УДК 621.36

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФОРМЫ РАССЕИВАТЕЛЯ ПО ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ В ДАЛЬНЕЙШЕЙ ЗОНЕ

С.В. Афанасьев, М.А. Кудряшова, М.В. Приятелев, Ю.В. Цымбал
Тверской государственный университет,
кафедра общей физики

Разработана программа в операционной системе MathcadPro решения обратной задачи теории рассеяния, включающая в себя нахождение полного, удовлетворяющего разработанному критерию, преобразования полей и диаграммой функции при параллельном переносе координатных осей. Указаны алгоритмы выбора необходимых точек из массива данных для восстановления формы объекта в полярных координатах. Показано, что на точности восстановления формы сильно сказываются значения коэффициентов разложения с большими индексами n. Удовлетворительные результаты получаются при условии n≥5.

Задача, которую мы собираемся исследовать, может быть сформулирована следующим образом [1]: требуется определить форму и расположение в пространстве идеально проводящего рассеивателя, если известно поле рассеяния в дальней зоне.

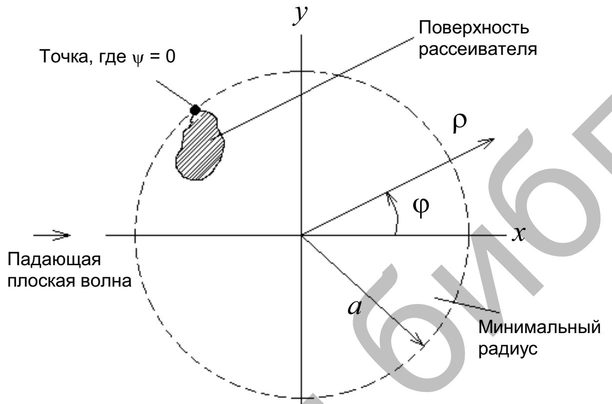

Рис. 1. Нахождение точки вблизи поверхности рассеивателя

Полное поле является суммой падающего и рассеянного полей, т.е.

$$\psi(\rho,\varphi) = \psi_i(\rho,\varphi) + u(\rho,\varphi) \tag{1}$$

где падающее поле $\psi_i = e^{-ikp}$.

Рассеянное поле в дальней зоне можно записать в виде

$$u(\rho,\varphi) = e^{-ikp}\left(\frac{2i}{\pi kp}\right)^{1/2} g(\varphi) \tag{2}$$

где $g(\varphi)$ – диаграмма функции рассеянного поля.

Научная библиотека ТвГУ

Мы полагаем, что функция $g(\varphi)$ нам известна, и наша задача состоит в получении информации о форме рассеивателя по виду этой функции.

Прежде всего, необходимо разложить диаграммную функцию $g(\varphi)$ в ряд Фурье и найти коэффициенты разложения a_n:

$$g(\varphi) \approx \sum_{n=-M}^{M} a_n e^{inp}, \; 0 < \varphi < 2\pi \tag{3}$$

Мы принимаем, что функция $g(\varphi)$ известна при всех значениях φ.

Следующей задачей является выражение поля в ближайшей зоне у поверхности рассеивателя через коэффициенты a_n. Оказывается, что такую операцию в общем случае нельзя осуществить для произвольной точки пространства с помощью одного линейного алгебраического преобразования. Приходится разрабатывать алгоритм, позволяющий произвести преобразование от дальнего поля к полю в ближайшей зоне посредством серии операций.

Для всех точек, расположенных вне окружности минимального радиуса, охватывающего рассеиватель, функцию $u(\rho,\varphi)$ можно выразить через a с помощью ряда a_n.

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=-M}^{M} a_n e^{-n} H_n^{(2)}(kp) e^{in\varphi}, \; \rho > a \tag{4}$$

где $H_n^{(2)}$ – функция Ганкеля второго рода.

Минимальный радиус нам заранее не известен, поскольку мы не знаем, где расположен рассеиватель. Однако мы можем найти положение рассеивателя, если будем вычислять полное поле согласно (1) и (4) для последовательно уменьшающихся значений радиуса r и проверять каждый раз, не обратилось ли полное поле в нуль хотя бы в одной точке окружности. Когда это происходит, мы заключаем, что нам удалось обнаружить местоположение по крайней мере одной точки на поверхности рассеивателя. Далее мы продолжаем поиск остальных точек.

Если заранее известно, что рассеиватель один и он выпуклый, то поиск можно продолжать следующим образом. Выбираем новое начало координат, скажем в точке (ρ_0,φ_0) (рис. 2.), и для него повторяем поиск точки, для которой полное поле равно нулю. Для этого нужно предварительно преобразовать диаграммную функцию к новым координатам.

Очевидно, что

$$g'(\varphi) = g(\varphi) e^{ikp_0 \cos(\varphi-\varphi_0)} = \sum_{m=-P}^{P} a'_m e^{im\varphi} \tag{5}$$

Научная библиотека ТвГУ

где a'_m – новые коэффициенты разложения Фурье, которые надо связать со старыми коэффициентами a_n. Разлогая функции $g(\varphi)$ и $e^{ikp_0\cos(\varphi-\varphi_0)}$ в ряды Фурье и перегруппировывая члены, получаем

$$a'_m = \sum_{n=-M}^{M} a_n i^{m-n} J_{m-n}(k\rho_0) e^{i(m-n)} \tag{6}$$

Правую часть уравнения (6) можно рассматривать как умножение матрицы на вектор $\{a_{-M}, \ldots\ldots, a_M\}$. В соотношении (5) весьма существен правильный выбор числа P. Поскольку последовательность коэффициентов a_n была обрезана при $n=M$, существенно знать, на каком значении P следует остановиться.

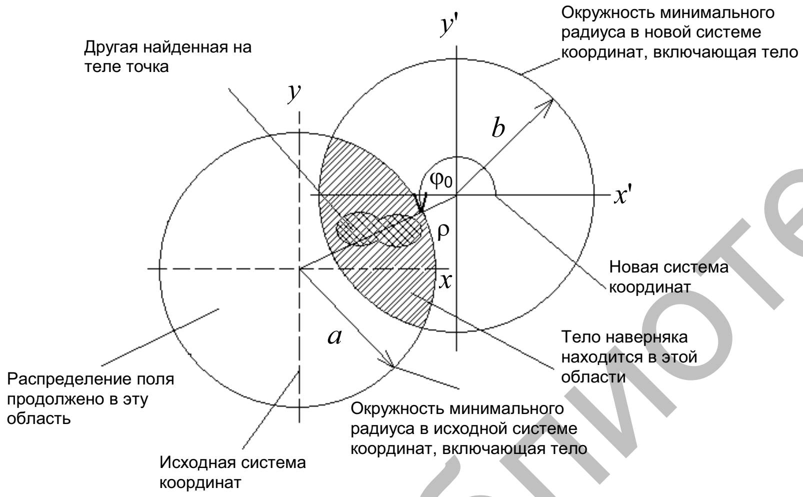

Рис. 2. Поиск точки в новой системе координат.

Алгоритм восстановления формы объекта по диаграмме направленности в дальней зоне.

1. Записываем координаты точки в начальной системе координат.
2. Осуществляем параллельный перенос и вычисляем координаты в новой системе координат.
3. Вычисляем функцию Бесселя для нахождения новых коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

   a. $$B(n,m,r) = \left(\frac{r}{2}\right)^{m-n} \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!\,\tilde{A}(m-n+k+1)} \cdot \left(\frac{\cos(r)}{2}\right)^{2k}$$

4. Записываем коэффициенты a для исходной системы координат.
5. Вычисляем новые коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.
6. Получаем новую систему Бесселя.
7. Записываем функцию Неймана.
8. Вычисляем рассеянное поле $F(x, y)$.
9. Осуществляем обратный переход в исходную систему координат.

Научная библиотека ТвГУ

10. Записываем полученные координаты точек и затем строим график.

В качестве объектов для восстановления формы использовались идеально проводящий цилиндр и сфера. Диаграмма направленности которых была взята из точного решения задачи МИ [10].

Результаты расчетов по предложенному алгоритму представлены на рис. 3.

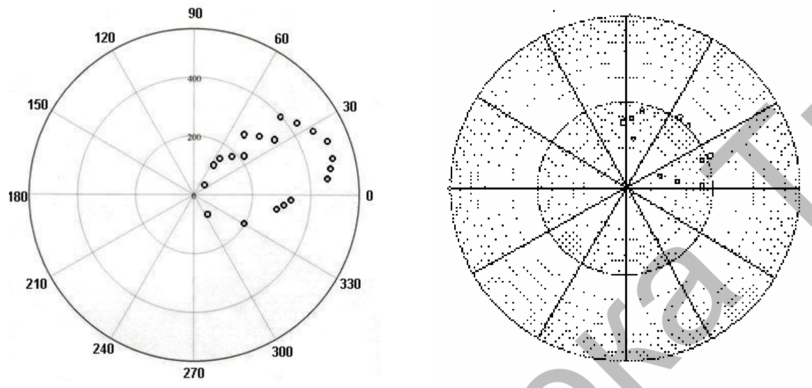

Рис. 3. Формы восстановления рассеивателя

Как видно из рисунка лучшие совпадения могут быть достигнуты за счет учета большего числа коэффициентов в пунктах 3 и 4 предложенного алгоритма.

Список литературы

1. Митра Р. Вычислительные методы в электродинамике. М.: Мир, 1977.
2. Imbriale W.A., Mittra R. / IEEE Trans. 1970. Ap-18, №5.
3. Гончаровский А.В. Обратные задачи рентгеновской дифрактометрии. М.: Наука, 1988.
4. Гончаровский А.В. Введение в компьютерную оптику. М.: Наука, 1985.
5. Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск,1978.
6. Тихонов А.Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. М.: Машиностроение, 1990.
7. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970.
8. Грей Э., Мэтьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложение к физике и механике. М.: Иностранная литератур, 1987
9. Кудрявцев Е.М. Mathcad 8. М.: ДМК, 2000.
10. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.

Научная библиотека ТвГУ