УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ С КВАДРАТИЧНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ В ПРАВОЙ ЧАСТИ

Усков В.И.
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, г. Воронеж

Поступила в редакцию 21.11.2021, после переработки 13.01.2022.

Рассматривается уравнение первого порядка в банаховом пространстве с малым параметром при производной и возмущением второго порядка малости в правой части. Строится решение задачи Коши в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра методом Васильевой-Вишика-Люстерника. Оператор A в правой части вырожден: рассматривается случай обладания свойством иметь число 0 нормальным собственным числом и двумерным ядром; элементы ядра не имеют присоединенных. Получены формулы для вычисления компонент регулярной и погранслойной части разложения, а также условие регулярности вырождения. Доказывается асимптотичность разложения. Приводится иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: уравнение первого порядка в банаховом пространстве, малый параметр при старшей производной, квадрат возмущения в правой части, замкнутый оператор, 0-нормальное собственное число, асимптотика, метод Васильевой-Вишика-Люстерника.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 1. С. 18–32.
https://doi.org/10.26456/vtpmk629

Введение

Рассматривается задача Коши

$$\varepsilon\frac{du}{dt} = (A + \varepsilon B + \varepsilon^2 C)u(t,\varepsilon) + f(t), \tag{1}$$

$$u(t_0,\varepsilon) = g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2, \tag{2}$$

где A,B,C — замкнутые линейные операторы, не зависящие от t: $E \to E$, E — банахово пространство, $\overline{\operatorname{dom} A} = E$, $\overline{\operatorname{dom} B} = E$, $\overline{\operatorname{dom} C} = E$; $u(t,\varepsilon)$ — искомая функция из E; $f(t)$ — заданная функция со значениями в E; g_0, g_1, g_2 — заданные элементы из E; $t \in \mathfrak{T} = [t_0; t_{\max}]$; $\varepsilon \in \mathcal{E} = (0;\varepsilon_0)$ — малый параметр.

Под решением задачи подразумевается функция $u(t,\varepsilon)$, дифференцируемая по t и удовлетворяющая (1), (2) при каждых $t \in \mathfrak{T}$, $\varepsilon \in \mathcal{E}$.

Уравнениями с малым параметром при производной описывается движение вязкого потока, явления в социально-экономической модели транснациональной корпорации, поведение тонких и гибких пластин и оболочек, процесс обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа и др.

Рассмотрим предельное уравнение, полученное из (1) формальным приравниванием $\varepsilon = 0$:

$$A\bar{u}(t) = -f(t). \tag{3}$$

Тогда само уравнение (1) является допредельным. Отметим, что последнее уравнение является алгебраическим.

Приведем определение регулярно возмущенной и сингулярно возмущенной задач [1].

Определение 1. *Задача* (1), (2) *называется регулярно возмущенной, если при* $\varepsilon \to 0$

$$\|u(t,\varepsilon) - \bar{u}(t)\| \rightrightarrows 0$$

по норме в банаховом пространстве E. В противном случае она называется сингулярно возмущенной.

Теорию сингулярных возмущений создавали и развивали в своих работах А.Н. Тихонов, М.М. Вишик, Л.А. Люстерник, А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, С.Г. Крейн, С.А. Ломов, И.С. Ломов [2], Н.Н. Нефедов, С.П. Зубова и многие другие авторы.

В [2] для построения асимптотики применяется метод регуляризации сингулярных возмущений. В [3] строится асимптотическое решение для уравнения реакция-диффузия-адвекция; регулярная часть асимптотики начинается с нулевой степени малого параметра. Уравнение вида (1) с возмущениями меньшего порядка по ε справа в случае оператора A, обладающего свойством иметь 0 нормальным собственным числом (далее, NEV), рассматривалось в работе [4]: для построения решения применяется метод Боголюбова-Крылова, но оно строится в виде формального ряда по степеням малого параметра. В случае фредгольмова оператора — в работах [5–9]. В [5] рассматривался случай оператора A с одномерным ядром; в работе [6] асимптотическое разложение не строилось.

Цель работы: исследовать влияние добавки $\varepsilon^2 C$, построить решение задачи в виде асимптотического разложения по степеням параметра ε:

$$u(t,\varepsilon) = \bar{u}_m(t,\varepsilon) + \bar{v}_m(t,\varepsilon) + R_m(t,\varepsilon), \tag{4}$$

где

$$\overline{u}_m(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{m} \varepsilon^i u_i(t), \quad \overline{v}_m(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i v_i(\tau), \quad \tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon}.$$

Часть $\overline{u}_m(t,\varepsilon)$ разложения называется регулярной, часть $\overline{v}_m(t,\varepsilon)$ — погранслойной, часть $R_m(t,\varepsilon)$ — остатком.

Определение 2. *Ограниченная функция $v(t,\varepsilon) \in E$, определенная на отрезке $\mathfrak{T}$, называется функцией погранслоя вблизи точки $t = t_0$, если $v(t,\varepsilon)$ равномерно стремится к нулю на отрезке $[\widehat{t}; t_{\max}]$ при каждом $\widehat{t} \in (t_0; t_{\max})$ и не стремится равномерно к нулю на всем отрезке $\mathfrak{T}$.*

Данное определение обобщает определение, приведенное в работе [10] в случае $t_0 = 0$.

Определение 3. *Условия, при которых функция является функцией погранслоя, называются условиями регулярности вырождения.*

Определение 4. *Разложение* (4) *является асимптотическим, если для остаточного члена имеет место представление*

$$R_m(t,\varepsilon) = o\big(\varepsilon^m(u_m(t) + v_m(\tau))\big), \quad \varepsilon \to 0,$$

или, что то же самое,

$$\|R_m(t,\varepsilon)\| \leqslant \mu\varepsilon^{m+1}, \quad \mu = \mathrm{const} > 0. \tag{5}$$

Приведем также необходимые нам результаты из монографии [11].

Определение 5. *Семейство ограниченных линейных операторов $U(t)$, зависящих от параметра t $(t_0 < t < \infty)$, называется полугруппой, если*

$$U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2) \quad (t_0 < t_1 < t_2 < \infty).$$

Пусть здесь и далее $U_K(t)$ — полугруппа, порожденная некоторым линейным оператором K типа ω_K.

Лемма 1. *Для полугруппы $U_K(t)$ справедлива оценка*

$$\|U_K(t)\| \leqslant \mu \exp\left(\omega_K(t - t_0)\right), \quad \mu = \mathrm{const} > 0.$$

Если K ограничен, то $U_K(t)$ представима в виде $U_K(t) = \exp((t - t_0)K)$.

1. Нахождение уравнений первого, второго итерационного процессов, остаточного члена, начальных значений

Для построения решения воспользуемся методом Васильевой-Вишика-Люстерника (см. [1]) и получим уравнения для нахождения компонентов в (4).

Уравнения первого итерационного процесса:

$$Au_{-1}(t) = 0, \tag{6}$$

$$Au_0(t) = u'_{-1}(t) - Bu_{-1}(t) - f(t), \tag{7}$$

$$Au_i(t) = u'_{i-1}(t) - Bu_{i-1}(t) - Cu_{i-2}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

где здесь и далее штрихом обозначается производная;

уравнения второго итерационного процесса:

$$v'_0(\tau) = Av_0(\tau), \tag{9}$$

$$v'_1(\tau) = Av_1(\tau) + Bv_0(\tau), \tag{10}$$

$$v'_i(\tau) = Av_i(\tau) + Bv_{i-1}(\tau) + Cv_{i-2}(\tau), \quad i = 2, 3, \ldots, m; \tag{11}$$

уравнение для остаточного члена:

$$\varepsilon R'_m(t,\varepsilon) = (A + \varepsilon B + \varepsilon^2 C) R_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} w_1(t,\tau) + \varepsilon^{m+2} w_2(t,\tau), \tag{12}$$

в обозначениях

$$w_1(t,\tau) = -u'_m(t) + B(u_m(t) + v_m(\tau)) + C(u_{m-1}(t) + v_{m-1}(\tau)), w_2(t,\tau) = C(u_m(t) + v_m(\tau)).$$

Требование $\bar{u}_m(t_0,\varepsilon) + \bar{v}_m(t_0,\varepsilon) = g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2$ приводит к равенствам для определения начальных значений:

$$u_{-1}(t_0) = 0, \tag{13}$$

$$u_i(t_0) + v_i(0) = g_i, \quad i = 0,1,2, \tag{14}$$

$$u_i(t_0) + v_i(0) = 0, \quad i = 3,4,\ldots,m,$$

$$R_m(t_0,\varepsilon) = 0. \tag{15}$$

В дальнейшем рассматривается случай: оператор A обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом (далее, NEV). Оно (см. [12]) влечет разложение пространства E в прямую сумму

$$E = M \oplus N \tag{16}$$

инвариантного подпространства M и такого, что сужение $\tilde{A}$ оператора A на $M \cap \operatorname{dom} A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1} : M \to M \cap \operatorname{dom} A$, и корневого подпространства N элементов, отвечающих нулевому собственному числу.

Оператор имеет двумерное ядро; элементы ядра не содержат присоединенных элементов, что влечет $N = \operatorname{Ker} A = \{c_1 e_1 + c_2 e_2\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Вводятся проекторы Q на M и P на N, полуобратный оператор $H = \tilde{A}^{-1} Q : M \to M \cap \operatorname{dom} A$. В N определяется скалярное произведение $<,>$ так, чтобы

$$< e_i, e_j >= \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2, \tag{17}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

2. Вычисление начальных значений

Вычислим начальные значения для функций первого итерационного процесса. Из равенства (13) и того, что e_1, e_2 образуют базис, вытекает

$$c_{-1,1}(t_0) = c_{-1,2}(t_0) = 0. \tag{18}$$

Для дальнейших вычислений каждый элемент $P\xi \in N$ представим в виде

$$P\xi = k_1 e_1 + k_2 e_2.$$

Применив к нему функционалы $< P(\cdot), e_j >$, $j = 1,2$, с учетом условия (17), получим $k_j =< P\xi, e_j >$, откуда

$$P\xi =< P\xi, e_1 > e_1 + < P\xi, e_2 > e_2. \tag{19}$$

Рассмотрим подробно вычисление начальных значений $c_{01}(t_0)$, $c_{02}(t_0)$, $v_0(0)$. Разложим элемент $g_0 \in E$ в сумму элементов $g_0 = Qg_0 + Pg_0$, где $Qg_0 \in M$, $Pg_0 \in N$, и элемент Pg_0 в сумму вида (19). Далее, из (24), (16) и (14) при $i = 0$ следует равенство

$$\varphi_0(t_0) + c_{01}(t_0)e_1 + c_{02}(t_0)e_2 + v_0(0) = Qg_0 + < Pg_0, e_1 > e_1 + < Pg_0, e_2 > e_2.$$

Перегруппировав в нем слагаемые, имеем:

$$\varphi_0(t_0) - Qg_0 + v_0(0) = (-c_{01}(t_0) + < Pg_0, e_1 >)e_1 + (-c_{02}(t_0) + < Pg_0, e_2 >)e_2.$$

Условие $M \cap N = \{0\}$ влечет равенства

$$\varphi_0(t_0) - Qg_0 + v_0(0) = 0,$$

$$(-c_{01}(t_0) + < Pg_0, e_1 >)e_1 + (-c_{02}(t_0) + < Pg_0, e_2 >)e_2 = 0,$$

откуда вытекает

$$v_0(0) = -\varphi_0(t_0) + Qg_0, \quad c_{0j}(t_0) = < Pg_0, e_j >, \quad j = 1, 2. \tag{20}$$

Аналогично получим выражения для остальных начальных значений:

$$v_1(0) = -\varphi_1(t_0) + Qg_1, \quad c_{1j}(t_0) = < Pg_1, e_j >, \tag{21}$$

$$v_i(0) = -\varphi_i(t_0), \quad c_{ij}(t_0) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, m, \quad j = 1, 2. \tag{22}$$

Замечание 1. Из последних равенств вытекает, что $v_i(0) \in M$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а значит, и $\overline{v}_m(t_0, \varepsilon) \in M$. В силу условия 2 это означает, что весь погранслой находится в M.

3. Решение уравнений первого итерационного процесса

Применим лемму о решении линейного уравнения с NEV-оператором, имеющим двумерное ядро (см. [13]).

Предельное уравнение (3) имеет решение $\bar{u}(t) = -Hf(t) + c_1(t)e_1 + c_2(t)e_2$ с некоторыми непрерывно дифференцируемые функциями $c_1(t)$, $c_2(t)$. Это решение существует при выполнении условий $< Pf(t), e_j >= 0$, $j = 1, 2$.

Решим уравнения первого итерационного процесса. Уравнение (6) равносильно равенству

$$u_{-1}(t) = c_{-1,1}(t)e_1 + c_{-1,2}(t)e_2; \tag{23}$$

уравнение (7) равносильно системе

$$u_0(t) = \varphi_0(t) + c_{01}(t)e_1 + c_{02}(t)e_2, \tag{24}$$

$$< P(u'_{-1}(t) - Bu_{-1}(t) - f(t)), e_j >= 0, \quad j = 1, 2; \tag{25}$$

уравнения (8), $i = 1, 2, \ldots, m$, — системам

$$u_i(t) = \varphi_i(t) + c_{i1}(t)e_1 + c_{i2}(t)e_2, \tag{26}$$

$$< P(u'_{i-1}(t) - Bu_{i-1}(t) - Cu_{i-2}(t)), e_j >= 0, \quad j = 1, 2, \tag{27}$$

где обозначено

$$\varphi_0(t) = H(u'_{-1}(t) - Bu_{-1}(t) - f(t)), \tag{28}$$

$$\varphi_i(t) = H(u'_{i-1}(t) - Bu_{i-1}(t) - Cu_{i-2}(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{29}$$

а $c_{i1}(t)$, $c_{i2}(t)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, которые надлежит вычислить.

Каждая функция $u_l(t)$ вычисляется по цепочке формул:
$(26)|_{i=l} \to (27)|_{i=l+1} \to (26)|_{i=l+1} \to (27)|_{i=l+2} \to \ldots$.

Рассмотрим подробно процесс вычисления функции $u_{-1}(t)$. Подстановка выражения (23) в равенства (25) приводит к системе (так как в силу (17) выполнено $< Pe_i, e_j >= \delta_{ij}$)

$$c'_{-1,j}(t) = < PBe_1, e_j > c_{-1,1}(t) + < PBe_2, e_j > c_{-1,2}(t) + < Pf(t), e_j >, \quad j = 1, 2,$$

решение которой с начальными значениями $c_{-1,j}(t_0)$ равно (см. [11])

$$\begin{pmatrix} c_{-1,1}(t) \\ c_{-1,2}(t) \end{pmatrix} = \exp\big((t-t_0)D\big) \begin{pmatrix} c_{-1,1}(t_0) \\ c_{-1,2}(t_0) \end{pmatrix} + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\big((t-r)D\big)\Phi_{-1}(r)\,dr, \tag{30}$$

где

$$D = \begin{pmatrix} < PBe_1, e_1 > & < PBe_2, e_1 > \\ < PBe_1, e_2 > & < PBe_2, e_2 > \end{pmatrix}, \quad \Phi_{-1}(t) = \begin{pmatrix} < Pf(t), e_1 > \\ < Pf(t), e_2 > \end{pmatrix}.$$

Подставив (30) в (23), получим искомое выражение для $u_{-1}(t)$.

Далее, так как $M \cap N = \{0\}$ и в силу замкнутости оператора A выполняется $\varphi'_i(t) \in M$, то $P\varphi'_i(t) = 0$. Тогда аналогичные преобразования приводят к решениям с начальными значениями $c_{ij}(t_0)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $j = 1, 2$,

$$\begin{pmatrix} c_{i1}(t) \\ c_{i2}(t) \end{pmatrix} = \exp\big((t-t_0)D\big) \begin{pmatrix} c_{i1}(t_0) \\ c_{i2}(t_0) \end{pmatrix} + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\big((t-r)D\big)\Phi_i(r)\,dr, \tag{31}$$

где

$$\Phi_i(t) = \begin{pmatrix} < PB\varphi_i(t), e_1 > + < PCu_{i-1}(t), e_1 > \\ < PB\varphi_i(t), e_2 > + < PCu_{i-1}(t), e_2 > \end{pmatrix}, \tag{32}$$

$c_{i1}(t_0), c_{i2}(t_0)$ определяются по формулам (18), (20), (21), (22). Подставив (31) в (26), получим искомые выражения для $u_i(t)$.

Наложим следующее условие.

Условие 1. Функции $\Phi_i(t)$, $i = -1, 0, 1, \ldots, m$, непрерывны.

Тогда задача Коши для $u_i(t)$ имеет единственное решение, являющееся ограниченной и непрерывно дифференцируемой функцией.

4. Решение уравнений второго итерационного процесса

Пусть далее выполнено следующее условие.

Условие 2. Задача Коши для уравнения $y' = \tilde{A}y$ равномерно корректна.

С учетом замечания 1 решение уравнений (9), (10), (11) с начальными значениями $v_i(0)$ равно

$$v_0(\tau) = U_{\tilde{A}}(\tau)v_0(0), \tag{33}$$

$$v_1(\tau) = U_{\tilde{A}}(\tau)v_1(0) + \int\limits_0^\tau U_{\tilde{A}}(\tau-\rho)Bv_0(\rho)\,d\rho, \tag{34}$$

$$v_i(\tau) = U_{\tilde{A}}(\tau)v_i(0) + \int\limits_0^\tau U_{\tilde{A}}(\tau-\rho)(Bv_{i-1}(\rho) + Cv_{i-2}(\rho))\,d\rho, \quad i = 2,3,\ldots,m. \tag{35}$$

Выявим условия регулярности вырождения этих функций. Пусть $\tilde{\omega}$ — тип полугруппы $U_{\tilde{A}}(t)$, тогда лемма 1 влечет оценку:

$$\|U_{\tilde{A}}(t)\| \leqslant \mu\exp(\tilde{\omega}(t-t_0)), \quad \mu = \mathrm{const} > 0, \quad t \in \mathfrak{T},$$

из которой следует искомое условие для $v_0(\tau)$:

$$\tilde{\omega} < 0. \tag{36}$$

Теперь наложим следующее условие.

Условие 3. Функции $Bv_i(\tau)$, $i = 0,1,2,\ldots,m-1$, и $Cv_i(\tau)$, $i = 0,1,2,\ldots,m-2$, ограничены.

Тогда из оценки на функцию $v_1(\tau)$:

$$\|v_1(\tau)\| \leqslant \|U_{\tilde{A}}(\tau)\|\|v_1(0)\| + \int\limits_0^\tau \|U_{\tilde{A}}(\tau-\rho)\|\|Bv_0(\rho)\|\,d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \mu\exp(\tilde{\omega}\tau)\|v_1(0)\| + \mu\max\|Bv_0(\tau)\|\int\limits_0^\tau \exp(\tilde{\omega}(\tau-\rho))\,d\rho$$

и аналогичных оценок на функции $v_i(\tau)$, $i = 2,3,\ldots,m$, вытекает условие (36) регулярности вырождения.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 4. Функции $Bv_i(\tau)$ и $Cv_i(\tau)$, $i = 0,1,2,\ldots,m-1$, непрерывны.

Тогда задача Коши для $v_i(\tau)$ имеет единственное решение, являющееся ограниченной и непрерывно дифференцируемой функцией.

5. Асимптотичность разложения (4)

Обозначим $A_\varepsilon = \varepsilon^{-1}(A + \varepsilon B + \varepsilon^2 C)$. Решение задачи (12), (15) равно

$$R_m(t,\varepsilon) = \varepsilon^m \int\limits_{t_0}^t U_{A_\varepsilon}(r)w_1(r,\rho)\,dr + \varepsilon^{m+1}\int\limits_{t_0}^t U_{A_\varepsilon}(r)w_2(r,\rho)\,dr.$$

Наложим следующее условие.

Условие 5. Оператор $B + \varepsilon C$ ограничен при каждом $\varepsilon \in \mathcal{E}$.

Пусть полугруппа $U_{A+\varepsilon B+\varepsilon^2 C}(t)$ имеет тип ω_ε. Обозначим $\alpha = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \omega_\varepsilon$. В силу условия 5 выполнено $\alpha < \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Для полугруппы* $U_{A_\varepsilon}(t)$ *справедлива оценка*

$$\|U_{A_\varepsilon}(t)\| \leqslant \mu \exp\big(\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon}(t - t_0)\big).$$

Далее, пусть выполнено следующее условие.

Условие 6. Функция $w_1(t,\tau) + w_2(t,\tau)$ равномерно ограничена.

Оценим остаточный член, пользуясь утверждением леммы 2.

$$\|R_m(t,\varepsilon)\| = \varepsilon^m \int\limits_{t_0}^{t} \|U_{A_\varepsilon}(r)\| \|w_1(r,\rho) + w_2(r,\rho)\|\, dr \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^m \max \|w_1(t,\tau) + w_2(t,\tau)\| \mu \int\limits_{t_0}^{t} \exp\big(\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon}(r - t_0)\big)\, dr =$$

$$= \varepsilon^{m+1} \frac{k}{\omega_\varepsilon}\big(1 - \exp\big(\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon}(t - t_0)\big)\big) \leqslant \varepsilon^{m+1} \frac{k}{\omega_\varepsilon}\big(1 - \exp\big(\frac{\omega_\varepsilon}{\varepsilon}(t_{\max} - t_0)\big)\big),$$

где

$$k = \mu \max \|w_1(t,\tau) + w_2(t,\tau)\|.$$

В этом неравенстве устремим $\varepsilon \to 0$ и, тем самым, при выполнении условия

$$\alpha < 0 \tag{37}$$

и условий 5, 6 будет получена искомая оценка (5). Это означает, что разложение (4) является асимптотическим.

Тем самым, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 4, 5, 6,* (37). *Пусть* $\tilde{A}$ *— порождающий оператор полугруппы отрицательного типа. Тогда разложение* (4) *является асимптотическим.*

Функции $u_i(t)$ *ограничены, непрерывно дифференцируемы и определяются по формулам* (23), (30), (34), (24), (28), (26), (29), (31), (32), (20), (21), (22).

Функции $v_i(\tau)$ *являются функциями погранслоя; они ограничены, непрерывно дифференцируемы и определяются по формулам* (33), (20), (34), (21), (35), (22).

Исследуем остальные возможные случаи поведения решения $u(t,\varepsilon)$ задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$.

Замечание 2.

1. Если хотя бы одна точка спектра оператора A находится в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то выполнено $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\varepsilon u(t,\varepsilon)\| = \infty$.
2. Если хотя бы одна точка спектра оператора A находится на оси $\operatorname{Re}\lambda = 0$, а остальные — в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|\varepsilon u(t,\varepsilon)\|$ не существует.

6. Пример

Рассмотрим задачу Коши на отрезке $[0; t_{\max}]$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{du_1}{dt} = (-1+\varepsilon b)u_1(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 c u_3(t,\varepsilon),\\
&\varepsilon\frac{du_2}{dt} = -2u_1(t,\varepsilon) + (-6+\varepsilon b+\varepsilon^2 c)u_2(t,\varepsilon),\\
&\varepsilon\frac{du_3}{dt} = \varepsilon^2 c u_1(t,\varepsilon) + \varepsilon u_2(t,\varepsilon) + \psi(t),\\
&u_1(0,\varepsilon) = a_1, \quad u_2(0,\varepsilon) = a_2, \quad u_3(0,\varepsilon) = a_3,
\end{aligned}$$

где a, b, c, a_1, a_2, a_3 — заданные вещественные постоянные, $b \neq 0$.

Это задача вида (1), (2) с операторами $A, B, C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и начальным вектором со значениями

$$g_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad g_1 = g_2 = 0.$$

Предложение 1. *Оператор* (38) *обладает 0-NEV свойством.*

Доказательство. Для нахождения ядра $\operatorname{Ker} A$ решим уравнение $A\xi = 0$; имеем:

$$\xi = c_1 e_1 + c_2 e_2, \quad e_1 = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные,

$$c_1^2 + c_2^2 \neq 0. \tag{39}$$

Нетрудно видеть, что выполнено условие (17), и $\dim \operatorname{Ker} A = 2$.

Далее, уравнения $A\xi = c_j e_j$, $j = 1, 2$, разрешимы только тогда, когда $c_j = 0$, что приводит к противоречию с (39); значит, у элементов ядра нет присоединенных элементов, то есть корневое подпространство N оператора A состоит только из ядра.

Теперь проверим, что $M = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ 2\mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Действительно, взяв элемент $\eta \in M$, получим $A\eta \in M$, что означает инвариантность подпространства M относительно A.

Далее, приравнивание элементов $\xi \in N$ и $\eta \in M$ приводит к $c_1 = c_2 = \mu = 0$, что влечет $M \cap N = \{0\}$. Таким образом, имеет место разложение (16).

Из уравнения $\widetilde{A}\xi = \eta$, $\xi, \eta \in M$, вытекает, что отображение $\widetilde{A} : M \to M$ взаимно однозначно и

$$\widetilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/7 & 0 & 0 \\ -2/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разложив элементы $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi_1 \in M$, $\xi_2 \in N$, построим проекторы на подпространства:

$$P = \begin{pmatrix} 6/7 & -3/7 & 0 \\ -2/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/7 & 3/7 & 0 \\ 2/7 & 6/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что P, Q идемпотентны, и выполняется равенство $P + Q = I$.

Тем самым, предложение доказано. □

Далее, введем обозначения

$$\alpha(t, r) = -\frac{1}{b}(t - r)\big(1 - e^{b(t-r)}\big), \quad r \in [0; t],$$
$$\beta(\tau, \rho) = \frac{1}{7}(1 - e^{-7(\tau-\rho)}), \quad \rho \in [0; \tau].$$

Операторная экспонента оператора A выражается формулой

$$\exp(\tau A) = I + \beta(\tau, 0)A.$$

Собственное значение сужения $\widetilde{A}$ равно $-7 < 0$, что влечет выполнение условия (36) регулярности вырождения. Таким образом, в задаче имеет место явление погранслоя, и разложение (4) является асимптотическим.

Вычисления показывают, что

$$D = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1/\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}, \quad \exp\big((t - r)D\big) = I + \alpha(t, r)D.$$

Тогда, к примеру, в регулярной части разложения имеем:

$$u_i(t) = \varphi_i(t) + \widetilde{c}_{i1}(t)e_1 + \widetilde{c}_{i2}(t)e_2, \quad i = -1, 0, 1,$$

где

$$\widetilde{c}_{-1,1}(t) = 0, \quad \widetilde{c}_{-1,2}(t) = \int_0^t \psi(r)\, dr,$$

$$\varphi_{-1}(t) = 0, \quad \varphi_0(t) = 0, \quad \varphi_1(t) = \frac{c}{49} \int_0^t \psi(r) dr \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{c}_{01}(t) = \sqrt{10}\, \psi_0(t) - \frac{2\sqrt{10}}{7} a_1 + \frac{10}{7} a_2 - \frac{2c\sqrt{10}}{7} \int_0^t \int_0^r \psi(r_1)\, dr_1\, dr,$$

$$\widetilde{c}_{02}(t) = \psi_0(t) + a_3,$$

$$\widetilde{c}_{11}(t)=\frac{-(2a_1-a_2+14a_3)\sqrt{10}\,c\big((2bt-2)e^{bt}-b^2t^2+2b^2t+2\big)}{98b^2}-$$
$$-\frac{\sqrt{10}\,c}{7}\int\limits_0^t(1+\alpha(t,r)b)\psi_0(r)\,dr,$$

$$\widetilde{c}_{12}(t)=\frac{-(2a_1-a_2+14a_3)\,c\,\big((2bt-2)e^{bt}-b^2t^2+2\big)}{98b^3}-\frac{c}{7}\int\limits_0^t(1+\alpha(t,r)b)\psi_0(r)\,dr-$$
$$-\frac{c}{7}\int\limits_0^t\alpha(t,r)\psi_0(r)\,dr+\frac{2c}{49}\int\limits_0^t\int\limits_0^r\psi(r_1)\,dr_1\,dr,$$

в обозначении

$$\psi_0(t)=\alpha(t,0)\left(-\frac{2}{7}a_1+\frac{1}{7}a_2\right)-\frac{2c}{7}\int\limits_0^t\int\limits_0^r\alpha(t,r)\psi(r_1)\,dr_1\,dr.$$

А в погранслойной части:

$$v_0(\tau)=\frac{a_1+3a_2}{7}e^{-7\tau}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad v_1(\tau)=\frac{a_1+3a_2}{49}e^{-7\tau}\begin{pmatrix}7b\tau\\14b\tau\\2e^{7\tau}-2\end{pmatrix}.$$

Заключение

В работе рассмотрена задача Коши для сингулярно возмущенного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве с малым параметром ε при производной. В правой части уравнения 0-NEV оператор возмущен операторной добавкой второй степени этого параметра.

Методом Васильевой-Вишика-Люстерника построено решение задачи в виде разложения по степеням ε. С помощью метода каскадного расщепления найдены компоненты регулярной и погранслойной частей разложения. Доказано, что оно асимптотическое.

Исследовано поведение решения при $\varepsilon\to 0$. Определены условия, при которых в задаче имеет место явление погранслоя.

Список литературы

[1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

[2] Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Издательство Московского госуниверситета, 2011. 456 с.

[3] Антипов Е.А., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н. Асимптотическое приближение решения уравнения реакция-диффузия-адвекция с нелинейным адвективным слагаемым // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25, № 1. С. 18–32. https://doi.org/10.18255/1818-1015-2018-1-18-32

[4] Крейн С.Г., Нго Зуй Кан Асимптотический метод в задаче о колебаниях сильно вязкой жидкости // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33, № 3. С. 456–464.

[5] Треногин В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика // Успехи математических наук. 1970. Т. 25, № 4(154). С. 123–156. http://dx.doi.org/10.1070/RM1970v025n04ABEH001262

[6] Зубова С.П. Исследование решения задачи Коши для одного сингулярно возмущённого дифференциального уравнения // Известия вузов. Математика. 2000. № 8(459). С. 76–80.

[7] Зубова С.П., Усков В.И. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика. 2016. № 3. С. 147–155.

[8] Усков В.И. Асимптотическое решение уравнения первого порядка с малым параметром при производной с возмущенным оператором // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 124. С. 784–796. https://dx.doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-124-784-796

[9] Усков В.И. Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с возмущенным фредгольмовым оператором // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25, № 129. С. 48–56. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2020-25-129-48-56

[10] Зубова С.П. О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной // Доклады РАН. 2014. Т. 454, № 4. С. 383–386. http://dx.doi.org/10.7868/S0869565214040094

[11] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

[12] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.

[13] Усков В.И. Явление погранслоя в дескрипторном уравнении первого порядка с малым параметром в правой части // Проблемы математического анализа. 2020. № 104. С. 157–162. https://doi.org/10.1007/s10958-020-05009-3

Образец цитирования

Усков В.И. Асимптотика решения уравнения первого порядка с малым параметром при производной с квадратичным возмущением в правой части // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 1. С. 18–32. https://doi.org/10.26456/vtpmk629

Сведения об авторах

1. **Усков Владимир Игоревич**
старший преподаватель кафедры математики автомобильного факультета Воронежского государственного лесотехнического университета им. Г.Ф. Морозова.

Россия, 394613, Воронежская область, г. Воронеж, ул. Тимирязева, д. 8.
E-mail: vum1@yandex.ru

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS

Uskov Vladimir Igorevich
Senior Lecturer at Mathematical department,
Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov
Russia, 394613, Voronezh, ul. Timiryazeva, 8.
E-mail: vum1@yandex.ru

Received 21.11.2021, revised 13.01.2022.

We consider a first-order equation in a Banach space with a small parameter at the derivative and a second-order perturbation of smallness on the right-hand side. A solution to the Cauchy problem is constructed in the form of an asymptotic expansion in powers of a small parameter by the Vasilieva-Vishik-Lyusternik method. The operator A on the right-hand side is degenerate: we consider the case of possessing the property of having a number 0 by a normal eigenvalue and a two-dimensional kernel; core elements have no attached. Formulas for calculating the components of the regular and boundary layer parts of the expansion are determined. A condition for the regularity of degeneration is obtained. The expansion is shown to be asymptotic. An illustrative example is given.

Keywords: first-order equation in a Banach space, small parameter at the highest derivative, perturbation square on the right-hand side, closed operator, 0-normal eigenvalue, asymptotics, Vasil'eva-Vishik-Lyusternik method.

Citation

Uskov V.I., “Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 1, 18–32 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk629

References

[1] Vasileva A.B., Butuzov V.F., *Asimptoticheskie razlozheniya reshenij singulyarno vozmushchennykh uravnenij [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (in Russian), 272 pp.

[2] Lomov S.A., Lomov I.S., *Osnovy matematicheskoj teorii pogranichnogo sloya [Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer]*, Publishing House of Moscow State University, Moscow, 2011 (in Russian), 456 pp.

[3] Antipov E.A., Levashova N.T., Nefedov N.N., "Asymptotic approximation of the solution of the reaction-diffusion-advection equation with a nonlinear advective term", *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem [Modeling and analysis of information systems]*, **25**:1 (2018), 18–32 (in Russian), https://doi.org/10.18255/1818-1015-2018-1-18-32.

[4] Krejn S.G., Ngo Zuj Kan, "An asymptotic method in the problem of oscillations of a highly viscous fluid", *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, **33**:3 (1969), 456–464 (in Russian).

[5] Trenogin V.A., "The development and applications of the asymptotic method of Lyusternik and Vishik", *Russian Mathematical Surveys*, **25**:4 (1970), 119–156, http://dx.doi.org/10.1070/RM1970v025n04ABEH001262.

[6] Zubova S.P., "Investigation of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed differential equation", *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, **44**:8 (2000), 73–77.

[7] Zubova S.P., Uskov V.I., "Asymptotic solution of a singularly perturbed Cauchy problem for a first-order equation in a Banach space", *Vestnik Voronezhskogo gosuniversiteta. Seriya: Fizika. Matematika [Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics]*, 2016, № 3, 147–155 (in Russian).

[8] Uskov V.I., "Asymptotic solution of a first-order equation with a small parameter for a derivative with a perturbed operator", *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki [Proceedings of the Tambov University. Series: Natural and technical sciences]*, **23**:124 (2018), 784–796 (in Russian), https://dx.doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-124-784-796.

[9] Uskov V.I., "Asymptotic solution of the Cauchy problem for a first-order equation with a perturbed Fredholm operator", *Vestnik rossijskikh universitetov. Matematika [Russian Universities Reports. Mathematics]*, **25**:129 (2020), 48–56 (in Russian), https://doi.org/10.20310/2686-9667-2020-25-129-48-56.

[10] Zubova S.P., "The role of perturbations in the Cauchy problem for equations with a Fredholm operator multiplying the derivative", *Doklady Mathematics*, **89**:4 (2014), 72–75, http://dx.doi.org/10.7868/S0869565214040094.

[11] Krejn S.G., *Linejnye differentsialnye uravneniya v banakhovom prostranstve [Linear differential equations in Banach space]*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (in Russian), 464 pp.

[12] Gokhberg I.Ts., Krejn M.G., *Vvedenie v teoriyu linejnykh nesamosopryazhennykh operatorov [Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators]*, Nauka Publ., Moscow, 1965 (in Russian), 448 pp.

[13] Uskov V.I., "Boundary layer phenomenon for a first order descriptor equation with small parameter on the right-hand side", *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, **250**:1 (2020), 175–181, https://doi.org/10.1007/s10958-020-05009-3.