

УДК 534.1

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ С ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ

А.Е. Миловидов, Г.С. Шаров

Тверской государственный университет,
кафедра функционального анализа и геометрии

Исследуется проблема устойчивости ротационных движений для замкнутой релятивистской струны с точечной массой в пространстве с нетривиальной геометрией. Обнаружено, что среди упомянутых движений есть неустойчивые по отношению к малым возмущениям. Этот результат получен как в ходе численных экспериментов, так и с помощью аналитического исследования спектра малых возмущений ротационных движений.

Введение. Рассмотрим замкнутую релятивистскую струну с натяжением γ , нагруженную одной точечной массой m . Динамика этой системы определяется действием [1].

$$S = -\gamma \int_{\Omega} \sqrt{-g} dt d\sigma - m \int \sqrt{\dot{x}_1^2(\tau)} d\tau. \quad (1)$$

Предполагается, что струна движется в пространстве $M = R^{1,3} \times K$, являющемся результатом компактификации [2]. Здесь $R^{1,3}$ – 3 + 1 – мерное пространство Минковского, $K = S^1 \times \dots \times S^1$ – тор размерности $D - 4$, при этом многообразие M является плоским и имеет метрический тензор $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1; -1; \dots; -1)$ в координатах x^μ , таких, что x^0, \dots, x^3 относятся к $R^{1,3}$, а координаты, описывающие K (ниже мы их будем обозначать $x^k, k = 4, 5, \dots$), являются циклическими с периодом l_k . Последнее означает, что точки с координатами x^k и $x^k + N_k l_k, N_k \in Z$ отождествлены.

В действии (1) g – определитель индуцированной метрики $g_{ab} = \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$ на мировой поверхности струны $X^\mu(\tau, \sigma)$, погруженной в M , $\Omega = \{(\tau, \sigma) : \tau_1 < \tau < \tau_2, \sigma_1(\tau) < \sigma < \sigma_2(\tau)\}$; уравнения $x_i^\mu = X^\mu(\tau, \sigma_i(\tau)), i = 1, 2$ описывают одну и ту же траекторию массивной точки струны

$$x_1^\mu(\tau) = X^\mu(\tau, \sigma_1(\tau)), \quad X^\mu(\tau^*, \sigma_2(\tau^*)) = X^\mu(\tau, \sigma_1(\tau)) + \sum_k N_k l_k \delta_k^\mu \quad (2)$$

на мировой поверхности, имеющей форму трубки [3]. Здесь δ_k^μ – символ Кронекера. В параметризации этой линии могут участвовать два различных параметра τ и τ^* , связанные соотношением $\tau^* = \tau^*(\tau)$, которым следует дополнить условие замыкания (2) мировой поверхности.

В [1] с помощью варьирования действия (1) были получены уравнения

движения
$$\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \sigma^2} = 0 \quad (3)$$

и краевые условия
$$m \frac{d}{d\tau} \frac{\dot{X}^\mu(\tau, 0)}{\sqrt{\dot{X}^2(\tau, 0)}} + \gamma [X'^\mu(\tau^*, 2\pi) - X'^\mu(\tau, 0)] = 0, \quad (4)$$

имеющие нормальный вид с учетом сказанного выше и при выполнении ортонормальности
$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (5)$$

и условий
$$\sigma_1(\tau) = 0, \quad \sigma_2(\tau) = 2\pi. \quad (6)$$

Здесь $\dot{X} \equiv \partial_\tau X^\mu$, $X'^\mu \equiv \partial_\sigma X^\mu$; использовано скалярное произведение $\langle a, b \rangle = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$.

Система уравнений (2) – (6) полностью описывает движение замкнутой релятивистской струны с одной точечной массой в пространстве M . Равенства (5), (6) не ограничивают общность при описании произвольных движений системы.

Краевые условия (4) можно линеаризовать [4], если наложить следующие ограничения:

$$\frac{\gamma}{m} \sqrt{\dot{X}^2(\tau, 0)} = Q = \text{const}, \quad \tau^* = \tau + \tau_0, \quad \tau_0 = \text{const}. \quad (7)$$

Решения системы уравнений (2) – (6) при ограничениях (7) были найдены в [1] в виде ряда Фурье. Слагаемые этого ряда имеют зависящий от τ множитель $\exp(-i\omega_n \tau)$, причем частоты ω_n определяются как решения системы уравнений

$$\cos 2\pi\omega_n - \cos \omega_n \tau_0 = \frac{\omega_n}{2Q} \sin 2\pi\omega_n, \quad (8)$$

$$1 + \frac{\tau_0^2}{4\pi^2} - 2 \frac{\tau_0}{2\pi} \frac{1 - \cos \omega_n \tau_0 \cdot \cos 2\pi\omega_n}{\sin \omega_n \tau_0 \cdot \sin 2\pi\omega_n} = \left(1 - \frac{\tau_0}{2\pi} \frac{\sin 2\pi\omega_n}{\sin \omega_n \tau_0} \right) \frac{\gamma^2}{m^2 Q^2} \sum_{k>3} b_k^2. \quad (9)$$

Здесь $b_k = \frac{l_k N_k}{2\pi}$.

Ниже мы будем рассматривать так называемые одночастотные решения, содержащие единственную ненулевую частоту ω_n и описывающие ротационные (вращательные) движения системы. Эти решения в случае $\tau_0 \neq 0$ имеют вид [1]:

$$X^\mu = e_0^\mu a_0 \left(\tau - \frac{\tau_0}{2\pi} \sigma \right) + \sum_{k>3} e_k^\mu b_k \sigma + A_n \left\{ \left[S \cos \omega_n \sigma + (C_0 - C) \sin \omega_n \sigma \right] \cdot e^\mu(\omega_n \tau) - S_0 \sin \omega_n \sigma \cdot e'^\mu(\omega_n \tau) \right\}. \quad (10)$$

Здесь используются единичные векторы $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{D-1}$, образующие ортонормированный базис в M (причем e_0, e_1, e_2, e_3 – базис в $R^{1,3}$) и векторы

$$e^\mu(\omega_n \tau) = e_1^\mu \cos \omega_n \tau + e_2^\mu \sin \omega_n \tau, \quad e'^\mu(\omega_n \tau) = \omega_n^{-1} \frac{d}{dt} e^\mu(\omega_n \tau).$$

Введены обозначения $C = \cos 2\pi\omega_n$, $S = \sin 2\pi\omega_n$, $C_0 = \cos \omega_n \tau_0$, $S_0 = \sin \omega_n \tau_0$;

параметры a_0 , A_n связаны соотношениями $a_0 = \frac{mQ}{\gamma} (1-v^2)^{-1/2}$, $A_n = \frac{a_0 v}{\omega_n S}$,

$$v^2 = \frac{\tau_0 S}{2\pi S_0}.$$

Величина v имеет физический смысл скорости движения массивной точки по окружности (скорость света положена равной 1).

Решение (10) описывает равномерное вращение замкнутой струны, которая в случае $b_k = 0$ имеет форму гипоциклоиды, соединенной под ненулевым углом в массивной точке.

Ротационные (одночастотные) движения в случае $\tau_0 = 0$ распадаются на два семейства, так как уравнение (8), определяющее их частоты, в этом случае принимает вид

$$\sin \pi\omega_n \left(\sin \pi\omega_n + \frac{\omega_n}{2Q} \cos \pi\omega_n \right) = 0. \quad (11)$$

Корням уравнения (11) $\omega_n = -2Q \operatorname{tg} \pi\omega_n$, обращающим в нуль выражение в скобках, соответствуют ротационные движения

$$X^\mu = e_0^\mu a_0 \tau + \sum_{k>3} e_k^\mu b_k \sigma + A_n \cos[\omega_n(\sigma - \pi)] \cdot e^\mu(\omega_n \tau). \quad (12)$$

Решения (12) описывают равномерное вращение в плоскости e_1, e_2 струны, имеющей форму синусоиды (конечной длины – ввиду цикличности координаты с ортом e_k). Массивная точка с массой m (при $\sigma = 0$) движется по окружности вместе с вращающейся струной.

Корням уравнения (11) $w_n = n$ отвечают нетривиальные решения

$$X^\mu = e_0^\mu a_0 \tau + \sum_{k>3} e_k^\mu b_k \sigma + A_n \sin n\sigma \cdot e^\mu(n\tau), \quad (13)$$

где $a_0 = \sqrt{n^2 A_n^2 + \sum b_k^2}$. Эти решения описывают вращение струны, подобное движению (12), но массивная точка в случае (13) покоится в центре вращения.

В случае $b_k = 0$ выражения (12) и (13) и описывают в пространстве Минковского $R^{1,3}$ равномерное вращение сложенной несколько раз струны. Такие состояния были классифицированы в [4]. Они, как и решения (10) при $b_k = 0$, характеризуются наличием точек возврата струны, движущихся со скоростью света (с особенностями метрики $\dot{X}^2 = X'^2 = 0$). В то же время при $b_k \neq 0$ указанные решения не имеют таких особенностей.

Решения (10), (12) и (13) приводят к нетривиальным траекториям Редже [1] и имеют перспективы в плане их приложений в физике элементарных

частиц. Для этого необходимо исследовать эти решения на устойчивость относительно малых возмущений.

Численное моделирование и визуализация движений системы. Исследуем классы ротационных движений (10), (12) и (13) на устойчивость. Для этого рассмотрим эволюцию их малых возмущений с помощью численного моделирования.

Произвольное движение системы с действием (1) можно определить однозначно по заданным начальным условиям – начальному положению точек струны и начальным их скоростям. Метод решения данной начально-краевой задачи был предложен ранее для различных струнных моделей мезонов и барионов в [5; 6].

В применении к рассматриваемой замкнутой струне с точечной массой упомянутый метод включает в использование общего решения уравнения движения (3) релятивистской струны

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [\Psi_+^\mu(\tau + \sigma) + \Psi_-^\mu(\tau + \sigma)]. \quad (14)$$

При этом

$$\Psi_+^{\prime 2} = \Psi_-^{\prime 2} = 0 \quad (15)$$

в силу условий ортонормальности (5).

Введем следующее обозначение для единичного вектора скорости массивной точки:

$$U^\mu = \frac{\dot{X}^\mu(\tau, 0)}{\sqrt{\dot{X}^2(\tau, 0)}} = \frac{\dot{X}^\mu(\tau^*, 2\pi)}{\sqrt{\dot{X}^2(\tau^*, 2\pi)}}.$$

Это выражение после подстановки в него равенства (14)

$$U^\mu = \frac{\Psi_+^{\prime\mu}(\tau) + \Psi_-^{\prime\mu}(\tau)}{\sqrt{2\langle \Psi_+^{\prime\mu}(\tau), \Psi_-^{\prime\mu}(\tau) \rangle}} = \frac{\Psi_+^{\prime\mu}(\tau^* + 2\pi) + \Psi_-^{\prime\mu}(\tau^* - 2\pi)}{\sqrt{2\langle \Psi_+^{\prime\mu}(\tau^* + 2\pi), \Psi_-^{\prime\mu}(\tau^* - 2\pi) \rangle}}. \quad (16)$$

Сведем уравнения движения (2) – (6) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектор-функций Ψ_\pm^μ , U^μ .

Умножая выражение (16) скалярно соответственно на $\Psi_\pm^\mu(\tau)$, $\Psi_\pm^\mu(\tau^* \pm 2\pi)$ и учитывая условия (15), получим следующие соотношения:

$$\langle U, \Psi'_\pm(\tau) \rangle = \sqrt{\frac{\langle \Psi'_+(\tau), \Psi'_-(\tau) \rangle}{2}}, \quad \langle U, \Psi'_\pm(\tau^* \pm 2\pi) \rangle = \sqrt{\frac{\langle \Psi'_+(\tau^* + 2\pi), \Psi'_-(\tau^* - 2\pi) \rangle}{2}}.$$

Эти равенства позволяют записать выражения (16) в виде

$$\Psi_+^{\prime\mu}(\tau) + \Psi_-^{\prime\mu}(\tau) = 2\langle U, \Psi'_\pm(\tau) \rangle U^\mu, \quad (17)$$

$$\Psi_+^{\prime\mu}(\tau^* + 2\pi) + \Psi_-^{\prime\mu}(\tau^* - 2\pi) = 2\langle U, \Psi'_\pm(\tau^* \pm 2\pi) \rangle U^\mu. \quad (18)$$

Учитывая эти соотношения, запишем краевое условие (4) следующим образом:

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = -\frac{\gamma}{m} \left[U^\mu(\tau) U_\nu(\tau) - \delta_\nu^\mu \right] \left[\Psi_+^{\prime\nu}(\tau) + \Psi_-^{\prime\nu}(\tau^* - 2\pi) \right]. \quad (19)$$

Продифференцировав условие замыкания (2) по τ :

$$\dot{X}^\mu(\tau^*, 2\pi) \cdot \frac{d\tau^*}{d\tau} = \dot{X}^\mu(\tau, 0),$$

возведем это равенство в скалярный квадрат и, учитывая выражения (14), (15), найдем зависимость между τ^* и τ :

$$\frac{d\tau^*}{d\tau} = \frac{\langle U, \Psi'_\pm(\tau) \rangle}{\langle U, \Psi'_\pm(\tau \pm 2\pi) \rangle}. \quad (20)$$

Условия (17)–(20) позволяют численно описать движение замкнутой релятивистской струны с одной точечной массой, если заданы начальное положение струны в виде параметризованной кривой $x^\mu = p^\mu(\lambda)$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ и начальные скорости точек струны в виде вектор-функции $v^\mu(\lambda)$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

При этом $p^\mu(\lambda) \in C^2([\lambda_1, \lambda_2])$, $[p'(\lambda)]^2 < 0$; $v^\mu(\lambda) \in C^1([\lambda_1, \lambda_2])$, $v^2(\lambda) > 0$.

Рассмотрим более подробно механизм реализации численного решения для замкнутой релятивистской струны с одной точечной массой. Эта процедура включает в себя три этапа.

На первом этапе необходимо определить вектор-функции $\Psi_\pm^{\prime\mu}$ в области исключительного влияния начальных данных. Как показано в работах [5–7], это можно осуществить без потери общности, используя свободу выбора функции $\tau(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ в параметризации начальной кривой $X^\mu(\tau(\lambda), \sigma(\lambda)) = p^\mu(\lambda)$. В рассматриваемом случае удобно выбрать их в виде

$$\tau'(\lambda) = \langle v, p' \rangle / v^2, \quad \sigma'(\lambda) = \Delta / v^2,$$

где $\Delta(\lambda) = \sqrt{\langle v, p' \rangle^2 - v^2 p'^2}$, $\tau(\lambda_1) = \sigma(\lambda_1) = 0$. После численного интегрирования $\tau'(\lambda)$ и $\sigma'(\lambda)$ по методу Симпсона находим вектор-функции

$\Psi_\pm^{\prime\mu}$ по формулам $\Psi_\pm^{\prime\mu}(\tau(\lambda) \pm \sigma(\lambda)) = \frac{(\Delta \pm P) \rho^{\prime\mu} \mp \rho'^2 v^\mu}{\Delta [\tau'(\lambda) \pm \sigma'(\lambda)]}$ на начальных отрезках $[0; \tau(\lambda_2) + \sigma(\lambda_2)]$ для $\Psi_+^{\prime\mu}$ и $[\tau(\lambda_2) - \sigma(\lambda_2); 0]$ для $\Psi_-^{\prime\mu}$.

При численном решении значения функций $\Psi_\pm^{\prime\mu}$ пересчитываются в эквидистантных узлах своих аргументов с шагом h с использованием линейной аппроксимации.

Второй этап включает в себя продолжение найденных вектор-функций $\Psi_\pm^{\prime\mu}(\tau)$ за пределы начальных отрезков до некоторого заданного максимального значения их аргумента τ_{\max} и их последующее интегрирование. Это можно осуществить, интегрируя уравнение (19) и параллельно вычисляя

текущее значение функций $\Psi_{\pm}^{\mu}(\tau)$, $\Psi_{+}^{\mu}(\tau^* + 2\pi)$ и $\tau^*(\tau)$ с помощью, соответственно, уравнений (17), (18), (19).

Для повышения порядка точности в ходе вычислений удобно использовать центральную разностную производную, заменяя левую часть уравнения (19) на конечную разность $[U^{\mu}(\tau+h) - U^{\mu}(\tau)]/h$ и вычисляя при этом значение правой части при $\tau+h/2$. Именно поэтому функции $\Psi_{\pm}^{\mu}(\tau)$ удобно вводить на первом этапе и продолжать при $\tau > 0$ в полуцелых точках $\tau+h/2$. Значения вектора U^{μ} в этих точках заменяем на среднее арифметическое $\frac{1}{2}[U^{\mu}(\tau) + U^{\mu}(\tau+h)]$.

Уравнение (19) в данном подходе преобразуется к виду

$$U^{\mu}(\tau+h) \left(1 + \frac{\gamma h}{2m} [U, \Pi] \right) = U^{\mu}(\tau) + \frac{\gamma h}{m} \left(\Pi^{\mu} - \frac{U^{\mu}}{2} \langle U, \Pi \rangle \right),$$

где $\Pi^{\mu} = \Psi_{-}^{\mu}(\tau^* - 2\pi + h/2) + \Psi_{+}^{\mu}(\tau^* + h/2)$. В уравнении (20), как показывают расчеты, необходимая точность может быть достигнута и без этой замены.

Найдя все значения, необходимо осуществить интегрирование Ψ_{\pm}^{μ} с учетом начальных условий. Используем для этого метод Симпсона, аппроксимируя интегрируемую функцию квадратичными трехчленами. Для значений функции в полуцелых точках этот метод приводит к формуле

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{h}{24} \left[f\left(-\frac{h}{2}\right) + 22f\left(\frac{h}{2}\right) + f\left(\frac{3h}{2}\right) \right].$$

На третьем этапе находим решение (14) и строим проекции уровня $t = X^0(\tau, \sigma) = \text{const}$ на плоскость xu , где оси x и u направлены соответственно вдоль векторов e_1 и e_2 .

На основании указанной схемы были реализованы различные способы визуализации полученных решений. В частности, движение струны было представлено в виде «мультфильма», а также в виде, показанном ниже на рис. 1 и 2. На рисунках изображены проекции последовательных положений системы на плоскость xu – проекции сечения мировой поверхности, сделанные через равные промежутки времени $\Delta t = 0,3$. Указаны номера этих сечений в порядке возрастания t . Обозначено положение массивной точки.

На рис. 1 представлен пример движения системы, близкого к точному решению (10) с параметрами $m/\gamma = 1$; $\sum \beta_k^2 = 0,25$; $a_0 = 1,55$; $\omega = 1,285$; $\tau_0 = 2,006$. Начальное положение, отмеченное на рис. 1, a цифрой 1, отвечает сечению $t=0$ мировой поверхности (10), начальная скорость, наряду с соответствующим (10) слагаемым, содержит малое возмущение $\delta v^{\mu} = e_2^{\mu} \cdot \sin^2 \sigma$. Численные эксперименты показывают, что амплитуды малых возмущений при достаточно больших t не растут (рис. 1, б), т.е.

демонстрируют устойчивость ротационных движений (10), а также (12) относительно малых возмущений.

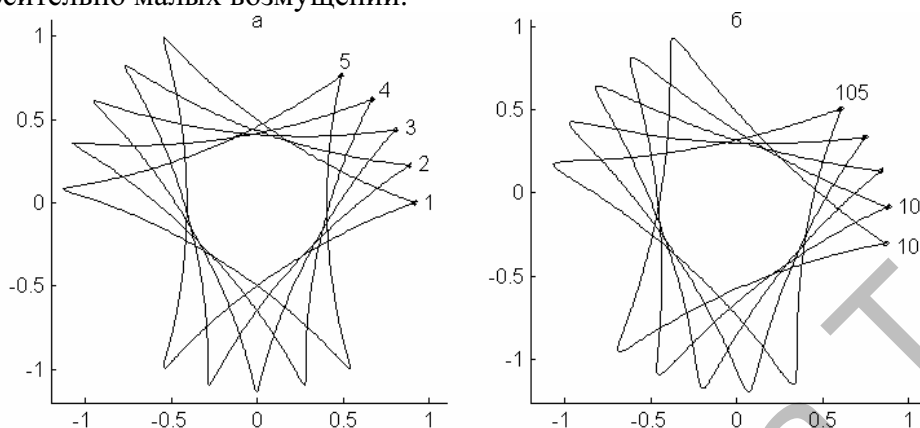


Рис. 1. Движение, близкое к (10)

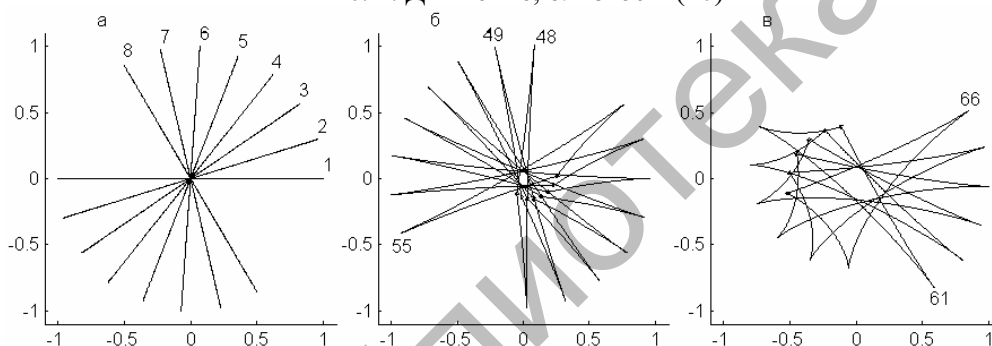


Рис. 2. Движение, близкое к (13)

Однако численное моделирование ротационных движений струны (13), в которых массивная точка m покоится в центре вращения, показало, что при достаточно малых значениях параметра m/γ данные решения являются неустойчивыми в смысле Ляпунова, т.е. сколь угодно малые возмущения приводят с ростом времени t к значительным отклонениям от точного решения (13). В частности, массивная точка удаляется от центра вращения, как это можно видеть на рис. 2, иллюстрирующем движение, близкое к ротационному (13) с $m/\gamma = 1$; $b_k^\mu = 0$; $a_0 = A_1 = 1$ и полученное как решение начально-краевой задачи с начальными условиями

$$\rho^\mu(\lambda) = e_1^\mu \sin \lambda, \quad v^\mu(\lambda) = e_0^\mu + e_2^\mu (\sin \lambda + 0,001 \cos^2 \lambda), \quad \lambda \in [0, 2\pi].$$

На рис. 2, а можно наблюдать вращение сложной вдвое струны, сохраняющей форму прямолинейного отрезка. На рис. 2, б видно, как массивная точка уходит от центра вращения, что приводит к существенному изменению формы струны (рис. 2, в). В ходе дальнейшей эволюции форма струны периодически приближается к первоначальной.

Характер развития неустойчивости не зависит от формы начального возмущения, а характерное время процесса зависит лишь от его величины. Если начального возмущения нет, развитие неустойчивости происходит за счет погрешностей численного счета.

Однако при больших значениях параметра m/γ (в данном примере $m/\gamma > 6$) численное моделирование показывает, что массивная точка не удаляется от центра вращения и движение (13) оказывается устойчивым.

Эти достаточно неожиданные результаты численных экспериментов нуждаются в аналитическом подтверждении, которому посвящен следующий раздел.

Анализ спектра малых возмущений. Для исследуемых ротационных движений (10), (12) и (13) обозначим $\Psi_{\pm}^{\mu}(\tau \pm \sigma)$ функции, входящие в выражение (14), относящиеся к данным мировым поверхностям. Например, для решений (13) производные этих вектор-функций имеют вид

$$\check{\Psi}_{\pm}^{\mu}(\tau) = e_0^{\mu} a_0 \pm \sum_{k>3} e_k^{\mu} b_k \pm n A_n \cdot e^{\mu}(n\tau). \quad (21)$$

Для описания произвольного малого возмущения движения системы, т.е. движения, близкого к ротационному (10), (12) или (13), зададим вектор-функции $\Psi_{\pm}^{\mu}(\tau)$, близкие к $\check{\Psi}_{\pm}^{\mu}(\tau)$, в виде

$$\Psi_{\pm}^{\mu}(\tau) = \check{\Psi}_{\pm}^{\mu}(\tau) + \phi_{\pm}^{\mu}(\tau). \quad (22)$$

Возмущение $\phi_{\pm}^{\mu}(\tau)$ считаем малым, опуская квадратичные по ϕ_{\pm} слагаемые. Из условия светоподобности (15) обеих функций $\Psi_{\pm}^{\mu}(\tau)$ и $\check{\Psi}_{\pm}^{\mu}(\tau)$ в выражении (22) в первом порядке по ϕ_{\pm} следует равенство нулю скалярного произведения:

$$\langle \check{\Psi}_{\pm}^{\mu}, \phi_{\pm} \rangle = 0. \quad (23)$$

Для возмущенных движений равенство (7) $\tau^* = \tau + \tau_0$, вообще говоря, не выполняется и должно быть заменено на равенство

$$\tau^* = \tau + \tau_0 + \chi(\tau), \quad (24)$$

где $\chi(\tau)$ – малое возмущение.

Выражение (22) с учетом (14) является решением уравнений движения струны (3). Поэтому уравнения эволюции малых возмущений $\phi_{\pm}^{\mu}(\tau)$ мы находим, подставляя выражения (22) и (24) в оставшиеся уравнения (2) и (4). Это приводит в случае ротационного движения (13) в линейном по $\phi_{\pm}^{\mu}(\tau)$ и χ приближении к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_+^{\mu} (+) + \varphi_-^{\mu} (-) + 2a_0 e_0^{\mu} \chi'(\tau) &= \varphi_+^{\mu}(\tau) + \varphi_-^{\mu}(\tau), \\ \frac{d}{dt} [\varphi_+^{\mu}(\tau) + \varphi_-^{\mu}(\tau) - e_0^{\mu} (\langle e_0, \varphi_+ \rangle + \langle e_0, \varphi_- \rangle)] &= \\ = Q [\varphi_+^{\mu}(\tau) + \varphi_-^{\mu}(\tau) - \varphi_+^{\mu}(+) + \varphi_-^{\mu}(-) - 2n^2 A_n e^{\mu}(n\tau) \cdot \chi(\tau)]. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $(\pm) \equiv (\tau \pm 2\pi)$.

Умножая скалярно эти уравнения на базисные векторы $e_0, e_k, e(\tau), e'(\tau)$ и добавляя уравнения (23), в которые подставлены выражения (21), получим линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (с отклоняющимся аргументом) относительно χ и проекцией φ_{\pm}^{μ} на указанные векторы.

$$\begin{aligned} \langle e_0, \varphi_{\pm} \rangle &= B_{\pm}^0 e^{-i\tilde{\omega}\tau}, \\ \langle e_k, \varphi_{\pm} \rangle &= B_{\pm}^k e^{-i\tilde{\omega}\tau}, \quad \langle e, \varphi_{\pm} \rangle = B_{\pm} e^{-i\tilde{\omega}\tau}, \quad \langle e', \varphi_{\pm} \rangle = B'_{\pm} e^{-i\tilde{\omega}\tau}, \quad 2a_0 \chi = \Delta e^{-i\tilde{\omega}\tau}. \end{aligned}$$

В результате возникает линейная однородная система алгебраических уравнений относительно амплитуд данных гармоник:

$$\begin{aligned} B_+^k E_+ + B_-^k E_- &= 0, \quad B_+^k (QE_+ - i\tilde{\omega}) = B_-^k (QE_- - i\tilde{\omega}); \\ B_+^0 E_+ + B_-^0 E_- &= i\tilde{\omega}\Delta, \quad B_+^0 E_+ = B_-^0 E_-, \\ B_+ E_+ + B_- E_- &= 0, \quad B'_+ E_+ + B'_- E_- = 0, \\ B_+ (QE_+ - i\tilde{\omega}) - B_- (QE_- - i\tilde{\omega}) - nB'_+ - nB'_- &= 0, \\ B_+ (QE_+ - i\tilde{\omega}) - B'_- (QE_- + i\tilde{\omega}) + nB_+ + nB_- - Qnv\Delta &= 0; \\ B_{\pm}^0 \pm \nu B_{\pm} \pm a_0^{-1} \sum_{k>3} b_k B_{\pm}^k &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $E_{\pm} = \exp(\mp 2\pi i \tilde{\omega}) - 1$, $\nu = nA_n / a_0$. Последние уравнения в (26) – следствие уравнений (23).

Если $b_k = 0$, то первые два уравнения системы (26) образуют замкнутую подсистему, нетривиальные решения которой существуют тогда и только тогда, когда $\tilde{\omega}$ – корень уравнения $\sin \pi \tilde{\omega} \cdot \left(\sin \pi \tilde{\omega} + \frac{\tilde{\omega}}{2Q} \cos \pi \tilde{\omega} \right) = 0$, совпадающего с уравнением (11). Следовательно, спектр поперечных (по отношению к плоскости $xу$) малых колебаний струны для движения (13) содержит те же частоты, что и решения (12) и (13). Все эти частоты являются вещественными числами, поэтому амплитуды таких колебаний не растут с ростом времени t .

Нас в большей степени интересуют возмущения в плоскости $xу$, показанные на рис. 2. Полагая, что для таких колебаний $B_{\pm}^k = 0$, находим условие существования нетривиальных решений данной однородной системы, которое сводится к уравнению

$$4Q^2 \int \text{tg}^2 \pi \tilde{\omega} + 4Q \left(\tilde{\omega} + \frac{n^2 v^2}{2\tilde{\omega}} \right) \text{tg} \pi \tilde{\omega} + \tilde{\omega}^2 - n^2 = 0. \quad (27)$$

Это трансцендентное уравнение содержит счетный набор вещественных корней, отвечающих различным модам малых собственных колебаний.

Анализ наличия комплексных корней $\tilde{\omega} = \Theta + i\xi$ уравнения (27) показывает, что такие корни могут существовать лишь при $\Theta = 0$ – на мнимой оси. В случае $\tilde{\omega} = i\xi$ уравнение (27) преобразуется к виду

$$4Q^2 \text{th}^2 \pi \xi + \xi^2 + n^2 = 4Q \left(\frac{n^2 v^2}{2\xi} \right) \text{th} \pi \xi. \quad (28)$$

Левая часть этого уравнения возрастает с ростом ξ (при $\xi > 0$), а правая – убывает. Очевидно, что корень (28), т.е. мнимый корень $\tilde{\omega} = i\xi$ уравнения (27), существует, если

$$2\pi Q v^2 > 1. \quad (29)$$

В частности, если параметр $\nu = nA_n / a_0 = \left(1 - a_0^{-2} \sum b_k^2 \right)^{1/2}$ равен единице (как для движения, представленного на рис. 2), то критерий (29) сведется к виду $Q^{-1} = \frac{m}{\gamma a_0} < 2\pi$. Если это условие выполняется (масса m достаточно мала), то амплитуда возмущения, соответствующая корню $\tilde{\omega} = i\xi$, приобретает множитель $\exp(\xi\tau)$, т.е. растет экспоненциально.

Проведенный анализ подтверждает наблюдаемую в численных экспериментах неустойчивость ротационного движения (13) относительно малых возмущений и зависимость этого эффекта от массы m материальной точки.

Список литературы

1. Миловидов А.Е., Шаров Г.С. Замкнутые релятивистские струны в пространствах с нетривиальной геометрией // Теорет. и мат. физика. 2004. Т. 141, № 3. С. 422.
2. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2.
3. Шаров Г.С. Классификация ротационных движений для струнной модели бариона «треугольник» // Теорет. и мат. физика. 1998. Т. 114, № 2. С. 277–295.
4. Петров В.П., Шаров Г.С. Классификация движений релятивистской струны с массивными концами, допускающих линеаризацию краевых условий // Теорет. и мат. физика. 1996. Т. 109, № 2. С. 187–201.
5. Sharov G.S. Quasiroational motions and stability problem in dynamics of string hadron models // Phys. Rev. D. 2000. V. 62, № 9. P. 094015, hep-ph/0004003.
6. Шаров Г.С. Неустойчивость струнной модели бариона Y в рамках классической динамики // Ядерная физика. 2002. Т. 65, № 5. С. 938–948.
7. Барбашов Б.М., Шаров Г.С. Начально-краевая задача для релятивистской струны с массивными концами // Теорет. и мат. физика. 1994. Т. 101, № 2. С. 253–71.