Вестник ТвГУ. Серия "Физика". 2007. №6(34). Выпуск 3. С. 135–143

УДК 531.5

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ГРАВИТАЦИОННОГО КОЛЛАПСА НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ[1]

А.Ю. Семешкин, И.Д. Борисов
Тверской государственный университет,
кафедра теоретической физика

Введение. Обычно при оценке характерного (критического) значения массы звезды, при котором происходит ее гравитационный коллапс, исходят [1–4] из баланса между гидростатическим давлением и давлением, обусловленным тепловым движением частиц газа, из которого состоит звезда. Гидростатическое давление, в свою очередь, находят из силы взаимодействия между столбиком высотой R и массой M_1 и остальной массой M_2 однородного шара (рис. 1), где R – радиус звезды. Такой подход не является вполне строгим и не позволяет непосредственно судить о границе его применимости при оценке температуры Солнца и нахождении взаимосвязи между радиусом звезды и ее массой обычно исходят [1–4] из баланса между гидростатическим давлением и давлением, обусловленным тепловым движением молекул газа, из которого состоит звезда. В случае Солнца и других звезд, состоящих из плазмы, рассматривается идеальный плазменный газ, в случае нейтронной звезды – нейтронный.

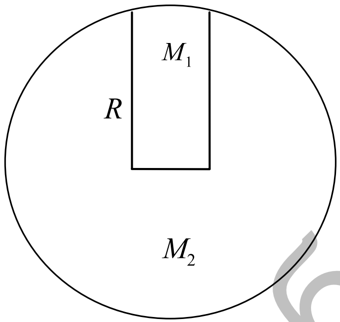

Рис. 1. К модели нейтронной звезды

При нахождении гидростатического давления исходят из силы взаимодействия между столбиком высотой R и массой M_1 и остальной массой M_2 однородного шара (рис. 1), где R – радиус звезды.

Такой подход не является вполне строгим и не позволяет непосредственно судить о границе его применимости подходе, а также об устойчивости рассматриваемого стационарного состояния.

Еще большие трудности возникают, если в случае нейтронной звезды учесть достаточно сложный ступенчатый характер зависимости давления от ее плотности ρ [4]. Как видно из рис. 2, такая зависимость

[1] Работа выполнена под руководством и при участии проф. В.М. Самсонова

представлена чередованием участков, отвечающим росту $P(\rho)$ и плато, на которых $P = \mathrm{const}$. Первые из них достаточно адекватно описывают вырожденный нейтронный газ, а вторые отвечают существенно неравновесному состоянию нейтронизации. С точки зрения гидростатического подхода, все участки кривой $P(\rho)$ существенны, т.к. они определяют величину давления при заданной плотности.

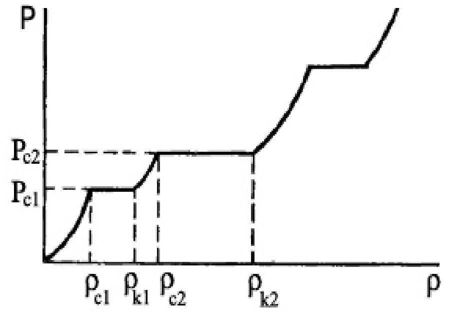

Рис. 2. Вид зависимости давления в нейтронной звезде от плотности нейтронного газа

Вместе с тем в рамках данной работы показано, что предыстория системы, т.е. наличие "плато" зависимости $P(\rho)$ не является существенным для условий гравитационного коллапса на участке, отвечающем модели вырожденного нейтронного газа.

Учитывая принципиальную невозможность судить о состоянии вещества черных дыр, для них предложена особая термодинамика, в том числе особая формулировка законов термодинамики [5]. Нейтронные звезды в этом отношении менее специфичны. Однако вырожденные характер нейтронного газа также накладывает необычный отпечаток на термодинамику нейтронной звезды. В данной работе состояние нейтронной звезды, предшествующее гравитационному коллапсу, рассматривает как полностью вырожденное. В квантовой статистике [6] этот термин имеет совершенно другое значение, чем в квантовой механике. Мы имеем в виду газ, подчиняющийся статистике Ферма, в которой все ячейки – от ячейки с нулевым импульсом до ячейки с некоторым максимальным импульсом – заняты. В состоянии полного вырождения газ «теряет» часть своих термодинамических свойств. Действительно, поскольку уравнение состояния вырожденного газа имеет вид $p = p(n)$, где n – плотность числа частиц, то уравнения термодинамики полностью вырожденного нейтронного газа не должны содержать ни температуры T, ни энтропии S [6]. Следовательно, в уравнении первого закона термодинамики:

$$dQ = dE + dA. \tag{1}$$

Количество теплоты $dQ = TdS$ следует положить равным нулю. В (1) dE –приращение энергии звезды, dA – работа, совершаемая над системой. В квазиклассическом приближении релятивистской термодинамики [7], полную энергию нейтронной звезды E можно представить в виде суммы энергии покоя $E_0 = M_0 c^2$ (M_0 – масса покоя, c – скорость света), внутренней энергии U и энергии самогравитации U_G:

$$E = E_0 + U + U_G. \qquad (2)$$

Внутренняя энергия U отвечает энергии «теплого» движения нейтронов, хотя термин «тепловое движение» является применительно к вырожденным системам не вполне удачным. Далее, если не рассматривать особые ситуации, например вхождение рассматриваемой нейтронной звезды в двойную систему, то работу dA также следует положить равной нулю, ввиду отсутствия объекта, над которым она совершается. Таким образом, для нейтронной звезды, не находящейся в состоянии нейтронизации, уравнение первого закона термодинамики переписывается в виде:

$$dE = 0, \qquad (3)$$

отвечающем полностью изолированной системе. Такой простой вид первого закона существенно упрощает дальнейшее построение термодинамики нейтронной звезды.

Выражение для гравитационной энергии (энергии самогравитации)

$$U_G = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}, \qquad (4)$$

нетрудно получить, интегрируя соотношение для гравитационного потенциала $\varphi = -GM(r)/r$. Проблема вывода соотношения, связывающего внутреннюю энергию U с массой нейтронной звезды является гораздо более сложной. В принципе возможно прямое нахождение внутренней энергии нейтронного флюида по аналогии с нахождением энергии классического или квантового флюида с использованием методов физики жидкого состояния [8]. Однако такой путь требует задания парного потенциала, характеризующего взаимодействие нейтронов, и параметров этого потенциала: эффективного диаметра нейтрона и глубины потенциальной ямы. Такой подход осложняется тем, что сама модель парных взаимодействий для нейтронного вещества не является вполне корректной, поскольку, как известно, в ядрах межнуклонные силы носят тензорный характер. Учитывая это, воспользуемся косвенным подходом, основывающимся на применении уравнений состояния вырожденного нейтронного газа, которые широко используются в физике звезд [1] и являются достаточно хорошо апробированными.

Критерий полного вырождения нейтронного газа можно записать в виде [9]:

$$n\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m\theta}\right)^{3/2} \square \ 1 \tag{5}$$

где $n = N/V$ – плотность числа чистец, m – масса частицы, $\hbar = h/2\pi$ – постоянная Планка $\left(h = 6.62\cdot 10^{-34}\ \text{Äæ} \times \text{ñ}\right)$, $\theta = kT$ – энергическая температура ($k = 1.38\cdot 10^{-23}\ \text{Äæ}/\text{Ê}$ – постоянная Больцмана). Учитывая, что плотность нейтронных звезд составляет $10^{14} - 10^{15}\ \text{ã}/\text{ñì}^{3}$, условию полного вырождения будут соответствовать температуры $T \square\ 300\ \text{K}$.

Уравнение состояние идеального вырожденного нейтронного газа можно записать в виде [1]:

$$p = K_n\rho^{5/3}, \tag{6}$$

где $K_n = \left(2\hbar^2/m\right)^{8/3} = 5.3\cdot 10^3\ \text{àòì}\cdot\text{ñì}^{5}/\text{ã}^{5/3}$. В дальнейшем мы воспользуемся также равнением состояния Камерона.

$$p = 5.3\cdot 10^3\rho^{5/3} + 1.6\cdot 10^{-14}\rho^{8/3} - 0.14\rho^2\ \text{àòì}, \tag{7}$$

учитывающим поправку на стерический эффект (конечный размер нейтронов) и силы межнейронного притяжения.

Выражения для внутренней энергии шара радиуса R, состоящего из нейтронного газа, можно вывести, воспользовавшись следующим приемом. Допустим, что гравитационные силы отсутствуют, а давление P в шаре уравновешивается внешним давлением P_{ex} (рис. 3). Тогда в соответствии с первым законом термодинамики (1), $dU = -dA = -pdV$ Учитывая, $dV = Md\rho^{-1} = -M\rho^{-2}d\rho$, имеем: $dU = K_nM\rho^{-1/3}d\rho$. Таким образом,

$$U = \frac{3}{2}K_nM\rho^{2/3} > 0. \tag{8}$$

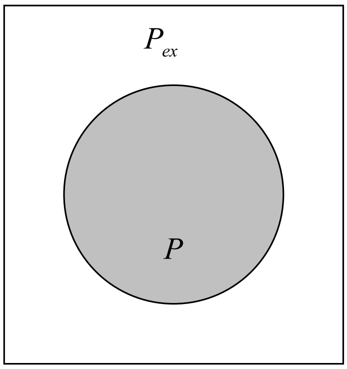

Рис. 3. К выводу выражения для внутренней энергии нейтронной звезды

Положительный знак U соответствует эффекту отталкивания между нейтронами, который противодействует силам гравитационного притяжения. Аналогичным образом может быть получено выражение для внутренней энергии нейтронного газа, описываемого уравнением состояния Камерона.

Вывод соотношения для стационарного радиуса нейтронной звезды в рамках модели полностью вырожденного идеального газа. В адиабатическом приближении (4) масса звезды M и энергия покоя Mc^2 остаются постоянными, поэтому для вариантной части энергии системы имеем:

$$E_V = \frac{3}{2} K_n M \rho^{2/3} - \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \frac{M^{5/3}}{R^2} - \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} \qquad (9)$$

Равновесному состоянию звезды будет отвечать:

$$\frac{dE}{dR} = -3\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} K_n M^{5/3} \frac{1}{R^3} + \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R^2} = 0 \,,$$

откуда для равновесного радиуса R_e находим

$$R_e = 5\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \frac{K_n}{GM^{1/3}} \,. \qquad (10)$$

Выражая массу звезды в солнечных массах $M_{\odot} = 2\times10^{33}$ ã, формулу (10) можно переписать в виде:

$$R_e = 12\left(\frac{M_{\odot}}{M}\right)^{1/3} \text{êì} \qquad (10')$$

Формулы (10) и (10') практически совпадают с соотношением:

$$R = 12\left(\frac{M_{\odot}}{M}\right)^{1/3} \text{êì} \,, \qquad (11)$$

полученным в [6] из баланса давлений.

Гравитационный коллапс будет иметь, если равновесный радиус R_e совпадает с гравитационным радиусом R_G (радиусом Шварцшильда). Последнее определяющее как радиус объекта, при котором вторая космическая скорость V_2 становиться равной скорости света: $V_2 = \left(2GM/R\right)^{1/2} = c$, откуда находим:

$$R_G = 2G\frac{M}{c^2} = 3\frac{M}{M_{\odot}} km \qquad (12)$$

Гравитационный коллапс будет отвечать пересечению графиков $R_e(M)$ и, $R_G(M)$ представленных на рис. 5 ($m = M/M_{\odot}$ – приведенная масса).

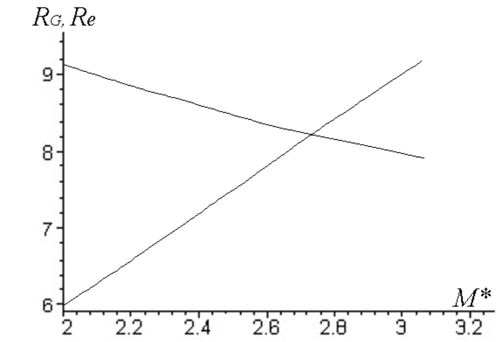

Рис. 5. Графическое нахождение критической массы нейтронной звезды, отвечающей ее коллапсу

Термодинамическая теория гравитационного коллапса с учетом потенциального взаимодействия между нейтронами. В п. 2 рассмотрение ограничивалось моделью идеального газа. В такой модели силы притяжения между нейтронами отсутствуют. Кроме того, эта модель не учитывает собственного объема нейтронов. Как следствие, равновесный радиус нейтронной звезды R_e стремиться к нулю при $M^* \to \infty$, что физически неадекватно.

Вклад сил отталкивания и притяжения в энергию нейтронного газа можно найти, если вместо уравнения (9) исходит из уравнения Камерона (7). Перепишем уравнение (7) в виде:

$$p = K_n \rho^{5/3} + K_r \rho^{8/3} - K_a \rho^2 ,$$

где $K_n = 5.3 \cdot 10^3 \text{àòì} \cdot \text{ñì}^5/\text{ã}^{5/3}$ – константа, отвечающая модели вырожденного идеального газа; $K_r = 1.6 \cdot 10^{-14}$ – константа, отвечающая силам отталкивания; $K_a = 0.014$ – константа, отвечающая силам притяжения.

Используя те же рассуждения, что и в пункте V, дифференциальное выражение для внутренней энергии запишется в виде:

$$dU = pM\rho^{-2}d\rho - MK_n\rho^{-1/3}d\rho - MK_a d\rho + MK_r\rho^{2/3}d\rho$$

Интегрируя это выражение, мы получаем:

$$U = MK_n \int \rho^{-1/3}d\rho + MK_r \int \rho^{2/3}d\rho - MK_a \int d\rho + const$$

$$U = M\{\frac{3}{2}K_n\rho^{2/3} + \frac{3}{5}K_r\rho^{5/3} - K_a\rho\} + const$$

Выражая плотность звезды через массу M и радиус R и добавляя к внутренней энергии энергию гравитационного поля, получим окончательное соотношение для вариантной части полной энергии системы:

$$E=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}K_nM^{5/3}R^{-2}+\frac{3}{5}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{5/3}K_rM^{8/3}R^{-5}-\left(\frac{3}{4\pi}\right)K_aM^2R^{-3}-$$
$$-\frac{3}{5}GM^2R^{-1}+const \qquad (13)$$

Константа в правой части уравнения предыдущие этапы эволюции нейтронной звезды, в том числе и процесс нейтронизации. Поскольку равновесный радиус звезды R_e определяется значением производной dE/dR, то величина константы не скажется на конечном результате определения радиуса звезды.

Необходимое условие экстремума приводит к уравнению четвертого порядка для равновесного радиуса:

$$R^4-5\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}\frac{K_\text{n}}{GM^{1/3}}R^3+5\frac{3}{4\pi}\frac{K_\text{a}}{G}R^2-5\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{5/3}\frac{K_\text{r}M^{2/3}}{G}=0 \qquad (14)$$

Первый член этого уравнения определяет силы гравитации, второй – отвечает вкладу идеального вырожденного газа, третий – учитывает силы отталкивания, а четвертый – притяжения.

Если пренебречь силами притяжения и отталкивания, то получим уравнение (10), полученное ранее. Если пренебречь только силами отталкивания, то получим уравнение

$$R^2-5\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3}\frac{K_n}{GM^{1/3}}R+5\frac{3}{4\pi}\frac{K_a}{G}=0, \qquad (15)$$

не имеющее решение.

Перепишем уравнения (14) и (15) в виде:

$$R^2-BR+C=0$$

B, C и *D* можно представить в виде коэффициентов:

$$B=12140\cdot M^{*-1/3},\quad C=2.51\cdot10^8,\quad D=17.6\cdot10^{15}M^{*2/3}$$

Подставляя значения B, C и D в уравнения (14) и (16), получим:

$$R^4-12140\cdot M^{*-1/3}R^3+2.51\cdot10^8\cdot R^2-17.6\cdot10^{15}\cdot M^{*2/3}=0 \qquad (16)$$

$$R^2-2140\cdot M^{*-1/3}R+2.51\cdot10^8=0 \qquad (17)$$

Решение уравнения (17) имеет вид:

$$R=6.07\cdot10^3M^{*-1/3}\pm\sqrt{36.9\cdot10^6\cdot M^{*-1/3}-2.51\cdot10^8}$$

Это решение является действительным при $36.9\cdot10^6\cdot M^{*-1/3}-2.51\cdot10^8>0$, т.е. при $M^*<0.003$, т.е. очень малым массам звезд, не представляющим интереса с точки зрения гравитационного коллапса.

Для получения решения уравнения (16) построим графики левой части этого уравнения при M^*=2.5; 3; 3.5; 4; 4.5; 5.

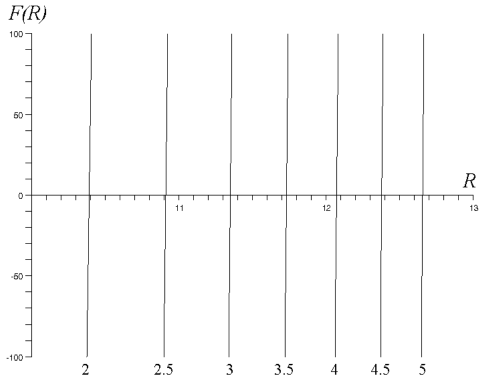

Рис. 6. Графическое решение уравнения (16). Цифры у кривых отвечают приведенной массе звезды

Теперь построим в одних осях график $R_e(M)$ (по полученным выше точкам) и график для R_G.

Из рис. 7. видно, что точка пересечения графиков $R_e\left(M^*\right)$ è $R_G\left(M^*\right)$ (кривая 3 и прямая 1) соответствует $M^* = 4.0$, что значительно больше значения $M^* = 2.7$, которое было найдено без учета сил притяжения между нейтронами и их эффективного размера.

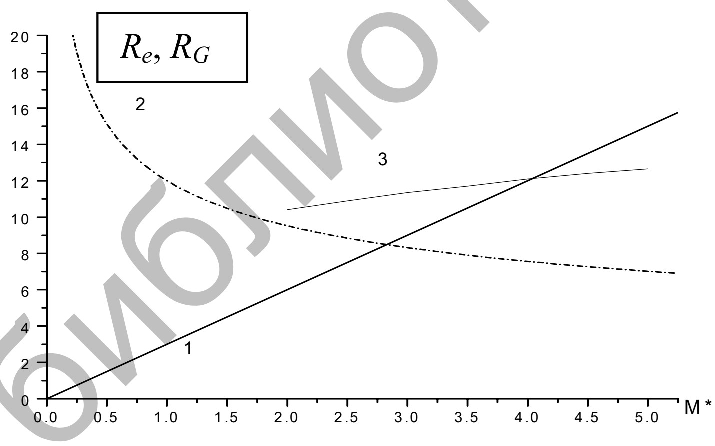

Рис. 7. К нахождению критических значений массы нейтронной звезды, отвечающей гравитационному коллапсу: 1 – гравитационный радиус звезды, 2 – равновесные радиусы, найденные без учета сил притяжения и отталкивания между нейтронами, 3 – равновесные радиусы, найденные с учетом сил притяжения и отталкивания между нейтронами

Таким образом, наша теория предсказывает, что гравитационный коллапс нейтронной звезды должен происходить при гораздо больших массах, чем это предсказывалось ранее.

Основные результаты и выводы.

1. Термодинамический подход позволил более корректно, чем это делалось раннее вывести формулу для стационарного радиуса нейтронной звезды.

2. Вместе с тем, энергетический подход открывает перспективы для учета дополнительных факторов, например вращения звезды, на протекание явления гравитационного коллапса.

3. Наш подход приводит к большему значению равновесного радиуса нейтронной звезды, чем формула, полученная из равенства давления нейтронного газа заданной плотности среднему гидростатическому давлению в нейтронной звезде.

4. Гравитационный коллапс должен иметь место, если масса звезды составляет не менее четырех масс Солнца.

Список литературы

1. Каплан С.А. Физика звезд. М.: Наука, 1977.
2. Бакулин П.И., Кононович Э.В., Мороз В.И. Курс общей астрономии. М: Наука, 1977.
3. Шкловский И.С. Звезды М.: Наука, 1984.
4. Имшенник В.С., Надежин Д.К. Конечные стадии эволюции звезд и вспышки сверхновых. Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. Т. 21. М., 1982.
5. Шьянма Д.В. Черные дыры и их термодинамика. М.: Мир, 1978. С. 31–65.
6. Семенченко В.К. Избранные главы теоретической физики. М.: Просвещение, 1966.
7. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1976.
8. Крокстон К. Физика жидкого состояния. М.: Мир, 1978.
9. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977.
10. Тихонов А.И., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной механике. М.: Наука, 1984.