МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 330.45

doi: 10.26456/2219-1453/2021.3.139–149

УЧЕТ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДОХОДНОСТЕЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ В ИГРАХ С ПРИРОДОЙ

В.А. Горелик[1,2], Т.В. Золотова[3]

[1] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва
[2] ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», г. Москва
[3] ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», г. Москва

Цель исследования состоит в развитии и применении к задачам инвестирования методов принятия решений в играх с природой, учитывающих корреляцию случайных значений выигрышей для каждой пары чистых стратегий. При этом рассматриваются два критерия: математическое ожидание выигрыша и среднеквадратическое отклонение как оценка риска. Двухкритериальная модель принятия решений формализована путем перевода оценки риска в ограничение. Для такой обобщенной задачи квадратичного программирования получены аналитические методы решения. Приведен пример применения предложенного метода на реальных статистических данных.
Ключевые слова: *двухкритериальная модель, математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение, корреляция.*

Введение

В процессах управления экономическими системами лицо, принимающее решение (ЛПР) действует в условиях неполной информации относительно состояний внешней среды и, как следствие, результатов своей деятельности [1]. В качестве математической модели таких процессов можно использовать «игру с природой». При этом в зависимости от имеющейся у ЛПР информации о состояниях природы и его отношения к риску необходимо определить принцип оптимальности.

В большинстве работ для принятия решений используется один классический критерий оптимальности: Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Байеса (см., например, [6, 7, 11–13]). При этом в случае известных вероятностей состояний природы оптимальной оказывается чистая стратегия.

В ряде работ предлагаются новые подходы к принятию решений в играх с природой. В [4] предложен обобщенный критерий типа суммы критериев Вальда и Сэвиджа для принятия решений в экономических задачах. Статья [5] посвящена принципу минимакса при нахождении оптимальной стратегии в играх с природой. Целью работы [8] является разработка метода нахождения наиболее целесообразного решения в условиях нечеткости исходных данных. В статье [10] описана двухкритериальная модель «эффективность – риск» для принятия решений в стохастических условиях. При этом рассматриваются два критерия: математическое ожидание выигрыша и функция VAR.

В [2] предлагается двухкритериальная модель «эффективность (средний выигрыш) – риск (СКО)» в качестве принципа оптимальности стратегии в условиях вероятностной неопределенности. Рассматривались постановки задач оптимизации, как в чистых, так и в смешанных стратегиях. Если при известных состояниях природы максимизируют математическое ожидание выигрыша, то использование смешанной стратегии не имеет смысла. При двухкритериальном же подходе оптимальный результат в смешанных стратегиях, вообще говоря, больше, чем в чистых стратегиях. При этом в модели работы [2] предполагалось отсутствие коррелированности случайных доходностей для различных чистых стратегий.

В отличие от традиционного подхода к определению смешанной стратегии в теории игр, в данной работе учитывается возможность корреляционной зависимости случайных значений выигрышей исходных альтернатив. Отметим, что учет коррелированности становится существенным именно при двухкритериальном подходе. Обычно в играх с природой в качестве критерия рассматривается либо математическое ожидание выигрыша, либо риск по Сэвиджу. В таком случае возможная коррелированность случайных выигрышей при разных чистых стратегиях никакой роли не играет. При наличии двух критериев, в качестве одного из которых выступает СКО, учет коррелированности существенным образом влияет на постановку задачи и метод ее решения. Соответственно полученные ранее результаты в данной работе обобщаются на случай наличия корреляции выигрышей для каждой пары чистых стратегий.

Пусть n – число чистых стратегий ЛПР, m – число возможных состояний природы, a_{ij} – выигрыш ЛПР от использования i-й стратегии при j-м состоянии природы, q_j – известная ЛПР вероятность j-го состояния.

Далее рассматривается одна из возможных постановок двухкритериальной задачи принятия решений в условиях риска, а именно, СКО как оценка риска переводится в ограничение. В результате получается задача обобщенного квадратичного программирования, для решения которой получен аналитический метод. Указанный подход реализован на примере процесса инвестирования с использованием реальных статистических данных.

Постановка задачи и метод решения

Обозначим математическое ожидание выигрыша для i-й чистой стратегии через $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j$, СКО – $\sigma_i = \left(\sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij} - \bar{a}_i \right)^2 q_j \right)^{0.5}$, вероятность выбора i-й чистой стратегии – p_i . Тогда математическое ожидание выигрыша при использовании стратегии $p=(p_1,..., p_n)$ есть $\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i p_i$.

Пусть σ_{ik} – ковариационные моменты случайных величин выигрышей для чистых стратегий i и k, которые определяются по формулам $\sigma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \overline{a}_i)(a_{kj} - \overline{a}_k) q_j$.

Обозначим ковариационную матрицу $D = \|\sigma_{ik}\|$. Как известно, ковариационная матрица всегда неотрицательно определена. Мы в дальнейшем будем предполагать несколько большее, а именно, что она положительно определена.

СКО случайной величины выигрыша при использовании стратегии $p=(p_1,..., p_n)$ в случае наличия коррелированности определяется, очевидно, по формуле $\sigma = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} p_i p_k \right)^{0.5}$ или в матрично-векторной форме $\sigma = \langle p, Dp \rangle^{0.5}$, где $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – знак скалярного произведения векторов.

Введем n-мерные вектора $\overline{a} = (\overline{a}_1,..., \overline{a}_n)$ и $e=(1,...,1)$, тогда формулировка задачи максимизации ожидаемого выигрыша с ограничением по риску имеет вид:

$$\max_{p \in P} \langle \overline{a}, p \rangle, \quad P = \{ p \mid \langle p, Dp \rangle^{0.5} \le \sigma_0, \ \ \langle p, e \rangle = 1, \ \ p \ge 0 \} \ . \tag{1}$$

Множество P не пусто, если пороговое значение σ_0 не меньше минимального значения СКО на множестве $P_0 = \{ p \mid \langle p, e \rangle = 1, \ \ p \ge 0 \}$. Эта величина находится из решения следующей задачи квадратичного программирования:

$$d_0 = \min_{p \in P_0} \langle p, Dp \rangle. \tag{2}$$

Для (2) функция Лагранжа есть $L_0(p,\mu) = \frac{1}{2} \langle p, Dp \rangle + \langle \mu, 1 - \langle p, e \rangle \rangle$, а условия экстремума Каруша-Куна-Таккера (ККТ) имеют вид ,

$$\frac{\partial L_0(p,\mu)}{\partial p_i} = 0, i \in I, \ \ \frac{\partial L_0(p,\mu)}{\partial p_i} \ge 0, i \notin I,$$

где I – множество индексов, соответствующих ненулевым p_i .

Для ненулевых компонент вектора p имеем систему уравнений: $\tilde{D}\tilde{p} - \mu\tilde{e} = 0$, где $\tilde{p}$ – вектор из ненулевых компонент вектора p, $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e, полученный вычеркиванием компонент с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p, а матрица $\tilde{D}$ получается из матрицы D исключением строк и столбцов с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p. Матрица $\tilde{D}$, как квадратная подматрица положительно определенной матрицы D, также является положительно определенной и невырожденной. Поэтому $\tilde{p} = \mu \tilde{D}^{-1}\tilde{e}$ и из ограничения имеем $\mu\left\langle \tilde{D}^{-1}\tilde{e}, \tilde{e} \right\rangle = 1$. Матрица $\tilde{D}^{-1}$ также положительно определена, поэтому $\mu = \left\langle \tilde{D}^{-1}\tilde{e}, \tilde{e} \right\rangle^{-1}$ и

$$\tilde{p} = \left\langle \tilde{D}^{-1}\tilde{e}, \tilde{e} \right\rangle^{-1} \tilde{D}^{-1}\tilde{e}. \qquad (3)$$

Так как для задачи квадратичного программирования (2) условия ККТ являются необходимыми и достаточными, то если $\tilde{p} \ge 0$ и выполнено остальная часть условий ККТ, а именно, неотрицательность производных функции Лагранжа по p_i с номерами, соответствующим нулевым компонентам, то вектор $\tilde{p}$, дополненный нулями на соответствующих местах, является решением задачи (2). Подставив этот вектор в целевую функцию (2), получаем значение $d_0 = \left\langle \tilde{D}^{-1}\tilde{e}, \tilde{e} \right\rangle^{-1}$.

Таким образом, метод решения задачи (2) сводится к перебору квадратных подматриц матрицы D, решении основанных на них систем уравнений по полученным формулам и проверке условий неотрицательности компонент полученных векторов и соответствующих производных функции Лагранжа.

Покажем, что если $\sigma_0 > d_0^{0.5}$, все $\bar{a}_i$ различны, матрица $D = \|\sigma_{ik}\|$ положительно определена, то задача (1) имеет решение, а оптимальная смешанная стратегия p^0, содержащая не менее двух ненулевых компонент, может быть представлена в виде

$$\tilde{p}^0 = \lambda^0 \tilde{D}^{-1}(\tilde{a} - \mu^o \tilde{e}), \qquad (4)$$

где

$$\lambda^0 = \sqrt{\frac{\left\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle - \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle^2}{\sigma_0^2 \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle - 1}}, \quad \mu^0 = \frac{\left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle - \lambda^0}{\left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle}, \qquad (5)$$

$\tilde{D}$ – некоторая квадратная матрица, которая получается из матрицы D исключением строк и столбцов с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p^0, $\tilde{p}$ – вектор из ненулевых компонент вектора p^0, $\tilde{a}$ – вектор из части компонент вектора $\bar{a}$, $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e, полученные вычеркиванием компонент с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p^0.

При $\sigma_0 > d_0^{0.5}$ множество P не пусто, замкнуто и ограничено, поэтому задача (1) имеет решение. Возведем первое ограничение в квадрат и введем функцию Лагранжа

$$L_1(p, \lambda, \mu) = \langle \bar{a}, p \rangle + \tfrac{1}{2}\lambda\left(\sigma_0^2 - \langle p, Dp \rangle\right) + \left(\mu, 1 - \langle p, e \rangle\right), \quad \lambda \ge 0.$$

Пусть, как и прежде, I – множество индексов, соответствующих ненулевым p_i. Необходимые и достаточные условия экстремума ККТ для задачи (1) имеют вид $\dfrac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i}=0,\ i\in I,\quad \dfrac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i}\le 0,\ i\notin I$.

Для ненулевых компонент вектора p имеем систему уравнений: $\tilde{a}-\lambda\tilde{D}\tilde{p}-\mu\tilde{e}=0$, где $\tilde{D}$ – квадратная подматрица матрицы D, $\tilde{p}$ – вектор из ненулевых компонент вектора p, $\tilde{a}$ – вектор из части компонент вектора $\bar{a}$, $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e, полученные вычеркиванием компонент с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p.

Квадратичное ограничение в задаче (1) является активным (выполняется как равенство), т. к. иначе λ=0 и $\tilde{a}-\mu\tilde{e}=0$, а в силу предположения, что все $\bar{a}_i$ различны, это приводит к противоречию.

В силу положительной определенности и невырожденности квадратных подматриц положительно определенной матрицы D имеем $\tilde{p}=\lambda^{-1}\tilde{D}^{-1}(\tilde{a}-\mu\tilde{e})$. Подставляем это выражение в ограничения задачи (1):

$$\left\langle \tilde{D}^{-1}(\tilde{a}-\mu\tilde{e}),\ (\tilde{a}-\mu\tilde{e})\right\rangle=\lambda^2\sigma_0^2,\quad \lambda^{-1}\left\langle \tilde{D}^{-1}(\tilde{a}-\mu\tilde{e}),\tilde{e}\right\rangle=1.$$

Преобразуем первое равенство к виду

$$\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle+\mu^2\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1},\tilde{e}\right\rangle-2\mu\left\langle \tilde{e}\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle=\lambda^2\sigma_0^2.$$

Из второго равенства выразим $\mu=(\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle-\lambda)\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle^{-1}$ и подставим в первое:

$$\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle+\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle^2-2\lambda\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle+\lambda^2-$$
$$-2\left(\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle^2-\lambda\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1},\tilde{a}\right\rangle\right)=\lambda^2\sigma_0^2\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle.$$

В этом выражении коэффициент при λ равен нулю. Таким образом, получаем квадратное уравнение относительно λ:

$$\lambda^2\left(\sigma_0^2\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1},\tilde{e}\right\rangle-1\right)=\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle\left\langle \tilde{e},D^{-1}\tilde{e}\right\rangle-\left\langle \tilde{e},D^{-1}\tilde{a}\right\rangle^2. \qquad (6)$$

Покажем, что свободный член положителен, т.е. имеет место неравенство

$$\left\langle \tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\right\rangle\left\langle \tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\right\rangle-\left\langle \tilde{e},D^{-1}\tilde{a}\right\rangle^2>0.$$

Действительно, так как $\tilde{D}^{-1}$ является положительно определенной матрицей, то существует такая невырожденная матрица B, что $\tilde{D}^{-1}=B^TB$. Подставив это разложение матрицы в правую часть квадратного уравнения (6), имеем

$$\left\langle \tilde{a},B^TB\tilde{a}\right\rangle\left\langle \tilde{e},B^TB\tilde{e}\right\rangle-\left\langle \tilde{e},B^TB\tilde{a}\right\rangle^2=\left\langle B\tilde{a},B\tilde{a}\right\rangle\left\langle B\tilde{e},B\tilde{e}\right\rangle-\left\langle B\tilde{e},B\tilde{a}\right\rangle^2.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского: $(x, y)^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$, положив $x = B\tilde{a}$, $y = B\tilde{e}$. В неравенстве Коши-Буняковского имеет место равенство только в случае коллинеарности векторов x и y. Но вектора $B\tilde{a}$ и $B\tilde{e}$ не могут быть коллинеарными, т. к. в противном случае при умножении их на матрицу B^{-1} вектора $\tilde{a}$ и $\tilde{e}$ оказываются тоже коллинеарными. Это противоречит условию, что все $\bar{a}_i$ различны. Поэтому правая часть уравнения (6) положительна.

Покажем, что коэффициент при λ^2 тоже положителен. Для этого воспользуемся полученным выше видом решения задачи (2). Если решить аналогичную задачу на минимум дисперсии с ковариационной матрицей $\tilde{D}$, соответствующей решению задачи (1), получим минимальное значение дисперсии $\left\langle \tilde{D}^{-1}\tilde{e}, \tilde{e} \right\rangle^{-1}$. По предположению σ_0^2. больше этого значения, т. е. $\sigma_0^2 > \left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle^{-1}$. С учетом того, что $\lambda > 0$, λ является положительным решением уравнения (6).

Если $\tilde{p} \ge 0$ и выполнено остальная часть условий ККТ, а именно, неположительность производных функции Лагранжа по p_i с номерами, соответствующим нулевым компонентам, то вектор $\tilde{p}$, дополненный нулями на соответствующих местах, является решением задачи (1). В результате получаем формулы (4) и (5) для нахождения оптимальных истинно смешанных (содержащих не менее двух ненулевых компонент) стратегий.

Пример нахождения стратегии инвестирования в акции российских компаний

Рассмотрим применение полученных выше результатов для процесса инвестирования на фондовом рынке. В рамках классических подходов (см., например, [10]) смешанная стратегия интерпретируется как вектор долей финансовых инструментов в составе портфеля. Не исключая такую интерпретацию, предложим и несколько иную точку зрения. Инвестор, как правило, формирует портфель не одномоментно, а как последовательный процесс покупки того или иного финансового актива. В таком случае смешанная стратегия может реализовываться в своем имманентном смысле, т. е. покупки осуществляются случайным образом с распределением, определяемым найденным ранее оптимальным решением. Если этот процесс достаточно длительный, то структура портфеля будет приблизительно соответствовать виду смешанной стратегии.

Найдем оптимальный инвестиционный портфель, включающий акции компаний ПАО «Банк ВТБ» (VTBR), ПАО «Газпром» (SAGP), ПАО «Сбербанк России» (SBER). Будем использовать реальные данные о котировках за период с 01.02.2021 по 01.05.2021[14].

Стратегии 1, 2, 3 – вложение в акции компании «Банк ВТБ», «Газпром», «Сбербанк России» соответственно. На основании ежедневных значений цен закрытия рассчитаны средние доходности

$$\bar{a}_1 = 0.00548 \ (0.548\%), \ \bar{a}_2 = 0.00127 \ (0.127\%), \ \bar{a}_3 = 0.002 \ (0.2\%)$$

и ковариационная матрица

$$D = \begin{pmatrix} 0.00034 & 0.00010 & 0.000095 \\ 0.00010 & 0.00016 & 0.000094 \\ 0.000095 & 0.000094 & 0.00017 \end{pmatrix}$$

Найдем сначала минимальное значение дисперсии d_0, решив задачу (2). Для исходной матрицы D, имеем

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 3815.458 & -1597.97754 & -1296.22457 \\ -1597.97754 & 9840.62394 & -4696.6592 \\ -1296.22457 & -4696.6592 & 9514.1783 \end{pmatrix}, \ \langle e, D^{-1}e \rangle = 7988.538.$$

По формуле (3), получаем

$$p = 7988.538^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3815.458 & -1597.97754 & -1296.22457 \\ -1597.97754 & 9840.62394 & -4696.6592 \\ -1296.22457 & -4696.6592 & 9514.1783 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Откуда решением задачи (2) является стратегия $p = (0.11532, 0.44388, \ 0.44079)$, а соответствующее ей минимальное значение целевой функции есть $d_0 = 0.00013$.

Решим задачу (1) при пороговом значении СКО $\sigma_0 = 0.014$ (или дисперсии $\sigma_0^2 = 0.0002$).

Приведем для наглядности подробную процедуру решения этой задачи с использованием формул (4) и (5).

Возьмем I={1, 2, 3}, т. е. будем использовать исходный вектор ожидаемых доходностей $\bar{a} = (0.00548, 0.00127, \ 0.002)$ и исходную ковариационную матрицу D, тогда получаем $\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \rangle = 0.093993, \ \langle \tilde{e}, D^{-1}\tilde{a} \rangle = 16.60911.$ По формулам (5) имеем

$$\lambda = \sqrt{\frac{0.093993 \cdot 7988.538 - 16.60911^2}{0.0002 \cdot 7988.538 - 1}} = 28.1906,$$

$$\mu = \frac{16.60911 - 28.19068}{7988.538} = -0.00145 .$$

Используя формулу (4), получаем

$$p = 28.19068^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3815.458 & -1597.97754 & -1296.22457 \\ -1597.97754 & 9840.62394 & -4696.6592 \\ -1296.22457 & -4696.6592 & 9514.1783 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left(\begin{pmatrix} 0.00548 \\ 0.00127 \\ 0.002 \end{pmatrix} + 0.00145 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot$$

Получаем вектор $p = (0.62479, -0.01826,\ 0.39346)$, который не является решением, т. к. условие неотрицательности $p \geq 0$ нарушается.

Рассмотрим множество $I=\{1, 3\}$, тогда $\tilde{a} = (0.00548,\ 0.002)$,
$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0.00034 & 0.000095 \\ 0.000095 & 0.00017 \end{pmatrix}$, $\tilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 3555.969551 & -2058.89531 \\ -2058.89531 & 7272.59202 \end{pmatrix}$,
$\left\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \right\rangle = 0.090743$, $\left\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \right\rangle = 6710.771$, $\left\langle \tilde{e}, D^{-1}\tilde{a} \right\rangle = 18.60470$ и по формулам (5) получаем $\lambda = 27.63183$, $\mu = -0.00134$. Используя формулу (4), имеем вектор ненулевых компонент $\tilde{p} = (0.62840,\ 0.37161)$. Проверим выполнение условия ККТ для вычеркнутого номера $i = 2$. Производная функции Лагранжа по p_2 есть

$$\frac{\partial L_1(p, \lambda, \mu)}{\partial p_2} = \bar{a}_2 - \lambda \sum_{k=1}^{3} \sigma_{2k} p_k - \mu .$$

При подстановке вектора $(0.62840,\ 0.37161)$ и множителей Лагранжа $\lambda = 27.63183$ и $\mu = -0.00134$ она равна $\dfrac{\partial L_1(p, \lambda, \mu)}{\partial p_2} = -0.00009.$ Значит все условия ККТ выполнены и оптимальное решение задачи (1) имеет вид $p^0 = (0.62840\ ,\ 0,\ 0.37161\ )$.

В работе [2] рассматривался пример инвестирования за период с 01.10.2019 по 31.12.2019. Анализ статистических данных показывал, что значения ковариаций доходностей рассматриваемых компаний был на порядок меньше значений их дисперсий. Учет ковариаций практически не сказывался на результатах расчетов, поэтому правомерно было допущение о том, что ими можно пренебречь.

В рассмотренном выше примере инвестирования за период с 01.02.2021 по 01.05.2021 ковариации и дисперсии имеют примерно одинаковый порядок, причем ковариации являются положительными. Можно предположить, что это связано с восстановительным ростом после пика пандемии.

Если в данном примере пренебречь ковариациями, то имеем следующие результаты.

Решив задачу (1) без учета ковариаций при том же пороговом значении СКО, получаем решение задачи (1) $p = (0.75124,\ 0,\ 0.24876)$. Как видно структура стратегии не изменилась, но значения первой и третьей компонент существенно отличаются от этих значений вектора $p^0 = (0.62840\ ,\ 0,\ 0.37161\ )$.

Таким образом, идея учета ковариации случайных выигрышей разных чистых стратегий в играх с природой при нахождении оптимальной смешанной стратегии имеет основание. Конечно, в портфельном анализе эта идея не является новой, но игры с природой могут являться моделями и для других задач менеджмента.

Заключение

По мнению авторов, исследователь должен предоставить ЛПР набор моделей принятия решений в условиях неопределенности. В работе предложена модель такого типа для случая вероятностной неопределенности, которая сводится к задаче максимизации математического ожидания как оценки эффективности с ограничением сверху на СКО как оценку риска. Возможен также вариант перевода в ограничение эффективности, т.е. постановка задачи на минимум СКО (или дисперсии) с ограничением снизу на математическое ожидание выигрыша. Выбор порогового значения в ограничении отражает компромисс между эффективностью и риском и подлежит выбору ЛПР.

Список литературы

1. Горелик В.А., Золотова Т.В. Общий подход к моделированию процедур управления риском и его применение к стохастическим и иерархическим системам // Управление большими системами. Выпуск 37: М.: ИПУ РАН, 2012. С. 5–24.
2. Горелик В.А., Золотова Т.В. Двухкритериальный подход в играх с природой и его применение к фондовому инвестированию// Вестник Тверского государственного университета. Серия: экономика и управление. 2020. №4(52). С. 158–169.
3. Горелик В.А, Золотова Т.В. Использование статистических оценок в игре с природой как модели инвестирования // Статистика и экономика. 2020. Т.17. №6. С. 64–72.
4. Горский М.А., Лабскер Л.Г. Синтетический критерий Вальда-Сэвиджа для игры с природой и его экономические приложения // Вестник Алтайской академии экономики и права. 2020. №4–2. С. 179–193.
5. Жуковский В.И., Солдатова Н.Г. Гарантированные риски и исходы в «игре с природой» // Проблемы управления. 2014. №1. С. 14–26.
6. Фомина Т.П. Игры с природой и принятие решений // Вестник Липецкого государственного педагогического университета. Серия МИФЕ: математика, информационные технологии, физика, естествознание. 2015. №1(16). С. 42–47.
7. Фролова Т.В. Теория игр: игры с природой // Известия Института систем управления СГЭУ. 2020. №1(21). С. 217–221.
8. Чернов В.Г. Выбор решения на основе нечеткой игры с природой // Прикладная информатика. 2021. Т. 16. №2(92). С. 131–143.
9. Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бэйли Джефри В. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2018. 1028 с.
10. Gorelik V.A. and Zolotova T.V. Problem of Selecting an Optimal Portfolio with a Probabilistic Risk Function // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 216, No. 5, August, 2016. P. 603–611.
11. Grzyl, B., Apollo M., Kristowski A. Application of Game Theory to Conflict Management in a Construction Contract. Sustainability 2019, 11 (7), P. 1983–1994.
12. Rzepecki Ł., Jaśkowski P. Application of game theory against nature in supporting bid pricing in construction – Symmetry, 2021. 13(1), P. 132–145.

13. Xu Y., Xiao J., Zhang L. Global predictive power of the upside and downside variances of the U.S. equity market // Economic Modelling.2020. Vol. 93. P. 605–619.
14. Инвестиционная компания «ФИНАМ», URL: https://www.finam.ru/ (дата обращения 03.05.21).

Об авторах:

ГОРЕЛИК Виктор Александрович – профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН, профессор Московского педагогического государственного университета, e-mail: vgor16@mail.ru, ORCID: 0000−0003−2435−0796, SPIN-код: 3547-6587.

ЗОЛОТОВА Татьяна Валерьяновна – доцент, доктор физико-математических наук, профессор Департамента анализа данных и машинного обучения, ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве РФ», e-mail: tgold11@mail.ru, ORCID: 0000-0001-5185-0687, SPIN-код: 6997-9121.

THE CORRELATION DEPENDENCE OF PAYOFFS FOR MIXED STRATEGIES IN GAMES WITH NATURE

V.A. Gorelik[1,2], T.V. Zolotova[3]

[1] FRC CSC RAS, Moscow
[2] FSBOU VO "Moscow State Pedagogical University", Moscow
[3] FSOBU VO "Financial University under the Government of the Russian Federation", Moscow

The aim of the research is to develop and apply to investment problems the methods of decision-making in games with nature, considering the correlation of random values of payoffs for each pair of pure strategies. In this case, two criteria are considered: the mathematical expectation of a payoff and the standard deviation as a risk assessment. The two-criteria decision-making model is formalized by translating the risk assessment into a constraint. For such a generalized quadratic programming problem, analytical solution methods are obtained. An example of applying the proposed method to real statistical data is given.
***Keywords**:* two-criteria model, mathematical expectation, standard deviation, correlation

About the authors:

GORELIK Victor Aleksandrovich – Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, FRC CSC RAS, Professor of Moscow State Pedagogical University, e-mail: vgor16@mail.ru, ORCID: 0000-0003-2435-0796, SPIN-код: 3547-6587

ZOLOTOVA Tat'jana Valer'janovna – associated professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Data Analysis and Machine Learning, FSOBU VO "Financial University under the Government of the Russian Federation", Moscow, e-mail: tgold11@mail.ru, ORCID: 0000−0001−5185−0687, SPIN-код: 6997-9121.

References

1. Gorelik V.A., Zolotova T.V. Obshhij podhod k modelirovaniju procedur upravlenija riskom i ego primenenie k stohasticheskim i ierarhicheskim sistemam // Upravlenie bol'shimi sistemami. Vypusk 37: M.: IPU RAN, 2012. S. 5–24.
2. Gorelik V.A., Zolotova T.V. Dvuhkriterial'nyj podhod v igrah s prirodoj i ego primenenie k fondovomu investirovaniju // Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: jekonomika i upravlenie. 2020. №4(52). S. 158–169.
3. Gorelik V.A, Zolotova T.V. Ispol'zovanie statisticheskih ocenok v igre s prirodoj kak modeli investirovanija // Statistika i jekonomika. 2020. T.17. №6. C. 64–72.
4. Gorskij M.A., Labsker L.G. Sinteticheskij kriterij Val'da-Sjevidzha dlja igry s prirodoj i ego jekonomicheskie prilozhenija // Vestnik Altajskoj akademii jekonomiki i prava. 2020. №4–2. S. 179–193.
5. Zhukovskij V.I., Soldatova N.G. Garantirovannye riski i ishody v «igre s prirodoj» // Problemy upravlenija. 2014. №1. S. 14–26.
6. Fomina T.P. Igry s prirodoj i prinjatie reshenij // Vestnik Lipeckogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Serija MIFE: matematika, informacionnye tehnologii, fizika, estestvoznanie. 2015. №1(16). S. 42–47.
7. Frolova T.V. Teorija igr: igry s prirodoj // Izvestija Instituta sistem upravlenija SGJeU. 2020. №1(21). S. 217–221.
8. Chernov V.G. Vybor reshenija na osnove nechetkoj igry s prirodoj // Prikladnaja informatika. 2021. T. 16. №2(92). S. 131–143.
9. Sharp Uil'jam F., Aleksander Gordon Dzh., Bjejli Dzhefri V. Investicii. M.: INFRA-M, 2018. 1028 s.
10. Gorelik V.A. and Zolotova T.V. Problem of Selecting an Optimal Portfolio with a Probabilistic Risk Function // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 216, No. 5, August, 2016.R. 603–611.
11. Grzyl, B., Apollo M., Kristowski A. Application of Game Theory to Conflict Management in a Construction Contract. Sustainability 2019, 11 (7). P. 1983–1994.
12. Rzepecki Ł., Jaśkowski P. Application of game theory against nature in supporting bid pricing in construction – Symmetry, 2021. 13(1). P. 132–145.
13. Xu Y., Xiao J., Zhang L. Global predictive power of the upside and downside variances of the U.S. equity market // Economic Modelling.2020. Vol. 93. P. 605–619.
14. Investicionnaja kompanija «FINAM», URL: https://www.finam.ru/ (data obrashhenija 03.05.21).