УДК 517.95, 532.5

О НОВОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДАЕМЫХ СОБСТВЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Григорьева В.В.*, **Шеретов Ю.В.****
*Тверской государственный технический университет, г. Тверь
**Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 10.01.2022, после переработки 20.01.2022.

Квазигидродинамическая система была предложена Шеретовым Ю.В. в 1993 году. Она отличается от системы Навье-Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости дополнительными дивергентными членами. В работе методом Громеки-Бельтрами построено новое однопараметрическое семейство точных решений квазигидродинамической системы, которые удовлетворяют также системе Навье-Стокса. Это семейство порождается собственной функцией двумерного оператора Лапласа.

Ключевые слова: система Навье-Стокса, квазигидродинамическая система, метод Громеки-Бельтрами, точные решения, собственная функция двумерного оператора Лапласа.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 1. С. 5–17.
https://doi.org/10.26456/vtpmk631

Введение

Методам построения точных решений классической системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости посвящена обширная научная литература [1] – [6]. В 1993 г. Шеретовым Ю.В. была предложена [7] еще одна математическая модель, получившая названия квазигидродинамической (КГД). В монографиях [8], [9] изложены физические принципы, на основе которых КГД модель была получена, выявлены ее связи с системами Навье–Стокса и Эйлера, найдены семейства точных решений. В публикациях [10] – [14] продолжена разработка методов построения точных решений системы КГД.

В настоящей работе методом Громеки–Бельтрами построено новое однопараметрическое семейство точных решений квазигидродинамической системы, которые удовлетворяют также системе Навье–Стокса. Это семейство порождается собственной функцией двумерного оператора Лапласа.

1. Квазигидродинамическая система и система Навье–Стокса

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних сил в стандартных обозначениях может быть представлена в виде

$$\operatorname{div}\ \vec{u} = \operatorname{div}\ \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \big((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla\big)\vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u} + \nu \nabla\big(\operatorname{div}\ \vec{u}\big) + \operatorname{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{w}). \tag{1.2}$$

Вектор $\vec{w}$ вычисляется по формуле

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p\big). \tag{1.3}$$

Греческой буквой ν обозначен коэффициент кинематической вязкости жидкости, постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Символом Δ обозначен оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, действующий на векторное поле. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2},$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Параметры ν и τ являются положительными константами.

Если в (1.1) – (1.2) пренебречь членами, содержащими τ, то получим классическую систему Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div}\ \vec{u} = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u}. \tag{1.5}$$

Пусть

$$\Omega = \{(\vec{x}, t) : \vec{x} \in \mathbb{R}^3_{\vec{x}},\ t \geqslant 0\}$$

– множество в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$. Добавим к системам (1.1) – (1.2) и (1.4) – (1.5) начальное условие

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3_{\vec{x}}. \tag{1.6}$$

Будем полагать, что функция $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ является бесконечно дифференцируемой и ограниченной на $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$. Для системы Навье–Стокса векторное поле $\vec{u}_0$ соленоидально, т.е.

$$\operatorname{div}\ \vec{u}_0 = 0. \tag{1.7}$$

В случае квазигидродинамической системы ограничение (1.7), вообще говоря, не накладывается. Давление $p = p(\vec{x}, t)$ в (1.1) – (1.2) и (1.4) – (1.5) определено с точностью до произвольной функции времени.

Определение 1. *Гладким решением задачи Коши* (1.1) – (1.2), (1.6) *для квазигидродинамической системы назовем функции* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\ t) \in \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$, $p = p(\vec{x},\ t) \in C^\infty(\Omega)$, *удовлетворяющие при всех* $(\vec{x},\ t) \in \Omega$ *уравнениям* (1.1) – (1.2), *а также начальному условию* (1.6).

Определение 2. *Гладким решением задачи Коши* (1.3) – (1.4), (1.6) *для системы Навье–Стокса назовем функции* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\ t) \in \boldsymbol{C}^{\infty}(\Omega)$, $p = p(\vec{x},\ t) \in C^{\infty}(\Omega)$, *удовлетворяющие при всех* $(\vec{x},\ t) \in \Omega$ *уравнениям* $(1.4) - (1.5)$, *а также начальному условию* (1.6).

Квазигидродинамическая система (1.1) – (1.2) в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_x}{\partial t} + \big(u_x - w_x\big)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \big(u_y - w_y\big)\frac{\partial u_x}{\partial y} + \big(u_z - w_z\big)\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big) + \\ + \frac{\partial(u_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_x)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_x)}{\partial z},\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_y}{\partial t} + \big(u_x - w_x\big)\frac{\partial u_y}{\partial x} + \big(u_y - w_y\big)\frac{\partial u_y}{\partial y} + \big(u_z - w_z\big)\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \\ = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big) + \\ + \frac{\partial(u_x w_y)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_y)}{\partial z},\end{gathered} \tag{1.10}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_z}{\partial t} + \big(u_x - w_x\big)\frac{\partial u_z}{\partial x} + \big(u_y - w_y\big)\frac{\partial u_z}{\partial y} + \big(u_z - w_z\big)\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \\ = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big) + \\ + \frac{\partial(u_x w_z)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_z)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_z)}{\partial z}.\end{gathered} \tag{1.11}$$

Здесь

$$w_x = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big), \tag{1.12}$$

$$w_y = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big), \tag{1.13}$$

$$w_z = \tau\Big(u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z}\Big). \tag{1.14}$$

Система (1.8) – (1.14) замкнута относительно неизвестных функций – компонент вектора скорости $u_x = u_x(x, y, z, t)$, $u_y = u_y(x, y, z, t)$, $u_z = u_z(x, y, z, t)$ и давления $p = p(x, y, z, t)$.

Система Навье–Стокса (1.4) – (1.5) в декартовых координатах записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \Big), \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \Big), \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \Big). \tag{1.18}$$

2. Метод Громеки–Бельтрами

Займемся построением точных решений, общих для квазигидродинамической системы и системы Навье–Стокса.

Утверждение 1. *Пусть $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $p = p(\vec{x}, t)$ – гладкое решение переопределенной системы уравнений в частных производных*

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{u}, \tag{2.1}$$

$$div\ \vec{u} = 0, \tag{2.2}$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = 0. \tag{2.3}$$

Тогда пара $(\vec{u}, p)$ является точным решением как системы Навье–Стокса (1.4) – (1.5)*, так и квазигидродинамической системы* (1.1) – (1.2)*.*

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что равенства (1.4) и (1.5) выполняются. В силу (2.3) и (1.3) все добавочные к системе Навье–Стокса члены в квазигидродинамической системе обращаются в нуль. □

Запишем (2.3) в форме Громеки–Лэмба

$$\nabla \Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p \Big) = [\vec{u} \times \vec{\omega}]. \tag{2.4}$$

Здесь

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

– вихрь поля скорости, $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – единичные орты правой декартовой системы координат. Допустим, что $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ удовлетворяет обобщенному условию Громеки–Бельтрами

$$\mathrm{rot}\ [\vec{u} \times \vec{\omega}] = 0. \tag{2.6}$$

Тогда векторное поле $[\vec{u} \times \vec{\omega}]$ является потенциальным, т.е. существует функция $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$, такая, что

$$\nabla \Psi = [\vec{u} \times \vec{\omega}]. \tag{2.7}$$

Утверждение 2. *Пусть векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\ t) \in \boldsymbol{C}^{\infty}(\Omega)$ подчиняется переопределенной системе уравнений в частных производных*

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{u}, \tag{2.8}$$

$$div\ \vec{u} = 0, \tag{2.9}$$

$$rot\ [\vec{u} \times \vec{\omega}] = 0. \tag{2.10}$$

Тогда пара $(\vec{u}, p)$, где

$$p = p_0(t) + \Psi - \frac{\vec{u}^2}{2}, \tag{2.11}$$

является точным решением как системы Навье–Стокса (1.4) – (1.5), так и квазигидродинамической системы (1.1) – (1.2). Здесь функция Ψ удовлетворяет уравнению (2.7), $p_0(t)$ – произвольная бесконечно дифференцируемая на промежутке $[0, +\infty)$ функция времени.

Доказательство. С помощью (2.7) преобразуем (2.4) к виду

$$\nabla \Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p - \Psi \Big) = 0. \tag{2.12}$$

Подстановка (2.11) в (2.12) приводит к истинному равенству. Далее нужно воспользоваться Утверждением 1. □

Утверждение 3. *Пусть существует функция $\Psi_0 = \Psi_0(\vec{x}) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3_{\vec{x}})$ и вещественное положительное число λ, такие, что отличное от тождественного нуля векторное поле $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x}) \in \boldsymbol{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3_{\vec{x}})$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\Delta \vec{u}_0 = -\lambda \vec{u}_0, \tag{2.13}$$

$$div\ \vec{u}_0 = 0, \tag{2.14}$$

$$\nabla \Psi_0 = [\vec{u}_0 \times \vec{\omega}_0]. \tag{2.15}$$

Тогда пара $(\vec{u}, p)$, где

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{-\lambda \nu t}, \tag{2.16}$$

$$p = p_0(t) + \Big(\Psi_0 - \frac{\vec{u}_0^2}{2} \Big) e^{-2\lambda \nu t}, \tag{2.17}$$

является точным решением задачи Коши как для системы Навье–Стокса, так и для квазигидродинамической системы. Здесь $\vec{\omega}_0 = rot\ \vec{u}_0$, $p_0(t)$ – произвольная бесконечно дифференцируемая на промежутке $[0, +\infty)$ функция времени.

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что равенства (2.8), (2.9) и (1.6) выполняются. Подействуем оператором rot на (2.16). Это дает

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 e^{-\lambda \nu t}. \tag{2.18}$$

С помощью (2.15), (2.16) и (2.18) находим

$$[\vec{u} \times \vec{\omega}] = e^{-2\lambda \nu t} [\vec{u}_0 \times \vec{\omega}_0] = e^{-2\lambda \nu t} \nabla \Psi_0 = \nabla \Psi, \tag{2.19}$$

где
$$\Psi = \Psi_0 e^{-2\lambda\nu t}. \tag{2.20}$$
Тогда
$$\mathrm{rot}\ [\vec{u} \times \vec{\omega}] = \mathrm{rot}\ \nabla\Psi = 0, \tag{2.21}$$
и условие (2.10) также выполняется. Подстановка (2.16) и (2.20) в (2.11) приводит к формуле для вычисления давления (2.17). □

Изложенные здесь построения основаны на идеях И.С. Громеки и Э. Бельтрами. Для системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости этот подход получил дальнейшее развитие в работах В. Тркала, Дж.И. Тейлора и других авторов. Научная новизна заключается в том, что используемый метод построения точных решений в полной мере применим к квазигидродинамической системе уравнений.

3. Точные решения трехмерной квазигидродинамической системы, порождаемые собственными функциями двумерного оператора Лапласа

Рассмотрим новый способ построения точных решений квазигидродинамической системы.

Утверждение 4. *Пусть существует отличная от тождественного нуля функция $\psi_0 = \psi_0(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2_{x,y})$ и вещественное положительное число λ, такие, что выполняется равенство*
$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2} = -\lambda\psi_0, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2_{x,y}. \tag{3.1}$$
Тогда пара $(\vec{u}, p)$, где
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{-\lambda\nu t}, \tag{3.2}$$
$$p = p_0(t) + \Big(\Psi_0 - \frac{\vec{u}_0^2}{2}\Big)e^{-2\lambda\nu t}, \tag{3.3}$$
является точным решением задачи Коши как для системы Навье–Стокса, так и для квазигидродинамической системы. Здесь
$$\vec{u}_0 = \vec{i}\ \frac{\partial\psi_0}{\partial y} - \vec{j}\ \frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \alpha\vec{k}\ \psi_0, \tag{3.4}$$
$$\Psi_0 = \frac{\big(\alpha^2 - \lambda\big)}{2}\psi_0^2, \tag{3.5}$$
α – любое вещественное число, $p_0(t)$ – произвольная бесконечно дифференцируемая на промежутке $[0, +\infty)$ функция времени.

Доказательство. Заметим, что для векторного поля $\vec{u}_0$, определяемого формулой (3.4), выполняются равенства (2.13) и (2.14). Вычислим
$$\vec{\omega}_0 = \mathrm{rot}\ \vec{u}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\psi_0}{\partial y} & -\dfrac{\partial\psi_0}{\partial x} & \alpha\psi_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha\vec{i}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial y} - \alpha\vec{j}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial x} - \vec{k}\Big(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\Big) =$$

$$= \alpha\vec{i}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial y} - \alpha\vec{j}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \lambda\vec{k}\,\psi_0. \tag{3.6}$$

С помощью (3.4) и (3.6) находим

$$[\vec{u}_0 \times \vec{\omega}_0] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial\psi_0}{\partial y} & -\dfrac{\partial\psi_0}{\partial x} & \alpha\psi_0 \\ \alpha\dfrac{\partial\psi_0}{\partial y} & -\alpha\dfrac{\partial\psi_0}{\partial x} & \lambda\psi_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,\big(\alpha^2 - \lambda\big)\psi_0\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \vec{j}\,\big(\alpha^2 - \lambda\big)\psi_0\frac{\partial\psi_0}{\partial y} = \frac{\big(\alpha^2 - \lambda\big)}{2}\nabla\Big(\psi_0^2\Big) = \nabla\Psi_0. \tag{3.7}$$

Таким образом, равенство (2.15) также справедливо, причем функция Ψ_0 задается формулой (3.5). Далее нужно воспользоваться Утверждением 3. □

Замечание 1. Если $\alpha \neq \pm\sqrt{\lambda}$, то построенное решение не является однородно-винтовым.

Замечание 2. В частном случае $\alpha = -\lambda$ эти точные решения системы Навье–Стокса в безразмерной форме были построены в [15]. При этом параметр λ мог принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пример 1. Собственная функция

$$\psi_0 = A\cos\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big). \tag{3.8}$$

удовлетворяет уравнению (3.1), причем

$$\lambda = \frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}. \tag{3.9}$$

Здесь A, L и H – заданные положительные константы. В (3.4) положим

$$\alpha = \frac{\beta}{L}, \tag{3.10}$$

где β – произвольное вещественное число. С помощью (3.2), (3.4), (3.8) – (3.10) вычисляем компоненты вектора скорости

$$u_x = -\frac{A}{H}\cos\Big(\frac{x}{L}\Big)\sin\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{3.11}$$

$$u_y = \frac{A}{L}\sin\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{3.12}$$

$$u_z = \frac{\beta A}{L}\cos\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(\frac{y}{H}\Big)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \tag{3.13}$$

Принимая во внимание (3.3) – (3.5), (3.8) – (3.10), находим распределение давления

$$p = p_0(t) + \frac{1}{2}\Bigg(\Big(\frac{\beta^2}{L^2} - \frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\Big)A^2\cos^2\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big) -$$
$$-\frac{A^2}{H^2}\cos^2\Big(\frac{x}{L}\Big)\sin^2\Big(\frac{y}{H}\Big) - \frac{A^2}{L^2}\sin^2\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big) -$$
$$-\frac{\beta^2 A^2}{L^2}\cos^2\Big(\frac{x}{L}\Big)\cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big)\Bigg)e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \quad (3.14)$$

Для любого $\beta \in \mathbb{R}$ набор функций (3.11) – (3.14) задает точное решение как системы Навье–Стокса (1.15) – (1.18), так и квазигидродинамической системы (1.8) – (1.14). При $\beta = 0$ получаем известный вихрь Тейлора–Грина. Если

$$\beta = \pm\sqrt{1 + \Big(\frac{L}{H}\Big)^2},$$

то построенное решение будет однородно-винтовым.

Заключение

Регуляризованные уравнения гидродинамики активно применяются для построения и теоретического обоснования численных методов решения практически важных задач [16] – [20]. Найденные точные решения могут использоваться в качестве тестов для демонстрации точности и эффективности этих методов.

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[3] Riley N., Drazin P.G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.

[4] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.

[5] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.

[6] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

[7] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[8] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[9] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[10] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье-Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13–25. https://doi.org/10.26456/vtpmk176

[11] Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 84–96. https://doi.org/10.26456/vtpmk557

[12] Шеретов Ю.В. О классах точных решений квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 5–17. https://doi.org/10.26456/vtpmk592

[13] Шеретов Ю.В. О построении точных решений двумерной квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. С. 5–20. https://doi.org/10.26456/vtpmk605

[14] Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих системам Навье–Стокса и Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. Т. 2. С. 5–15. https://doi.org/10.26456/vtpmk611

[15] Kovalev V.P., Prosviryakov E.Yu. A new class of non-helical exact solutions of the Navier-Stokes equations // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2020. Vol. 24, № 4. Pp. 762–768. https://doi.org/10.14498/vsgtu1814

[16] Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. 30 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66

[17] Balashov V.A., Zlotnik A.A. An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // Journal of Computational Dynamics. 2020. Vol. 7, № 2. Pp. 291–312. https://doi.org/10.3934/jcd.2020012

[18] Balashov V.A. Dissipative spatial discretization of a phase field model of multiphase multicomponent isothermal fluid flow // Computers and Mathematics with Applications. 2021. Vol. 90, № 112. ID 124. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.013

[19] Злотник А.А., Федченко А.С. Свойства агрегированной квазигидродинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. 26 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-77

[20] Kraposhin M.V., Ryazanov D.A. Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // Computer Physics Communications. 2022. Vol. 271, № 1. ID 108216. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216

Образец цитирования

Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О новом классе точных решений квазигидродинамической системы, порождаемых собственными функциями двумерного оператора Лапласа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 1. С. 5–17. https://doi.org/10.26456/vtpmk631

Сведения об авторах

1. **Григорьева Вера Владимировна**
   доцент кафедры высшей математики Тверского государственного технического университета.

   Россия, 170026, г. Тверь, наб. А. Никитина, д. 22, ТвГТУ.
   E-mail: pontida@list.ru

2. **Шеретов Юрий Владимирович**
   заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

   Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
   E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON A NEW CLASS OF EXACT SOLUTIONS OF QUASI–HYDRODYNAMIC SYSTEM, GENERATED BY EIGENFUNCTIONS OF TWO-DIMENSIONAL LAPLACE OPERATOR

Grigoryeva Vera Vladimirovna
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics,
Tver State Technical University
Russia, 170026, Tver, A. Nikitin emb., 22, TvSTU.
E-mail: pontida@list.ru

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis Department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 10.01.2022, revised 20.01.2022.

The quasi-hydrodynamic system was proposed by Sheretov Yu.V. in 1993. It differs from the Navier-Stokes system in dynamics of a viscous incompressible fluid by the additional divergent terms. In this paper, the Gromeki-Beltrami method is used to construct a new one-parameter family of exact solutions of a quasi-hydrodynamic system, which also satisfy to the Navier-Stokes system. This family is generated by the eigenfunction of two-dimensional Laplace operator.

Keywords: Navier-Stokes system, quasi-hydrodynamic system, Gromeka-Beltrami method, exact solutions, eigenfunction of two-dimensional Laplace operator.

Citation

Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V., "On a new class of exact solutions of Quasi-Hydrodynamic system, generated by eigenfunctions of two-dimensional Laplace operator", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 1, 5–17 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk631

References

[1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[2] Landau L.D., Lifshits E.M., *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 736 pp.

[3] Riley N., Drazin P.G., *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 pp.

[4] Shmyglevskij Yu.D., *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti [Analytical Investigations of Gas and Fluid Dynamics]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 1999 (in Russian), 232 pp.

[5] Pukhnachev V.V., "Symmetries in the Navier-Stokes equations", *Uspekhi mekhaniki [Achievements in Mechanics]*, 2006, № 1, 6–76 (in Russian).

[6] Wang C.Y., "Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations", *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.

[7] Sheretov Yu.V., "On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).

[8] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[9] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[10] Sheretov Yu.V., "On common exact solutions of Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems for nonstationary flows", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 13–25 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk176.

[11] Sheretov Yu.V., "On the solutions of Cauchy problem for quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 1, 84–96 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk557.

[12] Sheretov Yu.V., "On classes of exact solutions of quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 5–17 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk592.

[13] Sheretov Yu.V., "On the construction of exact solutions of two-dimensional quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 1, 5–20 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk605.

[14] Grigoreva V.V., Sheretov Yu.V., "On exact solutions of quasi-hydrodynamic system that don't satisfy the Navier-Stokes and Euler systems", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, **2** (2021), 5–15 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk611.

[15] Kovalev V.P., Prosviryakov E.Yu., "A new class of non-helical exact solutions of the Navier-Stokes equations", *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, **24**:4 (2020), 762–768, https://doi.org/10.14498/vsgtu1814.

[16] Stenina T.V., Elizarova T.G., Kraposhin M.V., *Regularized equations for disk pump simulation problems in OpenFOAM implementation*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2020 (in Russian), 30 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66.

[17] Balashov V.A., Zlotnik A.A., "An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations", *Journal of Computational Dynamics*, **7**:2 (2020), 291–312, https://doi.org/10.3934/jcd.2020012.

[18] Balashov V.A., "Dissipative spatial discretization of a phase field model of multiphase multicomponent isothermal fluid flow", *Computers and Mathematics with Applications*, **90**:112 (2021), 124, https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.013.

[19] Zlotnik A.A., Fedchenko A.S., *Properties of an aggregated quasi-hydrodynamic system of equations of a homogeneous gas mixture with a common regularizing velocity*, Preprints of IPM named after M.V.Keldysh, 2021 (in Russian), 26 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2021-77.

[20] Kraposhin M.V., Ryazanov D.A. Elizarova T.G., "Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM", *Computer Physics Communications*, **271**:1 (2022), 108216, https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216.