ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 517.962.26, 517.982.43, 519.21, 519.72

ОБОБЩЕНИЕ И УНИФИКАЦИЯ ПОНЯТИЙ ОСТАТКА ОТ ДЕЛЕНИЯ И ДРОБНОЙ ЧАСТИ, МАКСИМИЗАЦИЯ ЭНТРОПИИ ДРОБНОЙ ЧАСТИ СВЕРТКИ С РАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Кондратенко А.Е.*, **Соболев В.Н.****
*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва
**Лаборатория ТВП, г. Москва

Поступила в редакцию 14.02.2022, после переработки 16.03.2022.

В статье рассматривается вопрос сохранения информационного свойства свертки с каноническим равномерным распределением в случаях произвольной конечной решетки и произвольного отрезка. Для этого предлагаются обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части.

Ключевые слова: свертка, дробная часть, равномерное распределение, энтропия.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 1. С. 45–52.
https://doi.org/10.26456/vtpmk628

Введение

На XIV международной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета, было рассказано об информационном свойстве свертки с равномерным распределением [1]:

Теорема 1. *Пусть целочисленная случайная величина ξ и равномерная на множестве $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ случайная величина η независимы.*

Тогда случайна величина $\xi + \eta\,(N)$, являющаяся остатком от деления свертки $\xi + \eta$ на N, имеет максимальную энтропию среди всех случайных величин, распределенных на множестве $\{0, 1, \ldots, N-1\}$;

Теорема 2. *Пусть произвольная случайная величина ξ и равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$ случайная величина η независимы.*

Тогда случайна величина $\{\xi + \eta\}$, являющаяся дробной частью свертки $\xi + \eta$, имеет максимальную энтропию среди всех абсолютно непрерывных случайных величин, распределенных на отрезке $[0, 1]$.

Возникает естественный вопрос об обобщении этих утверждений для случайных величин, равномерных на произвольной конечной решетке и на произвольном отрезке.

1. Обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части

Для более естественного изложения основных результатов посредством следующих определений с вытекающими из них замечаниями и свойствами:
• унифицируем знаки для остатка от деления и дробной части, введя

Определение 1. *Остаток от деления целого числа m на натуральное число N будем обозначать $\{m\}_N$;*

• строго формализуем понятие *решеток*, введя

Определение 2. *Конечной решеткой с действительными параметрами $A; B; h$, где $A < B$ и $h > 0$ делит разность $B - A$, назовем множество*

$$[A; B)_h = \{A, A + h, A + 2h, \ldots, B - h\},$$

а решеткой с параметрами $A; h$ назовем множество

$$\mathbb{Z}_{A;h} = \{A + kh; k \in \mathbb{Z}\};$$

• явно выразим мощность конечной решетки, сделав

Замечание 1. Множество $[A; B)_h$ состоит из $N = (B - A)/h$ элементов;

• обобщим понятие остатка от деления, введя

Определение 3. *Дробной частью действительного числа $m \in \mathbb{Z}_{A;h}$ относительно конечной решетки $[A; B)_h$ будем называть число*

$$\{m\}_{[A;B)_h} = A + h\{(m - A)/h\}_N;$$

• обратим внимание на связи между обозначениями и на свойство инвариантности относительно сдвигов, сделав

Замечание 2. $\{m\}_N = \{m\}_{[0;N)_1}$, $\mathbb{Z}_N = [0; N)_1$,

$$\{m\}_{[A;B)_h} = \{m + kNh\}_{[A;B)_h}, k \in \mathbb{Z}; \tag{1}$$

• обобщим понятие дробной части, введя

Определение 4. *Дробной частью действительного числа x относительно полуинтервала $[a; b)$ будем называть число*

$$\{x\}_{[a;b)} = a + (b - a)\{(x - a)/(b - a)\};$$

• обратим внимание на связь между обозначениями и на свойство инвариантности относительно сдвигов, сделав

Замечание 3. $\{x\} = \{x\}_{[0;1)}$,

$$\{x\}_{[a;b)} = \{x + k(b-a)\}_{[a;b)}, k \in \mathbb{Z}; \tag{2}$$

• обратим внимание на полученную унификацию, сделав

Замечание 4. $[A;B)_h$ *стремится* к $[A;B)$ при $h \to 0$, а при $m \in \mathbb{Z}_{A;h}$ верно $\{m\}_{[A;B)_h} = \{m\}_{[A;B)}$.

2. О максимуме энтропии в двух классах действительных случайных величин

При помощи хорошо известного неравенства

$$\ln(x) \leqslant x - 1,\ x > 0,$$

и того, что

$$\ln(x) = x - 1 \Leftrightarrow x = 1,$$

в [2, стр. 23–25] доказана следующая

Теорема 3. *Пусть* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *— произвольное множество.*

Тогда среди всех случайных величин, распределенных на этом множестве, максимальная энтропия, равная $\log_2 n$*, достигается в равномерном случае и только в нем.*

В абсолютно непрерывном случае энтропия случайной величины ξ с плотностью $p(x)$ определяется как

$$\mathrm{H}\xi = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2 p(x)\, dx.$$

В этом случае докажем аналог теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть* $[a,b]$ *— произвольный отрезок.*

Тогда среди всех абсолютно непрерывных случайных величин, распределенных на этом отрезке, максимальная энтропия, равная $\log_2(b-a)$*, достигается в равномерном случае и только в нем.*

Доказательство. Пусть случайная величина ξ удовлетворяет условиям теоремы, то есть ее плотность $p(x) = 0$ при $x \notin [a,b]$.

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}\mathrm{H}\xi - \log_2(b-a) &= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\log_2 p(x)\, dx - \log_2(b-a) \\ &= -\int\limits_a^b p(x)\log_2 p(x)\, dx - \int\limits_a^b p(x)\log_2(b-a)\, dx \\ &= \int\limits_a^b p(x)\log_2 \frac{1}{(b-a)p(x)}\, dx\end{aligned}$$

$$\leqslant \log_2 e \int\limits_a^b p(x) \left(\frac{1}{(b-a)p(x)} - 1 \right) dx$$
$$= \log_2 e \left(\int\limits_a^b \frac{1}{b-a}\, dx - \int\limits_a^b p(x)\, dx \right)$$
$$= \log_2 e(1-1) = 0.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\mathrm{H}\xi \leqslant \log_2(b-a)$$

и максимум энтропии достигается в равномерном случае и только в нем:

$$\mathrm{H}\xi = \log_2(b-a) \Leftrightarrow p(x) = \frac{1}{b-a} \text{ при всех } x \in [a,b].$$

$\square$

Замечание 5. Может показаться странным, что в случае отрезка единичной длины $\mathrm{H}\xi = 0$, а если длина отрезка меньше 1, то $\mathrm{H}\xi < 0$. Ведь в дискретном случае энтропия всегда неотрицательная и равна нулю только в вырожденном случае постоянной случайной величины. Объяснить этот факт методически можно при помощи так называемой теории *допроса шпиона*, когда под $\mathrm{H}\xi$ мы понимаем результат *допроса шпиона*. При такой трактовке возможна ситуация *допроса опытного шпиона* молодым сотрудником, в результате которого не сотрудник получит информацию от шпиона, а наоборот.

3. Дискретный случай

Сформулируем и докажем информационное свойство свертки в терминах дробной части относительно произвольной конечной решетки.

Теорема 5. *Пусть дискретная случайная величина ξ, принимающая значения на множестве $\mathbb{Z}_{A;h}$, и равномерная на множестве $[A;B)_h$ случайная величина η независимы.*

Тогда случайная величина $\{\xi+\eta-A\}_{[A;B)_h}$ обладает максимальной энтропией среди всех случайных величин, распределенных на множестве $[A;B)_h$.

Доказательство. Введем случайные величины $\xi_1 = (\xi - A)/h$ и $\eta_1 = (\eta - A)/h$.

Легко проверить, что:
- ξ_1 и η_1 независимы;
- ξ_1 принимает целочисленные значения;
- η_1 равномерна на множестве $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Случайная величина $\{\xi_1 + \eta_1\}_N$ в силу теоремы 1 имеет максимальную энтропию среди всех случайных величин, распределенных на множестве $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, и равномерно распределена. Так как

$$\xi_1 + \eta_1 = (\xi + \eta - A - A)/h,$$

то согласно (1)

$$A + h\{\xi + \eta - A - A)/h\}_N = \{\xi + \eta - A\}_{[A;B)_h}$$

равномерно распределена и имеет максимальную энтропию среди всех случайных величин, распределенных на множестве $[A; B)_h$. □

Замечание 6. Множества $\mathbb{Z}_{A;h}$ и $\mathbb{Z}_{0;h}$ совпадают тогда и только тогда, когда h делит A.

Теорема 6. *Пусть дискретная случайная величина ξ, принимающая значения на множестве $\mathbb{Z}_{A;h}$, h делит A, и равномерная на множестве $[A; B)_h$ случайная величина η независимы.*

Тогда случайная величина $\{\xi + \eta\}_{[A;B)_h}$ обладает максимальной энтропией среди всех случайных величин, распределенных на множестве $[A; B)_h$.

Доказательство. Введем случайные величины $\xi_1 = \xi/h$ и $\eta_1 = (\eta - A)/h$.

Легко проверить, что:

- ξ_1 и η_1 независимы;
- ξ_1 принимает целочисленные значения;
- η_1 равномерна на множестве $\{0, 1, \dots, N - 1\}$.

Случайная величина $\{\xi_1 + \eta_1\}_N$ в силу теоремы 1 имеет максимальную энтропию среди всех случайных величин, распределенных на множестве $\{0, 1, \dots, N-1\}$, и равномерно распределена. Так как

$$\xi_1 + \eta_1 = (\xi + \eta - A)/h,$$

то согласно (1)

$$A + h\{\xi + \eta - A)/h\}_N = \{\xi + \eta\}_{[A;B)_h}$$

равномерно распределена и имеет максимальную энтропию среди всех случайных величин, распределенных на множестве $[A; B)_h$. □

4. Абсолютно непрерывный случай

Сформулируем и докажем информационное свойство свертки в терминах дробной части относительно произвольного ограниченного полуинтервала.

Теорема 7. *Пусть произвольная случайная величина ξ и равномерная на отрезке $[a, b]$ случайная величина η независимы.*

Тогда случайная величина $\{\xi + \eta\}_{[a;b)}$ обладает максимальной энтропией среди всех абсолютно непрерывных случайных величин, распределенных на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Введем случайные величины $\xi_1 = \xi/(b-a)$ и $\eta_1 = (\eta-a)/(b-a)$.

Легко проверить, что:

- ξ_1 и η_1 независимы;
- η_1 равномерна на отрезке $[a, b]$.

Случайная величина $\{\xi_1+\eta_1\}$ в силу теоремы 2 обладает максимальной энтропией среди всех абсолютно непрерывных случайных величин, распределенных на отрезке $[0,1]$, и равномерна. Так как

$$\xi_1+\eta_1=(\xi+\eta-a)/(b-a),$$

то согласно (2)

$$a+(b-a)\{(\xi+\eta-a)/(b-a)\}=\{\xi+\eta\}_{[a;b)}$$

равномерно распределена и имеет максимальную энтропию среди всех абсолютно непрерывных случайных величин, распределенных на отрезке $[a,b]$. □

Заключение

Предложенное обобщение понятий остатка от деления и дробной части позволило унифицировать эти понятия и доказать, что информационное свойство свертки, сформулированное изначально относительно канонических множеств $\{0,1,\ldots,N-1\}$ и отрезка $[0,1]$, остается верным, с оговоренной спецификой дискретного случая, и для произвольных конечных решеток и отрезков.

Список литературы

[1] Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. Об информационном свойстве свертки с равномерным распределением: Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики // Материалы XIV Международной конференции. Махачкала: Издательство ДГУ, 2021. С. 135–138.

[2] Чечёта С.И. Введение в дискретную теорию информации и кодирования. М.: МЦМНО, 2011. 224 с.

[3] Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки. 2022. Т. 37, № 1. С. 7–11. https://doi.org/10.21779/2542-0321-2022-37-1-7-11

Образец цитирования

Кондратенко А.Е., Соболев В.Н. Обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части, максимизация энтропии дробной части свертки с равномерным распределением // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 1. С. 45–52. https://doi.org/10.26456/vtpmk628

Сведения об авторах

1. **Кондратенко Александр Евгеньевич**
   доцент кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

   Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.
   E-mail: ae_cond@mech.math.msu.su

2. **Соболев Виталий Николаевич**
   научный сотрудник лаборатории теории вероятностей и математической статистики.

   Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский пр-кт, дом 47, лаборатория ТВП.
   E-mail: sobolev_vn@mail.ru

GENERALIZATION AND UNIFICATION OF THE CONCEPTS OF REMAINDER OF DIVISION AND FRACTIONAL PART, MAXIMIZATION OF ENTROPY OF FRACTIONAL PART OF CONVOLUTION WITH UNIFORM DISTRIBUTION

Condratenko Alexandr Evgenyevich
Associate Professor at the Department of Mechanics and Mathematics,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: ae_cond@mech.math.msu.su

Sobolev Vitaliy Nickolayevich
Research Officer, Laboratory of TVP
Russia, 117418, Moscow, 47 Nachimovskiy av., Laboratory of TVP.
E-mail: sobolev_vn@mail.ru

Received 14.02.2022, revised 16.03.2022.

The article considers the issue of preserving the information property of convolution with canonical uniform distribution in the cases of arbitrary finite lattice and arbitrary segment. For this purpose, the generalization and the unification of the concepts of remainder of division and fractional part are proposed.

Keywords: convolution, fractional part, uniform distribution, entropy.

Citation

Condratenko A.E., Sobolev V.N., "Generalization and unification of the concepts of remainder of division and fractional part, maximization of entropy of fractional part of convolution with uniform distribution", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 1, 45–52 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk628

References

[1] Condratenko A.E., Sobolev V.N., "On the information property of convolution with uniform distribution: Fundamental and applied problems of mathematics and Computer science", *Materialy XIV Mezhdunarodnoj konferentsii [Materials of the XIV International Conference]*, DSU Publishing House, Makhachkala, 2021, 135–138 (in Russian).

[2] Chechyota S.I., *Vvedenie v diskretnuyu teoriyu informatsii i kodirovaniya*, MTsMNO, Moscow, 2011 (in Russian), 224 pp.

[3] Condratenko A.E., Sobolev V.N., "On the Entropy Maximization in Convolution with Uniform Distribution", *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Estestvennye nauki [Herald of Dagestan State University]*, **37**:1 (2022), 7–11 (in Russian), https://doi.org/10.21779/2542-0321-2022-37-1-7-11.