Вестник ТвГУ. Серия "Физика". 2009. № 3. Выпуск 4. С. 70–79.

УДК 530.12:531.51

О ПРОБЛЕМЕ СИНГУЛЯРНОСТИ В ГРАВИТАЦИОННОЙ ФИЗИКЕ

В.М. Самсонов, Е.К. Петров

Тверской государственный университет,
кафедра теоретической физики

Показано, что возможность сингулярности в центрально-симметричном гравитационном поле вытекает не только из общей теории относительности (ОТО), но из рассмотрения действия и функции Лагранжа для пробной частицы помещенной в гравитационное поле. Тем самым, отвергнуты попытки интерпретации сингулярности как артефакта ОТО. Вместе с тем, сделал вывод о том, что черная дыра как физическая модель сингулярности не может образоваться во Вселенной за конечный промежуток времени.

Введение. Понятие сингулярности занимает одно из центральных мест в общей теории относительности (ОТО) и ее астрофизических приложениях. Развитие представлений о сингулярности привело к концепции черной дыры. Долгое время представления о сингулярностях и черных дырах считались незыблемыми и не вызывали каких либо возражений и сомнений, по крайней мере со стороны специалистов по теории гравитации поля. В последние годы ситуация резко изменилась. Для последующего рассмотрения сути возникшей проблемы целесообразно начать с краткого изложения результатов классической работы К. Шварцшильда [1], в которой были получены точные решения уравнений Эйнштейна [2] для статического центрально-симметричного гравитационного поля. Вводя переменные $x_0 = ct$, $x_1 = r^3/3$, $x_2 = -\cos\theta$ и $x_3 = \psi$, где t – время в системе отсчета, связанной с удаленным наблюдателем, где гравитационный потенциал φ равен нулю, c – скорость света, r, θ и ψ – сферические координаты, К. Шварцшильд получил следующее выражение для квадрата интервала

$$ds^2 = f_0 dx_0^2 - f_1 dx_1^2 - f_2 \frac{dx_2^2}{1 - x_2^2} - f_3 dx_3^2 \left(1 - x_2^2\right), \qquad (1)$$

где $f_0 = 1 - \alpha R^{-1}$, $f_1 = R^{-4}/f_0$, $f_2 = f_3 = R^2$. Здесь $R = \left(3x_1 + \rho\right)^{1/3}$ – вспомогательная переменная, имеющая размерность длины.

Функции $f_i(i=0,1,2,3)$ непосредственно связаны с главными компонентами метрического тензора:

$$g_{00}=f_0,\ g_{11}=-f_1,\ g_{22}=-f_2/\left(1-x_2^2\right),\ g_{33}=-f_3\left(1-x_2^2\right)$$

Весьма существенно, что в выражениях для f_i фигурируют две постоянных интегрирования α и ρ, от значения которых зависит окончательный вид метрики (1). Вполне естественно, что для нахождения указанных постоянных необходимо использовать два дополнительных физических условия (если только не исходить из априорных допущений, не имеющих обоснования). Дальнейшая история проблемы нахождения этих постоянных является весьма запутанной и, вместе с тем, поучительной. В работе [1] К. Шварцшильд не сделал никаких априорных допущений. Он отметил лишь, что функция $f_1=-g_{11}$ имеет сингулярность ($f_1\to\infty$) при $f_0=0$, т.е. при выполнении условия

$$3x_1=\alpha^3-\rho, \tag{2}$$

Это соотношение можно рассматривать как общее условие сингулярности компоненты g_{11}, полученное на основе ОТО. Каждой комбинации параметров α и ρ будет отвечать некоторое значение радиуса сингулярности $r_S=\left(3x_1^{(s)}\right)^{1/3}$. Вместе с тем, К. Шварцшильд подчеркивал, что параметры α и ρ не могут принимать какие угодно значения, хотя проблема нахождения этих постоянных в [1] не решена. Что же касается А.Эйнштейна [2], то он считал сингулярность решений предложенных им уравнений артефактом. Соответственно, он сместил ее в начало координат, положив $r_S=0$. При этом дополнительном условии соотношение (2) перепишется в виде $\rho=\alpha^3$, т.е. постоянные α и ρ выражаются друг через друга.

Однако последователи К. Шварцшильда пошли иным путем, априори положив $\rho\equiv 0$. В этом случае мы получим из (1) метрику [3-6]

$$ds^2=\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)c^2dt^2-\left(\frac{r}{r-\alpha}\right)dr^2-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\psi^2\right), \tag{3}$$

которая содержит лишь одну постоянную

$$\alpha=\frac{2GM}{c^2}, \tag{4}$$

которая обычно приписывается К. Шварцшильду и, соответственно, называется радиусом Шварцшильда или гравитационным радиусом.

Для нахождения этой постоянной в качестве дополнительного условия используется ньютоновский гравитационный потенциал

$$\varphi_N = -\frac{GM}{r}, \tag{5}$$

где G – гравитационная постоянная, M – масса тела, создающего гравитационное поле. Метрика (3) имеет две сингулярности различного типа: при $r = 0$ особенность имеет компонента метрического тензора g_{00}, а при $r = \alpha$ – компонента g_{11} (при этом $g_{00} = 0$). Примечательно, что в работе [7] авторы статьи [6] приписывают К. Шварцшильду другое выражение для метрики центрально-симметричного поля:

$$\begin{aligned} ds^2 = \left(\frac{r-\alpha/2}{r+\alpha/2}\right)c^2dt^2 - \left(\frac{r+\alpha/2}{r-\alpha/2}\right)dr^2 - (r+\alpha/2)^2 d\theta^2 \\ -(r+\alpha/2)\sin^2\theta d\psi^2, \end{aligned} \tag{6}$$

которое характеризуется наличием лишь одной особенности: при $r = \alpha/2$ в компоненте g_{11}.

Метрика (6) получается, если использовать так называемые гармонические переменные, т.е. те же самые четырехмерные координаты t, r, θ и ψ, на которые наложено дополнительное условие – четырехмерное волновое уравнение, т.е. уравнение Даламбера [8]. Нам такой подход представляется искусственным, и его использование объясняется лишь необходимостью нахождения постоянных интегрирования, фигурирующих в метрике (1).

Создается впечатление, что почти все авторы, ссылающиеся на классическую работу К.Шварцшильда [1] или с ней или не знакомились или делают вид, что не знакомились. Действительно, ошибочная метрика (3) с двумя сингулярностями была положена в основу обычно используемой модели черной дыры, которая характеризуется наличием как точечной сингулярности ($r_S = 0$), так и сингулярности, отвечающей горизонту событий ($r_S = \alpha$). Однако последний может беспрепятственно пересекаться объектами движущимися в направлении центра черной дыры [9]. Напомним, что черной дырой называют объект, радиус которого R_0 равен гравитационному радиусу α. Однако для поверхности, радиус которой равен α, промежуток времени

$$d\tau = g_{00}^{1/2} dt\,, \qquad (7)$$

должен быть тождественно равен нулю. Здесь $d\tau$ – промежуток времени, определяемый по часам, находящимся в точке с гравитационным потенциалом φ (локальная система отсчета), dt – промежуток времени в системе отсчета удаленного наблюдателя где $\varphi = 0$ [1]. Следовательно, на горизонте событий время останавливается. Соответственно, любое, даже элементарное для удаленного наблюдателя расстояние Δr в локальной системе отсчета, связанной с горизонтом событий, становится бесконечно большим. С этой точки зрения, свободное проникновение вещества и поля внутрь черной дыры, т.е. под горизонт событий, отвечающий $r = \alpha$, представляется невозможным (за конечный промежуток времени в системе отсчета, связанной с удаленным наблюдателем).

В работах [6; 7] отмечен ряд других противоречий и парадоксов, связанных с интерпретацией понятия сингулярности. В частности, отмечена работа М. Крускала [10], который предложил преобразование координат, позволяющее сдвигать радиус сингулярности r_S на бесконечность. Однако как справедливо отмечается в [6; 7], такое преобразование вряд ли можно считать решением проблемы сингулярности. Все эти противоречия казалось бы подтверждают мнения о сингулярности рассматриваемого типа как об артефакте математического аппарата ОТО. В результате в работах [6; 7] делаются выводы как о неадекватности ОТО, так и о том, что черная дыра является просто фантазией. Мы не согласны со столь радикальной точкой зрения. Изложению наших взглядов на проблему сингулярности и посвящена данная работа.

Как появилась концепция черной дыры. Выше уже отмечалось, что в рамках ОТО более или менее обоснованное нахождение постоянных α и ρ невозможно даже в принципе. Обычно [3; 4] эту проблему решают путем рассмотрения предельного случая ОТО: движения пробной частицы с собственной массой (массой покоя) m_0 в слабом гравитационном поле со скоростью v много меньшей c

[1] В [5] $d\tau$ называется промежутком истинного временем. Однако подразделение промежутков времени на истинные и неистинные противоречит принципу относительности. Следует подчеркнуть, что локальный наблюдатель не может установить самостоятельно, что в его системе отсчета время течет медленнее. Чтобы сравнить $d\tau$ и dt он должен обмениваться информацией с удаленным наблюдателем.

($v << c$). В этом приближении дифференциальное уравнение геодезической линии (уравнение движения материальной точки в ОТО)

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \tilde{A}^i_{rs} \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds} = 0$$

перепишется в виде

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -c^2 \tilde{A}^i_{00}, \; i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

здесь $\tilde{A}^i_{rs}$ – символы Кристоффеля. Для статистического или квазистатистического поля временными производными от g_{ik} можно пренебречь. В этом случае $\tilde{A}^i_{00} = \tilde{A}_{i,00} = \left(\partial g_{00} / \partial x^i\right)/2$. Тогда сравнивая (8) с ньютоновским уравнением движения

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{d\varphi}{dx^i}, \tag{9}$$

находим, что $c^2 g_{00} = \varphi + 2/c^2$. Постоянная $2/c^2$ введена для того, чтобы выполнялось предельное условие $g_{00} \to 1$ при $\varphi \to 0$. Окончательно находим[1]

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, \tag{10}$$

Если теперь подставить в (10) ньютоновский потенциал (5), то получим:

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \tag{11}$$

Если, наконец, сравнить (11) с функцией Шварцшильда $f_0 = g_{00} = 1 - \alpha R^{-1}$, то эти выражения совпадают при $\alpha = 2GM / c^2$ и $\rho = 0$.

Следует однако отметить, что в данном случае речь идет не просто об определении постоянных α и ρ, а об отождествлении

[1] Мы используем правило знаков (сигнатуру), принятое в [11]. В [4] принято другое правило знаков, отвечающее $g_{00} \to -1$ при $\varphi \to 0$. Тогда вместо (10) будем иметь $g_{00} = -1 - 2\varphi / c^2$.

функции f_0 с выражением (11), отвечающим приближению слабого поля и малых скоростей, т.е. фактически классическому случаю.

На самом же деле из выполнимости предельного условия (11) при больших r еще не следует, что $\rho \equiv 0$.

С другой стороны, нельзя не отметить функционального сходства между квазиклассическим выражением (11) и выражением, полученным Шварцшильдом для $g_{00} = f_0$ на основе точных решений уравнений Эйнштейна, отвечающих, в свою очередь, приближению квазиплоского пространства-времени.

Вывод формулы (11) не оставляет никаких сомнений в том, что интерпретация параметра α как значения r, отвечающего сингулярности метрики Шварцшильда, является совершенно некорректным. Действительно, приведенный выше вывод неприменим, в силу заложенных в него исходных допущений, к случаю, когда $g_{00} = 0$ ($g_{11} \to \infty$). Тем не менее, именно приравнивая нулю правую часть формулы (11), Ю. Оппенгеймер и Г. Снайдер ввели представление о черной дыре как объекте, радиус которого R_0 равен радиусу сингулярности $r_S = \alpha$ (сам термин был введен позже Дж. Уилером [13]). Процесс сжатия звезды, в результате которого она становится черной дырой, был назван в [12] гравитационным коллапсом. Однако кроме некорректности применения соотношения (11) при $g_{00} = 0$ следует также отметить, что последователи Ю. Оппенгеймера и Г. Снайдера игнорировали соотношение (7). Действительно, при $g_{00} = 0$ время останавливается ($d\tau = 0$). Таким образом, ни гравитационный коллапс, ни какой-либо иной способ образования черной дыры не может завершиться за конечное время. В этом плане мы согласны с авторами работ [6] и [7]. Вместе с тем, как будет показано ниже, сингулярность, впервые отмеченная А. Эйнштейном и К. Шварцшильдом, вовсе не является артефактом ОТО.

Является ли сингулярность атрибутом ОТО. Возможность сингулярности центрально-симметричного поля можно обосновать и не используя ОТО, если исходить из сравнения определяющего соотношения для действия

$$S = \int L dt, \qquad (12)$$

с выражением [11]

$$S = -m_0 c \int ds\,, \tag{13}$$

где L – функция Лагранжа. Построение функции Лагранжа для случая сильных полей и больших скоростей ν, сравнимых со скоростью света c, затруднительно. Однако, поскольку при $\varphi = 0$ метрический тензор g должен принимать галилеев вид

$$g = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

то степени v/c не должны фигурировать в указанном тензоре. Иными словами, выражение для компонент g_{ik}, найденные при $v/c \to 0$ должны оставаться справедливыми при любых $v/c < 1$. Этот вывод подтверждается и представленными в начале статьи выражениями для компонент g_{ik}, найденными К.Шварцшильдом в рамках ОТО. Согласно [11], при малых скоростях функция Лагранжа пробной частицы может быть записана в виде:

$$L = -m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} - m_0 \varphi\,, \tag{14}$$

Подставляя (14) в (12) и сравнивая последнее выражение с (13) при $v/c \to 0$, находим

$$g_{00} = \left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)^2, \tag{15}$$

Рассматривая аналогичную задачу, но вне связи с проблемой сингулярности, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [11] сделали допущение, что $|\varphi|/c^2 << 1$ (приближение слабого гравитационного поля). В этом приближении они получили вместо (15) известную ранее формулу (10). Что же касается формулы (15), то она отвечает приближению сильного гравитационного поля. В данном случае мы можем вполне обоснованно рассмотреть случай когда $g_{00} = 0$. Последние соотношение эквивалентно равенству

$$\varphi = -c^2, \tag{16}$$

При $g_{00} = 0$ должно также выполняться условие $g_{11} \to \infty$. Действительно из соотношения (7) следует, что при $g_{00} = 0$ время на горизонте событий останавливается. Соответственно, любое, даже элементарное для удаленного наблюдателя расстояние Δr, определенное в системе отсчета удаленного наблюдателя, будет бесконечно большим на горизонте событий, т.е. на поверхности, где выполняется условие (16). Таким образом, сингулярность в теории гравитационного поля не следует интерпретировать только как математическое понятие, связанное с решением уравнений ОТО. Физическая сингулярность – это поверхность обладающая особыми свойствами, и ее существование обосновано нами без использования ОТО. Вместе с тем, следует отметить, что, в силу соотношения (7), ни гравитационный коллапс, ни какой либо иной путь эволюции объекта не может привести к образованию черной дыры, т.е. тела, радиус которого R_0 равен радиусу сингулярности r_S.

Если подставить в (16) ньютоновский гравитационный потенциал (5), то для радиуса сингулярности находим

$$r_S = R_G = \frac{GM}{c^2}, \tag{18}$$

Именно эту величину, а не постоянную Шварцшильда α следовало бы назвать гравитационным радиусом объекта. Для α из (16) мы получим уже известное выражение (4).

Сопоставление полученных в данном разделе результатов с результатами К. Шварцшильда позволяет определить обе введенные им постоянные. В качестве двух дополнительных условий (по отношению к (2)) выступают формулы (5) и (16). Постоянная α находится из предельного условия больших r ($r^3 >> \rho$). Если же теперь подставить в (2) формулы (5) и (17) или вытекающие из них условие $r_S = \alpha/2$, то получим, что $\rho = (7/8)\alpha^3$.

Заключение. Таким образом, сингулярность не представляется нам артефактом ОТО, как это полагают авторы работ [6; 7]. Вместе с тем, мы отчасти согласны с этими авторами, выражающими скептическое отношение к концепции черных дыр. Действительно, представления о черных дырах, описываемые в [9; 14] и ряде иных работ представляются физически неадекватными. Приведем наиболее характерные примеры. В [9] описывается черная дыра, имеющая как сингулярность при $r = 0$, так и горизонт событий ($r = \alpha$). Уже отмечалось, что такая система является следствием ошибочного выражения (3), характеризующегося наличием двух сингулярностей. При этом автор работы [9] забывает о том, что речь идет о сингулярностях совершенно разного типа ($g_{00} \to \infty$ и $g_{11} \to \infty$). Описываемое в [9; 14] путешествие через горизонт событий также не имеют никакого физического смысла с учетом соотношения (7). Физически неадекватно и представление о вращении горизонта событий [9], поскольку эта поверхность не является материальной.

Однако все это вовсе не означает, что черная дыра – просто фантазия, как это считают авторы работы [6]. В соответствии с изложенным выше, черная дыра является физической моделью сингулярности, отвечающей объекту, для которого $R_0 = R_G$. Но, как уже отмечалось, такое состояние тела достижимо только асимптотически при $t \to \infty$. Иными словами, черные дыры не могли образоваться во Вселенной, поскольку время ее жизни огромно по человеческим меркам, но все же конечно. Заключение о модельном характере понятия черной дыры и о принципиальной невозможности достижения такого состояния объекта вовсе не означают, что все полученные ранее теоретические результаты, связанные с черными дырами, или не представляют интереса, или должны быть отвергнуты. Приведем два примера. Открытый теоретически С. Хокингом процесс квантового испарения [15] должен происходить не только вблизи горизонта событий, но и у поверхности любого массивного объекта, близкого к этой модели, но, тем не менее, не являющегося черной дырой. Напротив, целесообразность построения для черных дыр особой термодинамики [16; 17] вызывают у нас сомнения.

Вместе с тем, как и любая иная физическая модель (материальная точка, абсолютно твердое тело и др.) модель черной дыры может вполне продуктивно использоваться в теоретической и экспериментальной физике, в том числе в астрофизике. В последнее время много говорится и пишется о возможности образования черной дыры в большом адронном коллайдере. Результаты данной работы свидетельствуют о том, что эти опасения не имеют никаких оснований.

Список литературы

1. Шварцшильд К. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 199.

2. Эйнштейн А. Сборник научных трудов. Т. 1, М.: Наука, 1965. С. 43
3. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология, М.: Наука, 1974.
4. Паули В. Теория относительности. М.: Наука, 1983. 336 с.
5. Новиков И. Д., Фролов В. П. Физика черных дыр. М.: Наука, 1968. 326 с.
6. Киселев В. В., Логунов А. А., Мистविршили М. А. // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2006. Т. 37. Вып.3. С. 597.
7. Герштейн С. С., Логунов А. А., Мистविршвили М. А. // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2008. Т. 39. Вып. 1. С. 81.
8. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М.: ГИТТЛ, 1955.
9. Пенроуз Р. "Чёрные дыры" //УФН. 1973. Т. 109. Вып. 2. С. 355-369.
10. Kruskal M. D. Maximal extension of Schwarzchild metric //Phys. Rev. 1960. V. 119. P. 1743-1745.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., Наука, 1973.
12. Оппенгеймер Ю., Снайдер Г. // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 153
13. Wheeler J. A. //Am. Sci., 1968. V. 59. P. 1.
14. Торн К. С. Путешествие среди чёрных дыр //Природа. 1988. №8. С. 82-94.
15. Хартль Дж. Б., Хокинг С. Б. Черные дыры. М.: Мир, 1978. С. 222.
16. Шьяма Д. В. // Там же. С. 31
17. Хокинг С. // Там же. С. 204.