УДК 517.8

ОТКЛОНЕНИЕ СВЕТОВОГО ЛУЧА МАССИВНЫМ ТЕЛОМ В ДИЛАТОННОЙ ГРАВИТАЦИИ

Воронцова Е.Г., Шаров Г.С.
Кафедра функционального анализа и геометрии

Исследованы наблюдательные проявления найденных ранее стационарных решений шварцшильдовского типа в дилатонной гравитационной модели. Найдено выражение для угла отклонения светового луча в гравитационном поле массивного тела в данной модели. Проведено сравнение с аналогичным выражением в общей теории относительности и с данными наблюдений.

For the stationary Schwarzschild type solutions (obtained previously) in the dilaton gravitational model observational manifestations were investigated. The expression for the deflection angle of a light beam in gravitational field of a massive body is deduced in the considered model. The results are compared with the similar expression from the general relativity theory and with observational data.

Ключевые слова: дилатонная гравитация; шварцшильдовский тип решения; теория относительности.
Keywords: dilaton gravitation; Schwarzschild type solution; relativity theory.

Дилатонная гравитационная модель [1, 2] является следствием теории струн в низкоэнергетическом пределе. Уравнения эволюции этой модели

$$R_{\mu\nu} + 2\phi_{;\mu\nu} = 0, \qquad R + 4(\nabla\phi)^2 = 0. \tag{1}$$

получены с помощью вариации действия [1] относительно гравитационного поля $g_{\mu\nu}$ и скалярного поля дилатонов ϕ. Здесь $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи $n+1$ - мерного псевдориманого многообразия (пространства-времени) $\mathcal{M}_{1,n}$, $R = R^\mu_\mu$ — скалярная кривизна.

В работах [3, 4] для системы уравнений (1) были найдены и исследованы стационарные решения шварцшильдовского типа, то есть центрально - симметричные решения в пустоте. Для метрики сферически симметричного псевдориманова многообразия $\mathcal{M}_{1,n}$ при $n \geq 3$

$$ds^2 = e^{2\alpha(r)}dt^2 - e^{2\beta(r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$
$$d\Omega^2 = d\theta_1{}^2 + \cos^2\theta_1 d\theta_2{}^2 + \dots + \cos^2\theta_1 \cdots \cos^2\theta_{n-2} d\theta_{n-1}^{\,2}.$$

t — временная, r — радиальная, θ_k — угловые координаты) выражения для $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ в найденных решениях имеют следующий вид:

$$e^{2\alpha} = e^{2\alpha_0}\left|\frac{\gamma-\gamma_+}{\gamma-\gamma_-}\right|^{1/K}, \quad e^{2\beta} = \left(1-\frac{\gamma}{\gamma_+}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\gamma_-}\right),$$
$$r = r_0\frac{|\gamma-\gamma_+|^{A_+}|\gamma-\gamma_-|^{A_-}}{|\gamma|^{1/(n-2)}}, \quad \phi = Q\alpha(r) + \phi_0. \tag{2}$$

Здесь используется параметр $\gamma = r\alpha'$, произвольная константа Q имеет смысл меры участия дилатонного поля ϕ в данных решениях (Q — постоянная интегрирования, фигурирующая в равенстве $\phi' = Q\alpha'$), а также введены следующие обозначения: $K = \sqrt{1 - \dfrac{4Q(1-Q)}{n-1}}$,

$$\gamma_{\pm} = (n-1)\frac{1-2Q \pm K}{4Q(1-Q)}, \quad A_{\pm} = \frac{1}{2(n-2)}\left(1 \pm \frac{2Q-1}{K}\right).$$

Семейство решений (2) обобщает известные решения Шварцшильда для $n+1$-мерной эйнштейновской гравитации

$$ds^2 = \left[1 - (r_g/r)^{n-2}\right] dt^2 - \left[1 - (r_g/r)^{n-2}\right]^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{3}$$

и переходят в них в пределе $Q \to 0$, так же как и уравнения дилатонной гравитации (1) переходят в уравнения Эйнштейна в пустоте $R_{\mu\nu} = 0$ в случае $\phi = \mathrm{const}$. Но, в отличие от решений Шварцшильда, решения (2) образуют двупараметрическое семейство в классе метрик. Параметр r_0 является аналогом гравитационного радиуса r_g, а дополнительный параметр Q характеризует степень интенсивности дилатонного поля в данном решении. Решения, описывающие черную дыру, имеют место только при $Q = 0$, $\phi = \mathrm{const}$ [4].

В работе [3] было исследовано такое наблюдательное проявление данной дилатонной гравитационной модели, как смещение перигелия (периастрия) квазиэллиптической орбиты пробной частицы в гравитационном поле массивного тела. Здесь и ниже мы полагаем, что $n = 3$ — пространство имеет физическую размерность.

В ведущем порядке малости по малому параметру (отношению гравитационного радиуса r_g к большой полуоси a орбиты) было получено следующее выражение для сдвига перигелия, то есть для угла поворота $\Delta\theta$ большой оси эллипса за один оборот:

$$\Delta\theta \simeq \frac{\pi(3-4Q)\, r_g}{a(1-\epsilon^2)}. \tag{4}$$

Здесь ϵ — эксцентриситет эллипса (орбиты). В дилатонной гравитационной модели важнейший наблюдательный параметр теории — сдвиг перигелия $\Delta\theta$ (4) — отличается множителем $1 - \frac{4}{3}Q$ от аналогичного выражения в общей теории относительности.

Используя теоретическое и экспериментальные значения угла смещения перигелия Меркурия получим ограничения для параметра Q. Рассмотрение экспериментальных данных проведем в рамках параметризованного постньютоновского формализма (ППН) [5], предполагающего введение параметров $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ равных в ОТО единице, смысл которых следующий: $\tilde{\gamma}$ — мера кривизны пространства, $\tilde{\beta}$ — степень нелинейности в гравитационном поле. Используя данные параметры можно записать выражение (4) в следующем виде [5]:

$$\Delta\theta \simeq (2 + 2\tilde{\gamma} - \tilde{\beta})\frac{\pi r_g}{a(1-\epsilon^2)}. \tag{5}$$

Используя теоретическое значение угла смещения перигелия Меркурия за 100 лет равное $42.98''$ и экспериментальные значения параметров $\tilde{\beta} = 1 \pm 3 \cdot 10^{-3}$ и

$\tilde{\gamma} = 1 \pm 3 \cdot 10^{-4}$ [5] можно получить следующие ограничения для параметра Q:

$$-0.0009 \le Q \le 0.0009. \tag{6}$$

Рассмотрим другое важнейшее наблюдательное проявление, позволяющее выявить наличие дилатонной составляющей в гравитации, а именно, отклонение светового луча в гравитационном поле массивного тела (Солнца). В работах [3, 4] был исследован предел $r \to \infty$ для решений шварцшильдовского типа (2), называемый ниже ньютоновским пределом, так как он отвечает слабому гравитационному полю. В этом пределе, эквивалентном $\gamma \to +0$, были получены следующие асимптотические соотношения для метрических коэффициентов:

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha} &= 1 + \rho + (1-Q)\rho^2 + (1-Q)\big(1 - \tfrac{13}{12}Q\big)\rho^3, \\ e^{-2\beta} &= 1 - (1-2Q)\,\rho + \tfrac{1}{2}Q(1-Q)\rho^2 + \tfrac{1}{4}Q(1-Q)(1-2Q)\rho^3. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь введен малый параметр $\rho = r_g/r$. Асимптотики (7) показывают, что решения (2) асимптотически плоскими в пределе $r \to \infty$, переходят в шварцшильдовское решение (3) при $Q = 0$, а параметр, играющий роль гравитационного радиуса в дилатонном решении (2) имеет вид

$$r_g = 2r_0|\gamma_+|^{A_+}|\gamma_-|^{A_-}. \tag{8}$$

Для анализа эффекта отклонения светового луча в дилатонной гравитации рассмотрим светоподобные геодезические, описываемые уравнением $ds^2 = 0$. Движение рассматриваем в плоскости $\theta_1 = 0$, $\theta \equiv \theta_2$.

Используя первые интегралы $\frac{dt}{ds} = Ae^{-2\alpha}$, $\frac{d\theta}{ds} = C_\theta/r^2$, которые получены после интегрирования уравнений соответствующих геодезических [3, 4]

$$\frac{d^2t}{ds^2} + 2\alpha'\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds} = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{ds}\frac{dr}{ds} = 0,$$

получим отношение между временем t и углом θ:

$$dt = \frac{A}{C_\theta}r^2e^{-2\alpha(r)}d\theta.$$

Здесь A — энергия и C_θ — угловой момент на единицу массы частицы.

Подставляем это равенство в выражение для метрики, приравнивая его к нулю

$$ds^2 = e^{2\alpha}dt^2 - e^{2\beta}dr^2 - r^2d\theta^2 = 0,$$

получим уравнение для угла $\theta = \theta(r)$:

$$d\theta = \frac{e^\beta dr}{r\sqrt{e^{-2\alpha}p^2r^2 - 1}}, \qquad p = \frac{A}{C_\theta} = \text{const}. \tag{9}$$

Тогда угол отклонения светового луча при движении "из $-\infty$ до $+\infty$" может быть найден по следующей формуле

$$\Delta\theta = 2\left[\int\limits_{r_0}^{+\infty}\frac{e^\beta dr}{r\sqrt{e^{-2\alpha}p^2r^2 - 1}} - \frac{\pi}{2}\right]. \tag{10}$$

Здесь предел интегрирования r_0 — минимальное значение "расстояния" r от центра притяжения до траектории светового луча. Величина r достигает минимума r_0 в точке, в которой $\frac{dr}{d\theta} = 0$, то есть обращается в нуль подкоренное выражение в (9), что приводит к условию

$$e^{-2\alpha(r_0)} p^2 r_0^2 = 1, \tag{11}$$

определяющее значение r_0.

Смысл параметра $p = A/C_\theta$ можно прояснить, если рассмотреть равенство (11) при отсутствии притяжения, то есть при $\alpha = 0$. В этом случае

$$r_0 = \frac{1}{p}.$$

Таким образом p^{-1} — прицельный параметр. Используем далее вместо r величину $\rho = r_g/r$ и воспользуемся формулами (7) разложения метрических коэффициентов по ρ. После соответствующей подстановки интеграл в формуле (10) примет вид

$$\int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{e^{\beta} dr}{r\sqrt{e^{-2\alpha} p^2 r^2 - 1}} = \int\limits_{0}^{\rho_0} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}. \tag{12}$$

Функция

$$f(\rho) = (1 - 2Q)\rho^3 - \rho^2 + \left[\frac{Q}{2}(3 - Q)\rho^2 + 2Q\rho + 1\right]\delta^2 \tag{13}$$

получена с помощью подстановки разложений (7) в интеграл (12) с учетом малости ρ, ρ_0, а также и малого параметра

$$\delta = p r_g.$$

Предел интегрирования $\rho_0 = r_g/r_0$ в выражении (12) находим из равенства (11), приводящего к тому, что ρ_0 является нулем функции (13), т.е. $f(\rho_0) = 0$. Исходя из того, что имеют место неравенства

$$r_g \ll r_0 \Rightarrow \quad \rho_0 \ll 1, \quad \delta \ll 1, \quad \rho \ll 1,$$

находим разложение для ρ_0 по степеням малого параметра δ

$$\rho_0 = \delta + B_1\delta^2 + B_2\delta^3 + o(\delta^3). \tag{14}$$

Это равенство равносильно соотношению

$$r_0^{-1} = p + B_1 p\delta + B_2 p\delta^2. \tag{15}$$

После подстановки выражения (14) в уравнение $f(\rho_0) = 0$ найдем коэффициенты B_1 и B_2:

$$B_1 = \frac{1}{2}, \qquad B_2 = \frac{5}{8} - \frac{Q}{4}(1 + Q).$$

Используя замену $x = \frac{\rho}{\rho_0} = \rho/(\delta + B_1\delta^2 + B_2\delta^3)$ запишем выражение (10) следующим образом:

$$\Delta\theta = 2\left[\int\limits_0^1 \frac{(1 + B_1\delta + B_2\delta^2)dx}{\sqrt{1 - x^2 + f_1(x)}} - \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}\right]. \tag{16}$$

$$f_1(x) = x(x-1)\Big[\delta(-2Q + (1-2Q)x) + \delta^2(-Q + \frac{3(1-2Q)}{2}x)\Big].$$

Вычисляя интеграл (16) с помощью разложения

$$\Delta\theta \simeq 2\int\limits_0^1 \left[\frac{(B_1\delta + B_2\delta^2)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{(1 + B_1\delta + B_2\delta^2)f_1(x)}{2(1-x^2)^{3/2}}\Big(1 - \frac{3f_1(x)}{4(1-x^2)}\Big)\right]dx.$$

получим с точностью до δ^2 следующее выражение:

$$\Delta\theta \simeq (2-2Q)\delta + \left[\pi\Big(-\frac{9}{16} + \frac{9Q}{4} - Q^2\Big) + (8 - 12Q)\right]\delta^2, \tag{17}$$

в то время как в ОТО угол отклонения луча света в поле Солнца описывается следующим выражением

$$\Delta\theta \simeq \frac{2r_g}{r_0} \simeq 2\delta. \tag{18}$$

Сравнивая оба выражения (17) и (18) можно отметить, что в дилатонной гравитации параметр $\Delta\theta$ отличается от выражения для ОТО множителем $1 - Q$ (с точностью до δ^2).

Получим ограничения для параметра Q в случае данного наблюдательного эффекта, воспользовавшись для этого параметризованным постньютоновским формализмом. Тогда выражение (18) может быть записано в виде [5]

$$\Delta\theta \simeq \left(\frac{1+\tilde{\gamma}}{2}\right)\frac{2r_g}{r_0}, \tag{19}$$

значение параметра $\tilde{\gamma}$ в ОТО считается равным единице, $\tilde{\gamma}$ — мера кривизны пространства.

Используя теоретическое значение угла отклонения светового луча $1.7505''$ и экспериментальное значение параметра $\tilde{\gamma} = 1 \pm 3\cdot 10^{-4}$ [5] получим следующие ограничения для параметра Q:

$$-0.0002 \leq Q \leq 0.0002. \tag{20}$$

Вклад квадратичной поправки δ^2 в (17) можно оценить, полагая параметр Q в выражении (17) малым. Тогда

$$\Delta\theta \simeq 2\delta + \left(-\frac{9\pi}{16} + 8\right)\delta^2. \tag{21}$$

Так как

$$\Delta\theta = 1,7505'' \pm 0,0003'' \simeq 8\cdot 10^{-6}(1 \pm 0,0002) \text{ рад},$$

то $\delta \simeq 4{\cdot}10^{-6}$, и вклад квадратичного члена в выражении (21) составляет $\simeq 1{\cdot}10^{-10}$ рад, что меньше экспериментальной погрешности. Поэтому при оценке параметра Q в (17) вклад квадратичной поправки не учитывался.

Сравнивая эту оценку с ограничениями (6) полученными из экспериментальных данных по смещению перигелия Меркурия, видим, что данные по эффекту отклонения светового луча налагают более жесткие ограничения на возможные значения параметра Q. Напомним, что для решений шварцшильдовского типа (2) параметр Q характеризует интенсивность дилатонного поля.

Список литературы

[1] Fradkin E.S., Tseytlin A.A. Effective field theory from quantized strings // Phys. Lett. B. 1985. V. 158. P. 316-326.

[2] Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Многомерные космологические решения фридмановского типа в дилатонной гравитации // Теоретич. и математич. физика. 2000. Т. 123. № 1. С. 163-176.

[3] Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Квазиэллиптические орбиты в дилатонной гравитации // Вестник ТвГУ. Сер. Прикл. мат. Тверь. 2005, С. 74-78.

[4] Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Решения шварцшильдовского типа в дилатонной гравитации // Теоретич. и математич. физика. 2005. Т. 145. № 1. С. 133-143.

[5] C. Will. Was Einstein Right? Testing Relativity at the Centenary // Annalen Phys. 2005. V. 15. P. 19 – 33.