

УДК 548.5

## АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ В КОНОСКОПИЧЕСКИХ КАРТИНАХ ОДНООСНЫХ И ДВУОСНЫХ КРИСТАЛЛОВ

Е.Ю. Воронцова, А.И. Колесников, Н.О. Мамкина, В.Я. Молчанов<sup>1</sup>,  
И.В. Талызин, С.А. Третьяков, С.А. Чигиринский, А.В. Шелопаев

Тверской государственный университет,  
кафедра прикладной физики,

<sup>1</sup>Научно-исследовательский центр Акустооптики МИСИС

Теоретически рассмотрены вопросы, связанные с расчетом коноскопических картин. Показано, что использование известных соотношений, выведенных при некоторых упрощениях, затрудняет корректный анализ распределения интенсивностей в случае произвольного взаимного расположения оптической оси (осей) в кристалле, нормали к грани кристалла и падающего луча. В отраженном свете проведены коноскопические исследования одноосных и двуосных кристаллов, а также одноосных кристаллов, обладающих заметной двуосностью вследствие остаточных механических напряжений.

**Введение.** Несмотря на достаточно долгую историю коноскопических исследований оптически анизотропных кристаллов в сходящемся поляризованном свете, данный метод не утратил своего значения. Перспективы его развития связаны, в частности, с применением цифровых устройств для получения и обработки видеоизображений [1].

В тех случаях, когда точечная группа симметрии идеального кристалла данного химического строения установлена заранее, практический смысл коноскопических исследований заключается в обнаружении и анализе различных искажений оптической индикатрисы реального кристалла. Метод коноскопии является чувствительным при изучении аномальной двуосности одноосных кристаллов и позволяет рассчитывать величины и направления механических напряжений в соответствии с уравнением [2]:

$$\operatorname{tg} V = \frac{\sqrt{[(\pi_{1\mu} - \pi_{2\mu})\sigma_{\mu}]^2 + (2\pi_{6\mu}\sigma_{\mu})^2}}{\sqrt{N_o^{-2} - N_e^{-2}}}, \quad (1)$$

где  $V$  – половина угла между оптическими осями,  $\pi_{\lambda\mu}$  – пьезооптические коэффициенты,  $\sigma_{\mu}$  – компоненты тензора напряжений. При наличии в объеме исследуемого кристалла таких оптических аномалий, как свили, линии изохром заметно искажаются. С помощью коноскопии можно

также получить ценную информацию о характере механических напряжений вблизи микротрещин в кристалле.

Таким образом, помимо традиционных приложений (определение знака кристалла, ориентация пластинок, применение в полярископах) коноскопия является достаточно чувствительным и многофункциональным методом оптической дефектоскопии кристаллов. В то же время анализ пространственного распределения оптических аномалий и расчет величин, характеризующих аномалии, позволит вносить корректировки в технологию выращивания монокристаллов с целью повышения их однородности.

Для правильной интерпретации интерференционных коноскопических картин оказалось необходимым уточнить некоторые теоретические аспекты метода.

**Расчет разности хода обыкновенного и необыкновенного лучей.** На рис. 1 представлено взаимное расположение волновых векторов падающего ( $\vec{l}$ ) и одного из двух преломлённых ( $\vec{k}$ ) лучей, нормали  $\vec{m}$  к площадке (грани)  $G$ , на которую падает луч  $\vec{l}$ , и координатных осей кристаллофизической системы координат  $X_1, X_2, X_3$ , построенной на собственных векторах тензора диэлектрической непроницаемости  $\eta_{ik}$ . Для случая одноосного кристалла ось  $X_3$  совпадает с оптической осью.

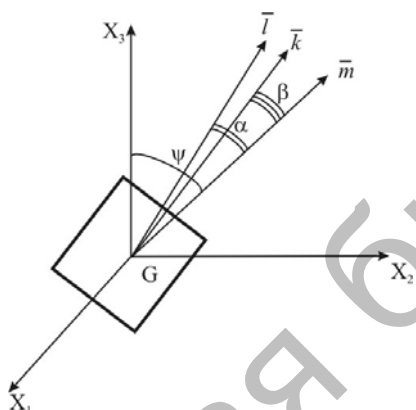


Рис. 1. К расчету угла преломления  $\beta$  луча  $\vec{l}$ , падающего под углом  $\alpha$  на грань одноосного кристалла  $G$ , характеризующуюся векторами  $\vec{m}$  нормали, составляющим угол  $\psi$  с оптической осью  $Z$

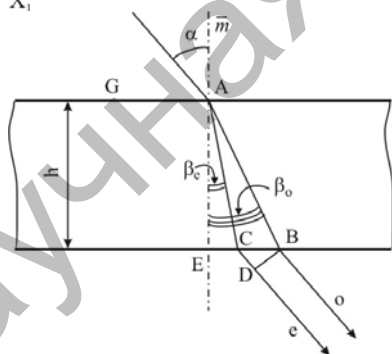


Рис. 2. К расчету разности хода лучей в анизотропной пластинке, вырезанной из одноосного положительного кристалла

На рис. 2 изображен ход обыкновенного (о) и необыкновенного (е) лучей в положительном одноосном кристалле ( $N_o < N_e$ ) в соответствии с работами [3–5]. В [3] получено правильное выражение для разности хода этих лучей в следующем виде (в рамках обозначений, принятых в настоящей работе):

$$\Delta = h \sin(ctg\beta_e - ctg\beta_o), \quad (2)$$

где  $h$  – толщина пластинки.

Далее, однако, в [3] используется приближенное значение для  $ctg\beta_e$ , а затем, после очередных упрощений, заключающихся в разложении радикалов в ряды, получено выражение для разности хода, связанное функционально с координатами  $x$  и  $y$  точки в фокальной плоскости, в которую попадают обыкновенный и необыкновенный луч после преломления в объективе:

$$\Delta = h \left( A + B \frac{y}{f} + C \frac{x^2}{f^2} + D \frac{y^2}{f^2} \right), \quad (3)$$

где  $f$  – фокусное расстояние объектива. Делается вывод о том, что изохромы являются линиями пересечения плоскостями трехмерной поверхности  $\Delta = F(x, y) = \text{const}$ , определяемой уравнением (3). При этом утверждается, что в общем случае изохромы являются кривыми второго порядка. Отметив еще раз, что выражение (3) получено с помощью двух упрощений, обратимся к экспериментальной коноскопической картине одноосного кристалла парателлуриата в случае отклонения нормали  $\vec{m}$  от оси  $X_3$  на угол  $\psi \approx 6^\circ$  (рис. 3). Эта картина снята в настоящей работе на отражение с помощью цифровой видеокамеры при освещении плоско поляризованным светом образца, помещенного на предметный столик микроскопа МИМ-8.

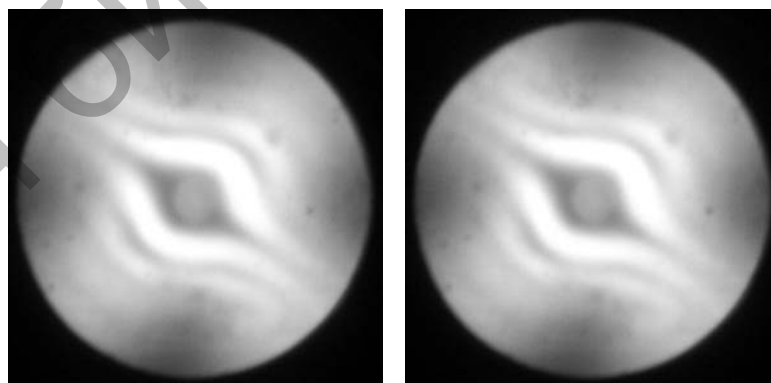


Рис. 3. Коноскопическая картина монокристалла парателлуриата при отклонении нормали к грани оптической оси на угол  $\psi \approx 6^\circ$

Совершенно очевидно несоответствие формы изохром вблизи центра креста изогир ни одной из кривых второго порядка – окружности, эллипса, параболы или гиперболы.

В работах [4; 5] выражение для разности фаз  $\Delta\varphi=2\pi\Delta/\lambda$  первоначально записывается в виде

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(AC/\lambda'' + CD/\lambda - AB/\lambda'\right), \quad (4, a)$$

где  $\lambda$  – длина волны в вакууме;  $\lambda'$  и  $\lambda''$  – длины волн в кристалле,  $\lambda'=\lambda/n_o$ ;  $\lambda''=\lambda/n_e$ . Далее с использованием очевидных геометрических соображений и закона преломления в [4; 5] получено точное выражение для разности фаз:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi h}{\lambda} (n_e \cos \beta_e - n_o \cos \beta_o), \quad (4, б)$$

совпадающее с формулой (2). Различия в способах вывода соотношений (2) и (4, б) состоят лишь в том, что одно получено при рассмотрении волновых нормалей, а второе – при рассмотрении волновых векторов. Далее, как и работе [3], в [4; 5] предпринимается ряд упрощений. В качестве обоснования для первого приближения выступает малость двулучепреломления, в качестве обоснования для второго и третьего – малость некоторого среднего угла  $\beta_c$ , лежащего между  $\beta_e$  и  $\beta_o$ . В результате итоговая формула для разности фаз, записанная в декартовой системе координат аналогично формуле (3), в [4; 5] имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \frac{2\pi h}{\lambda} (N_e - N_o) \left\{ x^2 \left( \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \sin^2 \psi \right) \right. \\ \left. + y^2 \left( \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \sin^2 \psi \right) - hx \sin 2\psi + h^2 \sin^2 \psi \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, что в случае, когда оптическая ось кристалла совпадает с нормалью к пластинке ( $\psi=0$ ) изохромами, согласно (5), будут окружности с центром в месте выхода оптической оси, т.е. кривые второго порядка. Следует отметить, что в отличие от работы [3], в [4; 5] по крайней мере, не утверждается, что и в случаях общего положения изохромны должны соответствовать кривым второго порядка. Однако ни в [4; 5], ни в какой-либо другой из указанных работ не указаны способы точного расчёта формы изохром. Для решения этой задачи запишем следующую систему уравнений:

$$(n^2 - N_o^2) \left\{ n^2 \left[ N_o^2 (k_1^2 + k_2^2) + N_e^2 k_3^2 \right] - N_o^2 N_e^2 \right\} = 0; \quad (6, a)$$

$$n = \sin \alpha / \sin \beta; \quad (6, б)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3)^2}; \quad (6, в)$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - (m_1 k_1 + m_2 k_2 + m_3 k_3)^2}; \quad (6, д)$$

$$\begin{vmatrix} m_1 & l_1 & k_1 \\ m_2 & l_2 & k_2 \\ m_3 & l_3 & k_3 \end{vmatrix} = 0$$

где  $m_i$ ,  $l_i$  и  $k_i$  – направляющие косинусы нормали  $\vec{m}$  к грани  $G$ , волнового вектора падающего луча  $\vec{l}$  и волнового вектора преломленного луча  $\vec{k}$  соответственно;  $N_o$  и  $N_e$  – главные значения показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. Уравнение (6, а) – это уравнение Френеля. Для одноосных кристаллов; (6, б) – закон преломления; (6, в) – выражение для угла между нормалью  $\vec{m}$  и падающим лучом  $\vec{l}$ ; (6, г) – выражение для угла между нормалью  $\vec{m}$  и преломленным лучом  $\vec{k}$ . Равенство нулю определителя в (6, д) отражает тот факт, что волновые векторы  $\vec{k}$  и  $\vec{l}$  (в отличие от соответствующих векторов Умова-Пойнтинга) должны лежать в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела. Неизвестными в системе уравнений (6) являются пять величин:  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $n$  и  $\beta$ . Уже первого взгляда на систему (6) достаточно для того, чтобы убедиться в принципиальной возможности её решения. Однако соответствующие аналитические выражения для  $n$  и  $\beta_e$ , необходимые при подстановке в формулу для разности фаз  $\Delta\varphi$  (4б) и последующего перехода в декартовую систему координат, в общем случае чрезвычайно громоздки и по этой причине здесь не приводятся. Это не является существенным препятствием в связи с возможностью численных расчетов с помощью ЭВМ. В развитие настоящей работы предполагается использование компьютерного моделирования с целью получения как можно большего количества решений во всех интервалах изменения параметров  $m_i$ ,  $k_i$  и  $l_i$ .

Предварительный анализ выражений для разности фаз, записанных в декартовых координатах, показывает, что соответствующие кривые в общем случае имеют порядок не ниже четвертого, и лишь в некоторых наиболее тривиальных случаях могут распадаться в том числе и на кривые второго порядка. В качестве примера приведём соотношения, соответствующие рассмотренному менее строго в работах [3–5] случаю падения на кристалл конуса лучей с осью, совпадающей с оптической осью кристалла. В этом случае мы имеем векторы  $\vec{m}(0,0,1)$ ;  $\vec{k}(k_1, k_2, \cos\beta)$  и  $\vec{l}(l_1, l_2, \cos\alpha)$ , а решение системы (6) после подстановки в 4, б даёт следующее выражение для разности фаз в зависимости от угла падения  $\alpha$  :

$$\frac{k\lambda}{hN_o} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{N_e^2}} - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{N_o^2}}, \quad (7)$$

где  $k$  – порядок максимума. При переходе в декартовую систему координат для точек с координатами  $(x, y)$  в фокальной плоскости

объектива с фокусным расстоянием  $f$  выражение (7) преобразуется к виду

$$\frac{k\lambda}{hN_o} = \frac{1}{N_e} \sqrt{\frac{N_e^2(x^2 + y^2 + f^2) - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + f^2}} - \frac{1}{N_o} \sqrt{\frac{N_o^2(x^2 + y^2 + f^2) - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + f^2}}, \quad (8)$$

Таким образом, уравнение для изохром даже в самом тривиальном случае падения света на грань кристалла, перпендикулярную оптической оси, является уравнением четвертой степени с левой частью, являющейся симметрическим относительно  $x$  и  $y$  многочленом следующего типа:

$$A(x^4 + y^4) + Bx^2y^2 + C(x^2 + y^2) - D^2 = 0, \quad (9)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  – коэффициенты, являющиеся функциями от  $k$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ,  $f$ ,  $N_o$  и  $N_e$ . На рис. 4 представлены результаты расчета изохроматических кривых согласно уравнению (8). Как и следовало ожидать, теоретически изохромами в рассмотренном случае оказались окружности, что и подтверждается экспериментально. Однако такой простой форме изохром мы обязаны не тем, что их общее уравнение соответствует уравнению окружности, а тем обстоятельством, что это уравнение четвертой степени имеет два распадающихся решения, причем уравнение для одного из многочленов имеет только комплексные корни, а уравнение для другого многочлена действительно является уравнением окружности.

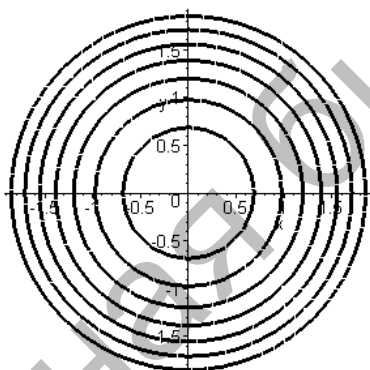


Рис. 4. Форма изохром, полученная с помощью расчета по уравнению (8)

Заметим, что практически все экспериментальные коноскопические картины, приводимые в известной литературе – как сравнительно современной, [2–5], так и относящейся, например, к началу прошлого столетия [6], – воспроизводят друг друга и соответствуют самым тривиальным случаям. Для одноосных кристаллов – это оптическая ось, перпендикулярная грани, или

оптическая ось, лежащая в плоскости грани. Для двuosных кристаллов – это грань, перпендикулярная биссектрисе угла между осями. Случаи общего положения экспериментально исследованы слабо, а соответствующие теоретические зависимости получены при существенных упрощениях и приближениях. Поэтому реальные коноскопические картины могут приводить исследователя к неверным выводам. Например, в случае картины, представленной на рис. 3, можно ошибочно объяснить явно не квадратичный вид изохром наличием какой-либо крупной оптической неоднородности. На самом же деле такой вид изохром вполне может соответствовать теоретическому.

Таким образом, правильная интерпретация экспериментальных коноскопических картин одноосных кристаллов должна основываться на анализе системы уравнений (6) и уравнения (4, б). Для двuosных кристаллов соответствующие уравнения ещё более усложняются.

**Выводы.** Без каких-либо приближений выведены уравнения, позволяющие находить точные решения для разности хода обыкновенных и необыкновенных лучей в пластине, вырезанной из одноосного кристалла. Показано, что в случае общего положения изохромы соответствуют линиям не второго порядка, а линиям порядка не ниже четвертого. Экспериментально получены коноскопические картины кристаллов парателлурита с изохромами, не являющимися кривыми второго порядка.

Работа поддержана грантом РФФИ № 07-02-12238.

#### Список литературы

1. Mamedov N., Yamamoto N., Shim Y., Ninomiya Y., Takizawa T. Extended application of light figures to optically active materials with transversally isotropic dielectric function // *Jap. J. Appl. Phys.* 2003. V. 42. P. 5045-5152.
2. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука. 1979.
3. Нагибина И.М., Москалёв В.А., Полушкина Н.А., Рудин В.Л. Прикладная физическая оптика. М.: Высшая школа, 2002.
4. Шувалов Л.А., Урусовская А.А., Желудев И.С. и др. Современная кристаллография. Т.4. Физические свойства кристаллов. М.: Наука. 1981. с.354-357.
5. Константинова А.Ф., Гречушников Б.Н., Бокуть Б.В., Валяшко Е.Г. Оптические свойства кристаллов. Мн.; Навука і тэхніка, 1995.
6. Белянкин Д.С. Кристаллооптика. Л., 1931.