of Mathematical Economics]*, MAX Press Publ., Moscow, 2005 (in Russian).

[14] Sukharev A.G., Timokhov A.V., Fedorov V.V., *Kurs Metodov Optimizatsii [Course of Optimization Methods]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian).

[15] Polyak B.T., *Vvedenie v Optimizatsiyu [Introduction to Optimization]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian).

[16] Perevozchikov A.G., Yanochkin I.E., Reshetov V.Y., “Multilayered attack–defense model on networks”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **59**:8 (2019), 1389–1397, https://doi.org/10.1134/S004446691908012X.

[17] Zavriev S.K., Perevozchikov A.G., “Stochastic quasi-gradient method of optimization of parameters of dynamic systems”, *Kiberenetika*, 1990, № 4, 104–107 (in Russian).