МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 330.45

DOI: 10.26456/2219-1453/2022.2.069–081

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ ИГРОЙ С ПРИРОДОЙ ПРИ НАЛИЧИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЫИГРЫШЕЙ

В.А. Горелик[1,2], Т.В. Золотова[3]

[1]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва
[2]ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», г. Москва
[3]ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве РФ», г. Москва

Объект исследования – модель «игры с природой с известными вероятностями состояний» для расчета возможностей инвестиционных решений. Цель разработки состоит в развитии подхода к принятию решений в играх с природой, учитывающего корреляцию случайных значений выигрышей. Двухкритериальная модель «математическое ожидание выигрыша – среднеквадратическое отклонение» формализована путем перевода оценки выигрыша в ограничение. Элемент научной новизны заключается в разработке аналитического метода решения для возникающей задачи квадратичного программирования, иллюстрирующего процесс инвестирования с использованием реальных статистических данных.

Ключевые слова: *управление риском, принцип оптимальности, двухкритериальный подход, математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение, корреляция*

Введение

Процессы управления в сложных системах характеризуются неполнотой информации о состоянии системы и внешней среды. В качестве математической модели принятия решений в подобных ситуациях может использоваться игра с природой. При построении модели и постановке оптимизационной задачи возникает вопрос о наличии информации о состояниях природы, имеющейся у лица, принимающего решение (ЛПР). От этого зависит определение понятия оптимальности решения или, как иногда говорят, принципа оптимальности. В данной работе предполагается, что у ЛПР имеется информация о вероятностях состояний природы, т.е. рассматривается случай вероятностной неопределенности (или, как принято говорить, речь идет об управлении риском).

Вопросам управления риском посвящено большое количество работ (например [1–3, 5–10]). Авторами был предложен двухкритериальный подход «эффективность – риск» к определению принципа оптимальности с использованием в качестве оценки риска – функции VAR. В данной работе в качестве оценки риска используется дисперсия [1]. Как известно, функция VAR и дисперсия являются наиболее широко используемыми оценками риска.

Авторами излагался двухкритериальный подход «эффективность – риск» к определению принципа оптимальности при принятии решений в стохастических условиях с использованием в качестве оценки эффективности математического ожидание выигрыша и в качестве оценки риска - среднеквадратического отклонение (СКО) [2].

Отмечено, что если при известных состояниях природы речь идет о максимизации математического ожидания выигрыша, то использование смешанной стратегии не имеет смысла. Иначе обстоит дело при двухкритериальном подходе, а именно, оптимальная смешанная стратегия, вообще говоря, дает больший выигрыш, чем любая чистая стратегия.

Главным отличием данной работы от традиционного подхода к определению смешанной стратегии в теории игр явилось то, что в ней учитывалась возможность корреляционной зависимости случайных значений выигрышей исходных альтернатив (чистых стратегий) [2]. Отметим, что учет коррелированности становится существенным именно при двухкритериальном подходе. Обычно в играх с природой в качестве критерия рассматривается либо математическое ожидание выигрыша, либо риск по Сэвиджу. В таком случае возможная коррелированность случайных выигрышей при разных чистых стратегиях никакой роли не играет. При наличии двух критериев, в качестве одного из которых выступает СКО, учет коррелированности существенным образом влияет на постановку задачи и метод ее решения.

Данная работа является продолжением указанного подхода. В ней двухкритериальная задача формализована путем перевода критерия риска СКО (или дисперсии) в ограничение с заданным верхним порогом [2]. Авторами рассмотрена задача минимизации дисперсии как критерия риска при ограничении снизу на математическое ожидание выигрыша. Соответственно ими получены новые аналитические и алгоритмические результаты, касающиеся решения данной задачи в случае учета коррелированности случайных выигрышей каждой пары чистых стратегий.

Указанный подход проиллюстрирован на примере процесса инвестирования с использованием реальных статистических данных.

Задача минимизации дисперсии при ограничении снизу на математическое ожидание выигрыша

Пусть у ЛПР имеется n перенумерованных чистых стратегий, $i=1,\dots,n$. Известно множество возможных состояний внешней среды (природы), которые перенумерованы $j=1,\dots,m$, а также выигрыши от i-го решения при j-м состоянии внешней среды a_{ij}. Эти выигрыши представлены в виде матрицы $A=\|a_{ij}\|$, размера $n\times m$. Известны также вероятности состояний природы q_j.

В качестве оценки эффективности чистой стратегии i принято математическое ожидание выигрыша $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}q_j$, а в качестве оценки риска – СКО $\sigma_i = (\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}-\bar{a}_i)^2 q_j)^{0.5}$.

При использовании смешанной стратегии $\bar{a}_i$ есть условное математическое ожидание выигрыша при реализации i-й чистой стратегии. Через p_i обозначена вероятность выбора i-й чистой стратегии. Тогда математическое ожидание выигрыша при использовании стратегии $p=(p_1,\dots,p_n)$ есть $\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_i p_i$.

Пусть σ_{ik} – ковариационные моменты случайных величин выигрышей для чистых стратегий i и k, которые определяются по формулам $\sigma_{ik} = \sum_{j=1}^{m}(a_{ij}-\bar{a}_i)(a_{kj}-\bar{a}_k)q_j$. Обозначена ковариационная матрица $D=\|\sigma_{ik}\|$. Как известно, ковариационная матрица всегда неотрицательно определена. Авторы в дальнейшем предполагают несколько большее, а именно, что она положительно определена.

СКО случайной величины выигрыша при использовании стратегии $p=(p_1,\dots,p_n)$ в случае наличия коррелированности определяется, очевидно, по формуле $\sigma = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ik}p_i p_k)^{0.5}$ или в матрично-векторной форме $\sigma = \langle p, Dp\rangle^{0.5}$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - знак скалярного произведения векторов.

Удобно все данные представить в виде таблицы.

	q_1	q_2	…	q_m	$\bar{a}_i$	1	2	…	n
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}	$\bar{a}_1$	σ_{11}	σ_{12}	…	σ_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	$\bar{a}_2$	σ_{21}	σ_{22}	…	σ_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}	$\bar{a}_n$	σ_{n1}	σ_{n2}	…	σ_{nn}

Первые m столбцов таблицы – это исходные данные, импортируемые из внешних источников, а последние n+1 столбец – расчетные данные.

Для удобства дальнейшего изложения, были введены n-мерные вектора $\bar{a} = (\bar{a}_1,...,\bar{a}_n)$ и e=(1,…,1).

Задача на минимум дисперсии при ограничении снизу на математическое ожидание выигрыша имеет вид

$$\min_{p\in P} \langle p, Dp\rangle, \quad P = \{ p \,|\, \langle \bar{a}, p\rangle \ge a_0, \langle p, e\rangle = 1,\ p \ge 0\}. \tag{1}$$

Множество P не пусто, замкнуто, ограничено, если пороговое значение a_0 не больше максимального из значений $\bar{a}_i$. Значит, при $a_0 \le \max\limits_{i=1,...,n} \bar{a}_i$ задача (1) имеет решение.

Найдена левая граница a^* диапазона значений a_0, при которых первое ограничение в задаче (1) становится существенным. Для этого рассмотрена вспомогательная задача квадратичного программирования:

$$d_0 = \min_{p\in P_0} \langle p, Dp\rangle, \quad P_0 = \{ p \,|\, \langle p, e\rangle = 1,\ p \ge 0\}. \tag{2}$$

Задача (2) имеет единственное решение p^*. Очевидно, что $a^* = \langle \bar{a}, p^*\rangle$. Через $\hat{D}$ обозначена произвольная квадратная подматрица матрицы D размерности $k\times k$, полученную вычеркиванием строк и столбцов с одинаковыми номерами, через I_1 – множество не вычеркнутых номеров строк и столбцов, через I_2 – множество вычеркнутых номеров строк и столбцов, через $\hat{D}^+$ – дополнительную подматрицу, полученную из D вычеркиванием строк с номерами из I_1 и столбцов с номерами из I_2, через $\hat{e}$ – часть вектора e размерности k, через $\hat{e}^+$ – часть вектора e размерности $n–k$, через $\hat{a}$ – часть вектора $\bar{a}$ с компонентами из I_1. Следующая лемма дает формулу для нахождения a^*.

Лемма. Существует единственная матрица $\hat{D}$ такая, что $\hat{D}^+ \hat{p} - \langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e}\rangle^{-1}\hat{e}^+ \ge 0$, где

$$\hat{p} = \langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e}\rangle^{-1}\hat{D}^{-1}\hat{e}. \tag{3}$$

При этом

$$a^* = \langle \hat{D}^{-1}\hat{e}, \hat{e}\rangle^{-1}\langle \hat{a}, \hat{D}^{-1}\hat{e}\rangle. \tag{4}$$

Доказательство. Функция Лагранжа для задачи (2) имеет вид $L_0(p,\mu) = \frac{1}{2}\langle p, Dp\rangle + \mu(1 - \langle p, e\rangle)$. Условия экстремума Каруша-Куна-Таккера (ККТ) для задачи квадратичного программирования (2) есть

$\frac{\partial L_0(p,\mu)}{\partial p_i} = 0, i \in I, \frac{\partial L_0(p,\mu)}{\partial p_i} \geq 0, i \notin I$, где I – множество индексов, соответствующих ненулевым p_i. Для задачи (2) эти условия являются необходимыми и достаточными, а так как решение задачи (2) p^* единственное, то они выполняются только для данного вектора.

Для вектора $\hat{p}$, состоящего из ненулевых компонент вектора p^*, из условий экстремума выведена система уравнений: $\hat{D}\hat{p} - \mu\hat{e} = 0$. Как известно, квадратные подматрицы положительно определенной матрицы D также являются положительно определенными. Положительно определенные матрицы не вырождены, поэтому из системы уравнений имеем $\hat{p} = \mu\hat{D}^{-1}\hat{e}$. Подставив этот вектор в ограничение, получаем $\mu\langle\hat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle = 1$. Обратная матрица $\hat{D}^{-1}$ для положительно определенной матрицы также положительно определена и не вырождена, поэтому $\mu = \langle\hat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}$ и $\hat{p} = \langle\hat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\hat{D}^{-1}\hat{e}$, т.е. получили (3). Кроме того, из условий экстремума имеем неравенство $\hat{D}^{+}\hat{p} - \langle\hat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\hat{e}^{+} \geq 0$. Умножение вектора (3) на вектор $\hat{a}$ дает выражение:

$$\langle\hat{a},\hat{p}\rangle = \langle\hat{a},\langle\hat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\hat{D}^{-1}\hat{e}\rangle = \langle\hat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\langle\hat{a},\hat{D}^{-1}\hat{e}\rangle.$$

Значит $a^* = \langle\hat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\langle\hat{a},\hat{D}^{-1}\hat{e}\rangle$, т. е. получено (4). Лемма доказана.

В дальнейшем будет положено, что все $\bar{a}_i$ различны. Это чисто техническое предположение понадобится для формулировки теоремы о методе решения задачи (1). Оно позволяет исключить тривиальные случаи, когда оптимальной является чистая стратегия, т.е. решением будет истинно смешанная (содержащих не менее двух ненулевых компонент) стратегия.

Теорема. Если $a^* < a_0 < \max_{i=1,\dots,n} \bar{a}_i$, все $\bar{a}_i$ различны, матрица $D = \|\sigma_{ik}\|$ положительно определена, то задача (1) имеет единственное решение p^0 и истинно смешанная оптимальная стратегия может быть представлена в виде

$$\tilde{p}^0 = \tilde{D}^{-1}(\lambda^0\tilde{a} + \mu^0\tilde{e}), \tag{5}$$

где

$$\lambda^0 = \frac{\max\{a_0\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle, 0\}}{\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2},$$
$$\mu^0 = \frac{\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle - a_0\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}{\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2}, \tag{6}$$

$\tilde{D}$ – некоторая (единственная) квадратная подматрица матрицы D, полученная вычеркиванием строк и столбцов с одинаковыми номерами, $\tilde{p}^0$ – вектор из ненулевых компонент вектора p^0, $\tilde{a}$ – вектор из части компонент вектора $\bar{a}$, $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e, полученные вычеркиванием компонент с номерами, соответствующим нулевым компонентам вектора p^0.

Доказательство. При $a_0 < \max\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{a}_i$ множество P не пусто, замкнуто и ограничено, поэтому задача выпуклого программирования (1) имеет решение, причем единственное, т. к. целевая функция строго выпукла. Функция Лагранжа для задачи (1) имеет вид

$$L_1(p,\lambda,\mu) = \tfrac{1}{2}\langle p, Dp\rangle + \lambda(a_0 - \langle\bar{a}, p\rangle + \mu(1 - \langle p, e\rangle), \lambda \geq 0.$$

Пусть I – множество индексов, соответствующих ненулевым p_i. Условия экстремума для задачи (1) имеют вид

$$\frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i} = 0, i \in I, \frac{\partial L_1(p,\lambda,\mu)}{\partial p_i} \geq 0, i \notin I.$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными (в задаче с линейными ограничениями условие регулярности Слейтера не требуется).

Вектор $\tilde{p}$, составленный из ненулевых компонент вектора p, удовлетворяет системе уравнений $\tilde{D}\tilde{p} - \lambda\tilde{a} - \mu\tilde{e} = 0$. Здесь $\tilde{D}$ – квадратная подматрица матрицы D, полученная вычеркиванием строк и столбцов с номерами, соответствующими нулевым компонентам вектора p, $\tilde{a}$ – вектор из части компонент вектора $\bar{a}$, $\tilde{e}$ – вектор из части компонент вектора e.

Рассматривается сначала случай $\lambda > 0$. Тогда первое ограничение в (1) активное. Как было изложено выше, квадратные подматрицы положительно определенной матрицы D также являются положительно определенными и невырожденными. Поэтому можно найти $\tilde{p}$ из указанной системы уравнений $\tilde{p} = \tilde{D}^{-1}(\lambda\tilde{a} + \mu\tilde{e})$.

При подстановке вектора $\tilde{p}$ в ограничения задачи (1) получаются следующие равенства:

$$\langle\tilde{a}, \tilde{D}^{-1}(\lambda\tilde{a} + \mu\tilde{e})\rangle = a_0, \ \langle\tilde{D}^{-1}(\lambda\tilde{a} + \mu\tilde{e}), \tilde{e}\rangle = 1.$$

Первое равенство преобразовано к виду $\lambda\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle+\mu\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle=a_0$.

Из второго равенства выражено $\mu=(1-\lambda\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle)\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}$ и подставлено в первое:

$$\lambda\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle+(1-\lambda\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle)\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle=a_0 .$$

Таким образом, с учетом того, что матрица $\tilde{D}^{-1}$ симметричная, получено выражение для λ:

$$\lambda \;=\frac{a_0-\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}{\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle-\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2} \tag{7}$$

или после преобразования

$$\lambda=\frac{a_0\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle-\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}{\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle-\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2}. \tag{8}$$

Далее показано, что знаменатель в (8) положителен, т. е. имеет место неравенство

$$\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle-\langle\tilde{a},\tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2>0. \tag{9}$$

Действительно, так как $\tilde{D}^{-1}$ является положительно определенной матрицей, то существует такая невырожденная матрица *B*, что $\tilde{D}^{-1}=B^TB$. Подстановка этого разложения матрицы в левую часть неравенства (9) дает выражение

$$\langle\tilde{a},B^TB\tilde{a}\rangle\langle\tilde{e},B^TB\tilde{e}\rangle-\langle\tilde{e},B^TB\tilde{a}\rangle^2=\langle B\tilde{a},B\tilde{a}\rangle\langle B\tilde{e},B\tilde{e}\rangle-\langle B\tilde{e},B\tilde{a}\rangle^2.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского: $\langle x,y\rangle^2\le\|x\|^2\|y\|^2$, положив $x=B\tilde{a}, y=B\tilde{e}$. В неравенстве Коши-Буняковского имеет место равенство только в случае коллинеарности векторов *x* и *y*. Но вектора $B\tilde{a}$ и $B\tilde{e}$ не могут быть коллинеарными, т.к. в противном случае при умножении их на матрицу B^{-1} вектора $\tilde{a}$ и $\tilde{e}$ оказываются тоже коллинеарными. Это противоречит условию теоремы, что все $\bar{a}_i$ различны. Поэтому в случае, когда у вектора *p* имеется не менее двух ненулевых компонент, справедливо неравенство (9).

Числитель в (7) неотрицателен, т. к. из леммы (см. формулу (4)) следует, что в противном случае для подматрицы $\tilde{D}$ пороговое значение a_0 меньше математического ожидания выигрыша, соответствующего минимуму дисперсии. Тогда первое ограничение в задаче (1) не может быть активным и $\lambda=0$, что противоречит предположению $\lambda>0$. Подстановка λ в выражение для μ дает

$$\mu = (1 - \frac{a_0 - \langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}{\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle - \langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2}\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle =$$

$$= \frac{\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle - a_0\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle}{\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a}\rangle\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle - \langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^2}.$$

Если $\tilde{p} \geq 0$ и выполнена остальная часть условий ККТ, а именно, неотрицательность производных функции Лагранжа по p_i с номерами, соответствующим нулевым компонентам, то вектор $\tilde{p}$, дополненный нулями на соответствующих местах, является решением задачи (1).

Пусть теперь $\lambda = 0$, тогда имеем $\tilde{D}\tilde{p} - \mu\tilde{e} = 0$. Объединяя оба случая, получены формулы (5) и (6). Теорема доказана.

Замечание: Если формула (7) дает $\lambda < 0$, т.е. числитель $a_0 - \langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle^{-1}\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e}\rangle < 0$, то это означает, что для данной подматрицы $\tilde{D}$ первое ограничение задачи (1) при выбранном a_0 не может быть активным и имеет место случай $\lambda = 0$.

Алгоритм нахождения решения задачи (1) включает перебор множеств ненулевых компонент I, но так как условия оптимальности для нее являются и достаточными, то при появлении первого удовлетворяющего им вектора процесс перебора заканчивается.

Практическая интерпретация модели на примере инвестиционного менеджмента

Рассмотрено применение полученных результатов на примере процесса инвестирования на фондовом рынке. Обычно смешанная стратегия интерпретируется как вектор долей финансовых инструментов в составе портфеля. Не исключая такую интерпретацию, можно предложить и несколько иную точку зрения. Инвестор, как правило, формирует портфель не одномоментно, а как последовательный процесс покупки того или иного финансового актива. В таком случае смешанная стратегия может реализовываться в своем имманентном смысле, т. е. покупки осуществляются случайным образом с распределением, определяемым найденным ранее оптимальным решением. Если этот процесс достаточно длительный, то структура портфеля будет приблизительно соответствовать виду смешанной стратегии. В рамках данной модели как игры с природой при применении ее к фондовому рынку короткие продажи недопустимы, т. к. решением являются смешенные стратегии, компоненты которых в принципе не могут быть отрицательными.

Далее приведен пример нахождения оптимальной стратегии инвестирования для реальных данные о котировках акций российских компаний за период с 01.02.2021 по 01.05.2021. Данный период выбран, во-первых, для сравнения с результатом использования модели с ограничением по риску [2], и, во-вторых, более поздний период данных характеризует падение рыночных индексов, и связан не столько с экономическими, сколько с политическими причинами.

Были рассмотрены три относительно успешные компании: ПАО «Банк ВТБ» (VTBR), ПАО «Газпром» (SAGP), ПАО «Сбербанк России» (SBER).

На рис. 1 приведены значения цен закрытия акций всех рассматриваемых компаний за указанный период (данные взяты с сайта Инвестиционной компании «ФИНАМ» [4]).

На основании этих данных рассчитаны ежедневные значения доходностей компаний, средние значения доходностей, дисперсии и ковариации (они также приведены на рис. 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		VTBR	GAZP	SBER		VTBR	GAZP	SBER	
2	<DATE>	<CLOSE>	<CLOSE>	<CLOSE>		**доходности акций**			
3	20210201	0,036945	214,66	263,8		0	-0,001118	-0,002464	
4	20210202	0,036945	214,42	263,15		0,0014887	0,01716258	0,00144404	
5	20210203	0,037	218,1	263,53		0,01027027	0,00774874	0,02496869	
6	20210204	0,03738	219,79	270,11		0,0135099	0,01010055	0,00588649	
7	20210205	0,037885	222,01	271,7		0,01055827	0,02698077	0,01288185	
8	20210208	0,038285	228	275,2		-0,0125375	-0,0011842	-0,0226017	
9	20210209	0,037805	227,73	268,98		-0,0115064	-0,0197163	-0,0114507	
10	20210210	0,03737	223,24	265,9		0,00267594	-0,0084662	-0,004513	
60	20210422	0,048	230,93	292,18		0,07	0,00731823	0,00345677	
61	20210423	0,05136	232,62	293,19		-0,0008762	0,0026223	0,00709438	
62	20210426	0,051315	233,23	295,27		-0,0003897	-0,0052738	0,01093914	
63	20210427	0,051295	232	298,5		-0,0188127	0,00413793	-3,35E-05	
64	20210428	0,05033	232,96	298,49		-0,006358	-0,0105168	-0,0046568	
65	20210429	0,05001	230,51	297,1		0,03179364	0,00377424	0,0021205	
66	20210430	0,0516	231,38	297,73					
67									
68					**мат.ожидания**	0,00547919	0,00127111	0,00200325	
69									
70					**ковар.матрица**	0,00033635	0,00010007	9,5222E-05	
71						0,00010007	0,00016271	9,3955E-05	
72						9,5222E-05	9,3955E-05	0,00016446	
73									

Рис. 1. Котировки акций ВТБ, Газпрома, Сбербанка и их статистические характеристики

Введена следующая нумерация стратегий: 1 – вложение в акции компании «Банк ВТБ», 2 – вложение в акции компании «Газпром», 3 – вложение в акции компании «Сбербанк России».

Средние значения доходностей равны $\bar{a}_1 = 0.00548$ (0.548%), $\bar{a}_2 = 0.00127$ (0.127%), $\bar{a}_3 = 0.002$ (0.2%), ковариационная матрица имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 0.00034 & 0.00010 & 0.000095 \\ 0.00010 & 0.00016 & 0.000094 \\ 0.000095 & 0.000094 & 0.00017 \end{pmatrix}.$$

Найдены пределы изменения порогового значения, т.е.

вычислены левый и правый концы интервала $\langle \hat{D}^{-1}\hat{e},\hat{e}\rangle^{-1}\langle \hat{a},\hat{D}^{-1}\hat{e}\rangle < a_0 < \max\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{a}_i$. Решением задачи (2) является полноразмерный портфель $p=(0.11532, 0.44388, 0.44079)$, поэтому для исходной матрицы D и исходного вектора ожидаемых выигрышей $\bar{a}=(0.00548, 0.00127, 0.002)$ имеем

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} 3815.458 & -1597.97754 & -1296.22457 \\ -1597.97754 & 9840.62394 & -4696.6592 \\ -1296.22457 & -4696.6592 & 9514.1783 \end{pmatrix},$$

$\langle D^{-1}e,e\rangle = 7988.538$, $\langle \bar{a},D^{-1}e\rangle = 16.60911$.

Тогда получаем $0.00208 < a_0 < 0.00548$.

Решается задача (1) при пороговом значении математического ожидания выигрыша $a_0=0.003$. Приводится для наглядности подробная процедура решения этой задачи с использованием формул (5) и (6).

Пусть $I=\{1, 2, 3\}$, т. е. используется исходный вектор ожидаемых выигрышей $\bar{a}=(0.00548, 0.00127, 0.002)$ и исходная ковариационная матрица D. Тогда получаем $\langle \bar{a},D^{-1}\bar{a}\rangle = 0.093993$. По формулам (6) имеем $\lambda=\dfrac{0.003\cdot 7988.538-16.60911}{0.093993\cdot 7988.538-16.60911^2}=0.01549,$

$$\mu=\frac{0.093993-0.003\cdot 16.60911}{0.093993\cdot 7988.538-16.60911^2}=0.00009.$$

Используя формулу (5), имеем

$$p=\begin{pmatrix} 3815.458 & -1597.97754 & -1296.22457 \\ -1597.97754 & 9840.62394 & -4696.6592 \\ -1296.22457 & -4696.6592 & 9514.1783 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\left(0.01549\begin{pmatrix}0.00548\\0.00127\\0.002\end{pmatrix}+0.00009\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=(0.33775, 0.24212, 0.42013).$$

Решается задача (1) при пороговом значении математического ожидания выигрыша $a_0=0.0045$. Для $I=\{1, 2, 3\}$ аналогично по формулам (6)

$$\lambda=\frac{0.0045\cdot 7988.538-16.60911}{0.093993\cdot 7988.538-16.60911^2}=0.04071,$$

$$\mu=\frac{0.093993-0.0045\cdot 16.60911}{0.093993\cdot 7988.538-16.60911^2}=0.00004.$$

Используя формулу (5), получаем $p = (0.70007, -0.08654, 0.38648)$.

Данный вектор p решением не является, так как для него не выполняется условие $p \geq 0$. Компонента p_2 отрицательна, поэтому можно предположить, что в оптимальной смешанной стратегии вторая компонента равна нулю.

Возьмем I={1, 3}, тогда $\tilde{a} = (0.00548, 0.002)$,

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0.00034 & 0.000095 \\ 0.000095 & 0.00017 \end{pmatrix}, \; \tilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 3555.969551 & -2058.89531 \\ -2058.89531 & 7272.59202 \end{pmatrix},$$

$\langle \tilde{a}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \rangle = 0.090743$, $\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{e} \rangle = 6710.771$, $\langle \tilde{e}, \tilde{D}^{-1}\tilde{a} \rangle = 18.64708$,

и по формулам (6) получаем

$$\lambda = \frac{0.0045 \cdot 6710.771 - 18.64708}{0.090743 \cdot 6710.771 - 18.64708^2} = 0.04422,$$

$$\mu = \frac{0.090743 - 0.0045 \cdot 18.64708}{0.090743 \cdot 6710.771 - 18.64708^2} = 0.00003.$$

Используя формулу (5), имеем вектор ненулевых компонент

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} 3555.969551 & -2058.89531 \\ -2058.89531 & 7272.59202 \end{pmatrix} \times \left(0.04422 \begin{pmatrix} 0.00548 \\ 0.002 \end{pmatrix} + 0.00003 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Откуда $\tilde{p} = (0.71830, 0.28170)$.

Проверим выполнение условий экстремума для вычеркнутого номера i=2. Производная функции Лагранжа по p_2 есть

$$\frac{\partial L_1(p, \lambda, \mu)}{\partial p_2} = \sum_{k=1}^{3} \sigma_{2k} p_k - \lambda \bar{a}_2 - \mu.$$

При подстановке вектора $(0.71830, 0.28170)$ и множителей Лагранжа $\lambda = 0.04422$, $\mu = 0.00003$ она равна

$$\frac{\partial L_1(p, \lambda, \mu)}{\partial p_2} = 0.00010 \cdot 071830 + 0.00016 \cdot 0 + 0.000094 \cdot 0.28170 -$$
$$- 0.04422 \cdot 0.00127 + 0.00003 = 0.00002.$$

Значит все условия экстремума выполнены и оптимальное решение задачи (1) имеет вид $p^0 = (0.71830, 0, 0.28170)$.

Если решить задачу (1) при пороговом значении математического ожидания выигрыша $a_0 = 0.004188$, то получим решение задачи (1) $(0.62840, 0, 0.37161)$, которое, как и следовало ожидать, в точности совпадает с решением задачи на максимум ожидаемой доходности с ограничением по риску из [2].

Заключение

Целью данной работы является развитие нового подхода в теории игр, конкретно в играх с природой, связанного с рассмотрением корреляции случайных выигрышей для каждой пары чистых стратегий. Полученные теоретические результаты, по мнению авторов, могут найти приложения в различных задачах принятия решений. Рассмотренный пример фондового инвестирования является иллюстрацией практического применения полученных результатов. При этом заметим, что в общетеоретическом плане речь идет о нахождении оптимальной смешанной стратегии, для которой условие неотрицательности компонент является обязательным (что, кстати, существенно, усложняет поиск решения). Поэтому при применении данного подхода к фондовому инвестированию короткие продажи исключаются. Впрочем, для фондовых рынков ограничения на короткие продажи, вплоть до их полного запрета, не так уж редки.

Список литературы

1. Горелик В.А., Золотова Т.В. Принцип оптимальности «математическое ожидание – VAR» и его применение в задачах фондового инвестирования // Управление развитием крупномасштабных систем: Труды 12 международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 148–154.
2. Горелик В.А., Золотова Т.В. Учет корреляционной зависимости доходностей при использовании смешанных стратегий в играх с природой // Вестник Тверского государственного университета. Серия: экономика и управление. 2021. №3(55). С. 139 – 149.
3. Жуковский В.И., Кириченко М.М. Риски и исходы в многокритериальной задаче при неопределенности // Управление риском. 2016. № 2. С. 17–25.
4. Инвестиционная компания «ФИНАМ», https://www.finam.ru/, период обращения 03.05.21.
5. Лабскер Л.Г. Свойство синтезирования критерия Вальда-Сэвиджа и его экономическое приложение // Экономика и математические методы. 2019. Т. 55. № 4. С. 89–103.
6. Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бэйли Джефри В. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2018. 1028 с.
7. García F., González-Bueno J.A., Oliver J. Mean-variance investment strategy applied in emerging financial markets: Evidence from the Colombian stock market // Intellectual Economics. 2015. Vol. 9. Issue 1. P. 22–29.
8. Harman R., Prus M. Computing optimal experimental designs with respect to a compound Bayes risk criterion // Statistics & Probability Letters. 2018. Vol. 137. P. 135–141.
9. Kuzmics C. Abraham Wald's complete class theorem and Knightian uncertainty // Games and Economic Behavior. 2017. Vol. 104. P. 666–673.
10. Radner R. Decision and Choice: Bounded Rationality // International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences (Second Edition). 2015. P. 879–885.

Об авторах:

ГОРЕЛИК Виктор Александрович – профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва; профессор ФГБОУ ВО Московский педагогический государственный университет, e-mail: vgor16@mail.ru, ORCID: 0000−0003−2435−0796, SPIN-код: 3547-6587

ЗОЛОТОВА Татьяна Валерьяновна – доцент, доктор физико-математических наук, профессор Департамента анализа данных и машинного обучения, ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве РФ», e-mail: tgold11@mail.ru, ORCID: 0000−0001−5185−0687, SPIN-код: 6997-9121

MODELING OF INVESTMENT DECISIONS BY A GAME WITH NATURE IN THE PRESENCE OF RANDOM PAYOFFS CORRELATION

V.A. Gorelik[1,2], T.V. Zolotova[3]

[1]Federal Research Center "Informatics and Management" of the Russian Academy of Sciences, Moscow
[2]FGBOU VO "Moscow Pedagogical State University", Moscow
[3] FSOBU VO "Financial University under the Government of the Russian Federation", Moscow

The object of the study is a model of "playing with nature with known state probabilities" to calculate the possibilities of investment decisions. The goal of the development is to develop an approach to decision-making in games with nature, taking into account the correlation of random win values. The two-criteria model "mathematical expectation of gain - standard deviation" is formalized by translating the score of gain into a constraint. An element of scientific novelty is the development of an analytical solution method for the emerging quadratic programming problem, illustrating the investment process using real statistics.

Keywords*: risk management, optimality principle, two-criteria approach, mathematical expectation, standard deviation, correlation*

About the authors:

GORELIK Victor Alexandrovich – Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Federal Research Center "Informatics and Management" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, FGBOU VO "Moscow Pedagogical State University", Moscow, e-mail: vgor16@mail.ru.

Zolotova Tat'jana Valer'janovna – Associated professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Data Analysis and Machine Learning, FSOBU VO "Financial University under the Government of the Russian Federation", Moscow, e-mail: tgold11@mail.ru.