ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.872, 519.217.2, 519.113.3

О СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Соболев В.Н.*, **Кондратенко А.Е.****
*Лаборатория ТВП, г. Москва
**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 11.11.2021, после переработки 02.12.2021.

В статье рассматриваются стационарные распределения числа требований в системах массового обслуживания $M_\lambda|G|n|\infty$ и $GI_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$, и показывается, что введение в данные системы массового обслуживания вспомогательных распределений с понятным вероятностным смыслом вместе с их производящими функциями позволяет упростить как доказательство так и его восприятие, а также приводит к новой записи полученных результатов. В первой системе рассматривается усечённое распределение искомого стационарного распределения для вложенной цепи Маркова. Данное усечение связано с количеством каналов n и описывает вероятностные веса состояний системы, когда существует хотя бы один незанятый канал. Во второй системе для описания результатов используется распределение, связанное с распределением количества заявок во входящей группе требований: определяются вероятности хвостов описанного распределения, а потом для получения вспомогательного вероятностного распределения берётся их удельный вес между собой.

Ключевые слова: система массового обслуживания, стационарное распределение, производящая функция вероятностей, вложенная цепь Маркова, процесс восстановления.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 4. С. 5–13.
https://doi.org/10.26456/vtpmk626

Введение

При нахождении стационарных распределений числа требований в системах массового обслуживания часто используется метод вложенных цепей Маркова. Рассмотрим на двух примерах некоторые вопросы, связанные с данным методом, которые существенно (см. доказательство для системы $M_\lambda|G|n|\infty$ здесь и в [1], где оно проводится на стр. 320-322) упрощают доказательство, привнося в него дополнительный вероятностный смысл.

Пусть $\xi(t)$ — число требований в системе в момент t. В рамках данной системы в [2, стр. 171-175] (подробнее см. [3, стр. 97-108]) было найдено стационарное распределение процесса

$$\mathsf{P}(z) = \lim_{t\to\infty} Mz^{\xi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \,,$$

в котором искомое распределение определялось через стационарное распределение вложенной однородной цепи Маркова

$$\xi_n = \xi(t_n - 0),\; n = 1, 2, \ldots,\; \xi_1 = 0$$

с производящей функцией

$$\pi(z) = \lim_{t\to\infty} Mz^{\xi_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k \,. \qquad (1)$$

Почти всегда выражения для $\mathsf{P}(z)$ и $\pi(z)$ носят чисто аналитический характер. Однако оказывается, что в ряде случаев данной взаимосвязи можно придать вероятностную интерпретацию, а из доказательств убрать некоторые чисто технические моменты путем переориентации их от применения аналитических методов в сторону формальной алгебры.

1. О вложенной цепи Маркова системы $M_\lambda|\,D|n|\infty$

Система массового обслуживания $M_\lambda|\,D|n|\infty$ представляет собой частный случай системы $M_\lambda|\,G|n|\infty$. Она характеризуется тем, что каждая заявка обслуживается постоянное неслучайное время, которое для определенности здесь считается равным 1. При этом времена обслуживания заявок независимы в совокупности, не зависят от моментов их поступления. Обслуживание происходит с помощью n одинаковых приборов, и каждая заявка может обслуживаться на любом из них. Можно считать, что заявки на обслуживание выбираются из очереди в порядке их поступления в систему. Интенсивность входящего пуассоновского потока будет обозначаться через λ.

Как хорошо известно, распределение вероятностей $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$, определяемое равенством (1), может быть найдено как решение системы уравнений равновесия [1, стр. 31]

$$\pi = \pi\mathbb{P}\,, \qquad (2)$$

которая для системы массового обслуживания $M_\lambda|\,D|n|\infty$ записывается в виде [1, стр. 320]

$$(\pi_0, \pi_1, \ldots) = (\pi_0, \pi_1, \ldots) \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots\cdots \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots\cdots \\ 0 & \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_0 & \cdots\cdots \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где стохастический вектор $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ...)$ задает переходные вероятности вложенной цепи Маркова. Данный вектор можно описать с помощью производящей функции

$$\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k . \tag{4}$$

Поскольку в матрице $\mathbb{P}$ первые $n+1$ строк полностью совпадают, то оказывается удобным ввести величину

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k ,$$

с помощью которой определить компоненты

$$\alpha_k = \frac{\pi_k}{\Gamma} , \ k \in \mathbb{N}_0$$

вектора α с производящей функцией

$$\Lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k .$$

При этом очевидно, что

$$\alpha(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k z^k$$

является производящей функцией некоторого дискретного распределения. Данное распределение является усечением распределения $\pi = (\pi_0, \pi_1, ...)$.

Из (2) следует справедливость представления производящей функции

$$\pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k$$

в виде произведения матриц

$$\pi(z) = (\pi_0, \pi_1, ...) \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & ..... \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & ..... \\ .... & .... & .... & .... & ..... \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & ..... \\ 0 & \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & ..... \\ 0 & 0 & \gamma_0 & \gamma_1 & ..... \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_0 & ..... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ .... \end{pmatrix} .$$

Откуда

$$\pi(z) = (\pi_0, \pi_1, ...) \begin{pmatrix} \gamma(z) \\ .... \\ \gamma(z) \\ z^1 \gamma(z) \\ z^2 \gamma(z) \\ z^3 \gamma(z) \\ .... \end{pmatrix}$$

и далее

$$\pi(z) = \gamma(z)\sum_{k=0}^{n-1}\pi_k + \gamma(z)\, z^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}\pi_k z^k\,,$$

что, в свою очередь, может быть записано через производящие функции

$$\Lambda(z) = \gamma(z) + \gamma(z)\, z^{-n}\left(\Lambda(z) - \alpha(z)\right)\,. \tag{5}$$

Аналогично рассуждениям из [1, стр. 322] легко показать, что уравнение

$$\gamma(z) = z^n$$

в единичном круге $|z| \le 1$ при $\rho = \frac{\lambda}{n} < 1$ имеет ровно n корней. Это непосредственно следует из теоремы Руше. Обозначим эти корни через λ_1, ...,λ_n.

Равенства

$$\gamma(\lambda_i) = \lambda_i^n \tag{6}$$

вместе с соотношением (5) позволяют выписать справедливые при любом $i = 1, ..., n$ соотношения

$$\Lambda(\lambda_i) = \lambda_i^n + \left(\Lambda(\lambda_i) - \alpha(\lambda_i)\right)\,,$$

или, что то же самое

$$\alpha(\lambda_i) = \lambda_i^n\,. \tag{7}$$

Напомним, что $\alpha(z)$ есть производящая функция усечённого (см. [4, Т. 1, стр. 252]) распределения $\pi = (\pi_0, \pi_1, ...)$, связанного со значениями ξ_n равными $0, 1, ..., n-1$, т.е. с количеством каналов и распределением их занятости. Дополнительно отметим, что в матричной записи системы уравнений равновесия (3) данным значениям соответствуют полностью совпадающие начальные строки матрицы $\mathbb{P}$, и если их удалить, то матрица станет верхнетреугольной.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнено условие $\rho = \lambda/n < 1$, то стационарные вероятности $\pi_0, \pi_1, ..., \pi_{n-1}$ находятся из системы* (7)*. После чего остальные π_k вычисляются из* (5)*.*

Замечание 1. В заключении этой части обратим внимание на то, что данное выше доказательство верно для любой системы массового обслуживания, вложенная цепь Маркова которой удовлетворяет системе (3), поскольку явный вид

$$\gamma_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

вероятностей $\gamma_0, \gamma_1, ...$ использовался только при вычислении значения $\rho = \frac{\lambda}{n}$.

2. О стационарных вероятностях в системе $GI_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$

В системе массового обслуживания $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$ моменты поступления требований $t_0 = 0$, $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$ образуют процесс восстановления [5] с функцией распределения $\mathsf{P}\{X_n < t\} = G(t)$, где $X_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geqslant 1$.

В каждый момент t_n поступает группа из ν_n требований, причем величины ν_n независимы, одинаково распределены и ограничены. Величины ν_n независимы от величин X_n.

В системе имеется один обслуживающий прибор, время обслуживания распределено по показательному закону с интенсивность обслуживания μ и функцией распределения $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$, а число мест для ожидания неограниченно.

Определим T как среднее время между поступлениями групп заявок в систему

$$T = \mathsf{M}X_n = \int_0^\infty tdG(t)\,. \tag{8}$$

Пусть

$$\alpha(z) = \mathsf{M}z^{\nu_n} = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + ... + \alpha_m z^m\,,\ \alpha_m \neq 0 \tag{9}$$

производящая функция вероятностей $\alpha_k = \mathsf{P}\{\nu_n = k\}\,,\ k = 1, 2, ..., m\,.$

Тогда

$$\nu = \mathsf{M}\nu_n = \left.\alpha'(z)\right|_{z=1} = \sum_{k=1}^{m} k\alpha_k \tag{10}$$

— это среднее число заявок в поступающей группе.

Для входящей группы требований можно определить [4, т. 1, стр. 271] вероятности хвоста распределения, которые при $k = 0, ..., m$ обозначим через

$$A_k = \mathsf{P}\{\nu_n \geqslant k\} = \mathsf{P}\{\nu_n > k-1\} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_l\,.$$

В силу равенства

$$\sum_{k=0}^{m} A_k = \sum_{k=0}^{m} (\alpha_k + ... + \alpha_m) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + m\alpha_m) = \nu$$

скалярные величины

$$q_k = \frac{A_k}{\nu},\ k = 1, ..., m,$$

представляют собой распределение вероятностей с производящей функцией

$$A\,(z) = \frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{m} A_k z^k = \sum_{k=0}^{m} q_k z^k\,. \tag{11}$$

Пусть случайная величина Y_n обозначает время обслуживания n-ой заявки. Величины Y_n независимы друг от друга и от величин X_n, а также имеют одинаковое распределение.

В этом случае среднее время обслуживания n-ой заявки τ конечно и равно

$$\tau = \mathsf{M}Y_n = \int_0^\infty xdF(x) = \int_0^\infty x\mu e^{-\mu x}dx.$$

Пусть η_n — это число точек пуассоновского потока, с параметром μ, приходящих на интервале (t_n, t_{n+1}). Поскольку в системе имеется один обслуживающий прибор, а время обслуживания распределено по показательному закону с параметром μ, то величину η_n можно интерпретировать как количество заявок обслуженных за время $X_{n+1} = t_{n+1} - t_n$. Среднее число обслуженных на интервале (t_n, t_{n+1}) требований равно

$$\mathsf{M}\eta_n = \mu T = \frac{1}{\rho_0} = \frac{\mu}{\lambda}\,.$$

Тогда нагрузка рассматриваемой системы массового обслуживания может быть найдена по формуле

$$\rho = \nu\rho_0\,. \tag{12}$$

Для стационарного распределения аналогичными выше рассуждениями можно получить следующие представления (см. также [6]).

Теорема 2. *Если выполнено условие $\rho < 1$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и задается производящей функцией*

$$P(z) = \rho\pi(z)A\,(z) + 1 - \rho\,, \tag{13}$$

где $A\,(z)$ определяется равенством (11), *а ρ — это нагрузка данной системы массового обслуживания* (12).

Замечание 2. Формула (13) показывает, что искомое распределение есть смесь вырожденного распределения и распределения представляющего собой сумму распределений: стационарного распределения вложенной цепи Маркова с распределением “хвоста” входящей группы требований.

Следствие 1. *Если для системы $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ выполнено условие $\rho < 1$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и совпадает со стационарным распределением последовательности $\xi(t_n - 0)$, а для их производящих функцией справедливо представление*

$$P(z) = \pi(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho A\,(z)}\,. \tag{14}$$

Заключение

В системе массового обслуживания $M_\lambda|\,D|n|\infty$ использование производящей функции усечённого распределения позволяет в достаточно простой форме записать решение и наглядно объяснить возникновение дополнительной системы ограничений. При этом ход самого доказательства становится более очевидным.

В системе массового обслуживания $GI_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ для распределения числа требований во входящей группе вероятностей хвоста данного распределения применение производящей функции хвостовых вероятностей позволяет представить искомые вероятности p_n как свёртку двух распределений, одно из которых — распределение вложенной цепи Маркова, а другое — описанное выше хвостовое распределение.

Список литературы

[1] Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.

[2] Соловьёв А.Д., Соболев В.Н. Одна система массового обслуживания с групповым поступлением требований // Материалы Международной научной конференции “Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях”, АВМТВ-2017 (Россия, Москва, 23–27 октября 2017). Под ред. А. В. Лебедева. М.: Изд-во РУДН, 2017. С. 171–175.

[3] Soloviev A.D., Sobolev V.N. One Server Queue with Bulk Arrivals // Analytical and Computational Methods in Probability Theory. Eds. by V. Rykov, N. Singpurwalla, A. Zubkov. Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 10684. Cham: Springer. Pp. 97–108. https://doi.org/10.1007/978-3-319-71504-9_10

[4] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964. 752 с.

[5] Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории массового обслуживания. Киев: Мир, 1963. 315 с.

[6] Соболев В.Н. О законе стационарной очереди для одной системы массового обслуживания с групповым поступлением требований // Управление большими системами. 2019. № 77. С. 6–19. https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.1

Образец цитирования

Соболев В.Н., Кондратенко А.Е. О стационарных распределениях некоторых систем массового обслуживания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. №4. С. 5–13. https://doi.org/10.26456/vtpmk626

Сведения об авторах

1. **Соболев Виталий Николаевич**
   научный сотрудник лаборатории теории вероятностей и математической статистики.

   Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский пр-кт, дом 47, лаборатория ТВП.
   E-mail: sobolev_vn@mail.ru

2. **Кондратенко Александр Евгеньевич**
   доцент кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

   Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.
   E-mail: ae_cond@mech.math.msu.su

ON THE STATIONARY DISTRIBUTIONS IN SOME QUEUEING SYSTEMS

Sobolev Vitaliy Nickolayevich
Research Officer, Laboratory of TVP
Russia, 117418, Moscow, 47 Nachimovskiy av., Laboratory of TVP.
E-mail: sobolev_vn@mail.ru

Condratenko Alexandr Evgenyevich
Associate Professor at the Department of Mechanics and Mathematics,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: ae_cond@mech.math.msu.su

Received 11.11.2021, revised 02.12.2021.

This paper deals with two queuing system: $M_\lambda|G|n|\infty$ and $GI_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$. The purpose is to find the steady-state results in terms of the probability-generating functions.

Keywords: queueing system, batch arrivals, probability generating functions, embedded Markov chain, renewal process.

Citation

Sobolev V.N., Condratenko A.E., "On the stationary distributions in some queueing systems", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 4, 5–13 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk626

References

[1] Bocharov P.P., Pechinkin A.V., *Teoriya massovogo obsluzhivaniya [Queuing theory]*, Publishing House of RUDN, Moscow, 1995 (in Russian), 529 pp.

[2] Solovyov A.D., Sobolev V.N., "One queuing system with group receipt of requirements", *Proceedings of the International Scientific Conference "Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications"*, ACMPT-2017 (Russia, Moscow, October 23-27, 2017), ed. A. V. Lebedev, Publishing House of RUDN, Moscow, 2017, 171–175 (in Russian).

[3] Soloviev A.D., Sobolev V.N., "One Server Queue with Bulk Arrivals", *Analytical and Computational Methods in Probability Theory*. V. 10684, Lecture Notes in Computer Science, eds. V. Rykov, N. Singpurwalla, A. Zubkov, Springer, Cham, 97–108, https://doi.org/10.1007/978-3-319-71504-9_10.

[4] Feller W., *Vvedenie v teoriyu veroyatnostej i ee prilozheniya [Introduction to probability theory and its applications]*, Mir Publ., Moscow, 1964 (in Russian), 752 pp.

[5] Gnedenko B.V., Kovalenko I.N., *Lektsii po teorii massovogo obsluzhivaniya [Lectures on queuing theory]*, KVIRTU Publisher, Kyiv, 1963 (in Russian), 315 pp.

[6] Sobolev V.N., “Khinchin’s basic law of a stationary queue for single-server queueing systems with batch arrivals”, *Upravlenie bolshimi sistemami [Large-Scale Systems Control]*, 2019, №77, 6–19 (in Russian), https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.1.