МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.95, 532.5

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ РЕШЕНИЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 18.02.2022, после переработки 20.03.2022.

Квазигидродинамическая (КГД) система была предложена автором в 1993 году. Она имеет глубокие связи с классическими системами Навье–Стокса и Эйлера. В настоящей работе сформулирован и доказан принцип суперпозиции решений для нелинейной квазигидродинамической системы. С помощью данного подхода найдены точные решения, общие для систем Навье–Стокса и КГД. Некоторые из этих решений для квазигидродинамической системы построены впервые.

Ключевые слова: система Навье–Стокса, квазигидродинамическая система, точные решения, принцип суперпозиции.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 60–73.
https://doi.org/10.26456/vtpmk638

Введение

Научное направление, связанное с построением точных решений системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости представлено в [1–6]. В [7] автором предложена альтернативная математическая модель, получившая название квазигидродинамической (КГД). Физические принципы, на основе которых эта модель построена, изложены в [8]. Она имеет глубокие связи с классическими системами Навье–Стокса и Эйлера. Анализ точных решений КГД системы для слабосжимаемой вязкой жидкости продолжен в монографии [9], а также в статьях [10–15]. Течения, представляющие собой суперпозицию (композицию) двух других течений, изучались в [10, 13–15]. Интерес к решениям системы Навье–Стокса, допускающим сложение скоростей, также проявлялся в последнее время [16].

В настоящей работе сформулирован и доказан принцип суперпозиции решений для нелинейной квазигидродинамической системы. С помощью данного подхода построены точные решения, общие для систем Навье–Стокса и КГД. Некоторые из этих решений для квазигидродинамической системы построены впервые.

1. Квазигидродинамическая система и система Навье–Стокса

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних сил в стандартных обозначениях может быть представлена в виде

$$\text{div } \vec{u} = \text{div } \vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \big((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla\big)\vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u} + \nu \nabla\big(\text{div } \vec{u}\big) + \text{div } (\vec{u} \otimes \vec{w}). \tag{1.2}$$

Вектор $\vec{w}$ вычисляется по формуле

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p\big). \tag{1.3}$$

Греческой буквой ν обозначен коэффициент кинематической вязкости жидкости, постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Символом Δ обозначен оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, действующий на векторное поле. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2},$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Параметры ν и τ являются положительными константами.

Если в (1.1) – (1.2) пренебречь членами, содержащими τ, то получим классическую систему Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости:

$$\text{div } \vec{u} = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u}. \tag{1.5}$$

2. Принцип суперпозиции решений

Пусть Ω – область в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$. Будем рассматривать гладкие решения $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},\ t) \in \mathbf{C}^\infty(\Omega)$, $p = p(\vec{x},\ t) \in C^\infty(\Omega)$ систем Навье–Стокса и КГД. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $p = p(\vec{x}, t)$ – гладкое решение системы Навье–Стокса*

$$div\ \vec{u} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u}, \tag{2.2}$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u}\right) + \left(\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u}\right) \cdot \nabla\right)\vec{u} = 0. \tag{2.3}$$

Тогда пара $(\vec{u}, p)$ является точным решением квазигидродинамической системы (1.1) – (1.2).

Доказательство. Доказательство теоремы 1 приведено в [9] на стр. 97–98. □

По формуле

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

определим вихрь векторного поля $\vec{u}$. Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты правой декартовой системы координат $oxyz$.

Теорема 2 (Принцип суперпозиции)**.** *Пусть* $\big(\vec{u}^{(1)}, p^{(1)}\big)$ *и* $\big(\vec{u}^{(2)}, p^{(2)}\big)$ *– два гладких решения переопределенной системы* (2.1) – (2.3), *и существует такая функция* $\varPhi = \varPhi(\vec{x}, t)$, *что выполнены условия*

$$\big[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)}\big] + \big[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(1)}\big] = \nabla\varPhi, \tag{2.5}$$

$$\big(\vec{u}^{(1)} \cdot \nabla\big)\Big(\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(2)}\Big) + \Big(\Big(\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(2)}\Big) \cdot \nabla\Big)\vec{u}^{(1)} +$$

$$+ \big(\vec{u}^{(2)} \cdot \nabla\big)\Big(\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(1)}\Big) + \Big(\Big(\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(1)}\Big) \cdot \nabla\Big)\vec{u}^{(2)} = 0. \tag{2.6}$$

Тогда пара $(\vec{u}, p)$, *где*

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}, \tag{2.7}$$

$$p = p^{(1)} + p^{(2)} - \big(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{u}^{(2)}\big) + \varPhi, \tag{2.8}$$

является точным решением как системы Навье–Стокса (1.4) – (1.5), *так и квазигидродинамической системы* (1.1) – (1.2).

Доказательство. Если $\mathrm{div}\ \vec{u}^{(1)} = 0$ и $\mathrm{div}\ \vec{u}^{(2)} = 0$, то

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big) = 0, \tag{2.9}$$

и уравнение (2.1) выполняется. Запишем (2.2) в форме Громеки–Лэмба

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + p\Big) = \big[\vec{u} \times \vec{\omega}\big] + \nu\Delta\vec{u}. \tag{2.10}$$

Поскольку пары $\big(\vec{u}^{(1)}, p^{(1)}\big)$ и $\big(\vec{u}^{(2)}, p^{(2)}\big)$ удовлетворяют уравнению (2.10), справедливы равенства

$$\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\big(\vec{u}^{(1)}\big)^2}{2} + p^{(1)}\Big) = \big[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(1)}\big] + \nu\Delta\vec{u}^{(1)}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\big(\vec{u}^{(2)}\big)^2}{2} + p^{(2)}\Big) = \big[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(2)}\big] + \nu\Delta\vec{u}^{(2)}. \tag{2.12}$$

Складывая (2.11) и (2.12), будем иметь

$$\frac{\partial\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big)}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\big(\vec{u}^{(1)}\big)^2}{2} + \frac{\big(\vec{u}^{(2)}\big)^2}{2} + p^{(1)} + p^{(2)}\Big) =$$

$$= \big[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(1)}\big] + \big[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(2)}\big] + \nu\Delta\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big). \tag{2.13}$$

В силу свойств векторного произведения

$$\big[\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big) \times \big(\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}\big)\big] = \big[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(1)}\big] + \big[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(2)}\big] + \\ + \big[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)}\big] + \big[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(1)}\big]. \tag{2.14}$$

Принимая во внимание (2.5), преобразуем (2.14) к виду

$$\big[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(1)}\big] + \big[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(2)}\big] = \big[\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big) \times \big(\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}\big)\big] - \nabla\varPhi. \tag{2.15}$$

Подстановка (2.15) в (2.13) дает

$$\frac{\partial\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big)}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\big(\vec{u}^{(1)}\big)^2}{2} + \frac{\big(\vec{u}^{(2)}\big)^2}{2} + p^{(1)} + p^{(2)} + \varPhi\Big) = \\ = \big[\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big) \times \big(\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}\big)\big] + \nu\Delta\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big). \tag{2.16}$$

Эквивалентная запись (2.16) такова

$$\frac{\partial\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big)}{\partial t} + \nabla\Big(\frac{\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big)^2}{2} + p^{(1)} + p^{(2)} - \big(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{u}^{(2)}\big) + \varPhi\Big) = \\ = \big[\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big) \times \big(\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}\big)\big] + \nu\Delta\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big). \tag{2.17}$$

Уравнение (2.2) также удовлетворяется, поскольку в силу (2.7), (2.8) равенство (2.17) может быть представлено в виде (2.10).

По условиям теоремы справедливы равенства

$$\big(\vec{u}^{(1)} \cdot \nabla\big)\bigg(\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(1)}\bigg) + \bigg(\bigg(\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(1)}\bigg) \cdot \nabla\bigg)\vec{u}^{(1)} = 0, \tag{2.18}$$

$$\big(\vec{u}^{(2)} \cdot \nabla\big)\bigg(\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(2)}\bigg) + \bigg(\bigg(\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(2)}\bigg) \cdot \nabla\bigg)\vec{u}^{(2)} = 0. \tag{2.19}$$

Следствием (2.18), (2.19) и (2.6) является соотношение

$$\big(\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big) \cdot \nabla\big)\bigg(\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(1)} + \frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(2)}\bigg) + \\ + \bigg(\bigg(\frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(1)} + \frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(2)}\bigg) \cdot \nabla\bigg)\big(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}\big) = 0, \tag{2.20}$$

которое может быть представлено в виде (2.3). По теореме 1 пара $(\vec{u}, p)$ является общим точным решением систем Навье–Стокса и КГД. □

3. Иллюстрирующие примеры

Пример 1. В качестве полей $\vec{u}^{(1)}$ и $p^{(1)}$ возьмем точное решение системы Навье-Стокса, отвечающее стационарному симметричному относительно оси oz течению Пуазейля–Куэтта:

$$\vec{u}^{(1)} = \Big(\frac{A}{4\nu}\big(x^2 + y^2\big) + B\ln\sqrt{x^2 + y^2} + C\Big)\vec{k}, \tag{3.1}$$

$$p^{(1)} = Az + p_0^{(1)}. \tag{3.2}$$

Здесь A, B, C и $p_0^{(1)}$ – заданные вещественные числа, причем $A < 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что для векторного поля $\vec{u} = \vec{u}^{(1)}$ условие (2.3) выполняется.

Второе стационарное решение $\left(\vec{u}^{(2)}, p^{(2)}\right)$ системы Навье–Стокса выберем в виде

$$\vec{u}^{(2)} = -\Big(\frac{\omega_0 y}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\omega_0 x}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\vec{j}, \tag{3.3}$$

$$p^{(2)} = \frac{\omega_0^2}{8}\big(x^2+y^2\big) + \frac{\omega_0\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2\big(x^2+y^2\big)} + p_0^{(2)}. \tag{3.4}$$

Здесь ω_0, Γ и $p_0^{(2)}$ – постоянные величины. Поскольку $\Delta\vec{u}^{(2)} = 0$, для векторного поля $\vec{u} = \vec{u}^{(2)}$ условие (2.3) также выполняется.

По формуле (2.4) находим

$$\vec{\omega}^{(1)} = \operatorname{rot}\,\vec{u}^{(1)} = \Big(\frac{Ay}{2\nu} + \frac{By}{x^2+y^2}\Big)\vec{i} - \Big(\frac{Ax}{2\nu} + \frac{Bx}{x^2+y^2}\Big)\vec{j}, \tag{3.5}$$

$$\vec{\omega}^{(2)} = \operatorname{rot}\,\vec{u}^{(2)} = \omega_0\vec{k}. \tag{3.6}$$

Принимая во внимание (3.1), (3.3), (3.5) и (3.6), будем иметь

$$\big[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)}\big] = \omega_0\Big(\frac{A}{4\nu}\big(x^2+y^2\big) + B\ln\sqrt{x^2+y^2} + C\Big)\big[\vec{k}\times\vec{k}\big] = 0, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\big[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(1)}\big] = &-\Big(\frac{\omega_0 y}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\Big)\Big(\frac{Ay}{2\nu} + \frac{By}{x^2+y^2}\Big)\big[\vec{i}\times\vec{i}\big] - \\ &-\Big(\frac{\omega_0 x}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\Big(\frac{Ax}{2\nu} + \frac{Bx}{x^2+y^2}\Big)\big[\vec{j}\times\vec{j}\big] + \\ &+\Big(\frac{\omega_0 y}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\Big)\Big(\frac{Ax}{2\nu} + \frac{Bx}{x^2+y^2}\Big)\big[\vec{i}\times\vec{j}\big] + \\ &+\Big(\frac{\omega_0 x}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\Big(\frac{Ay}{2\nu} + \frac{By}{x^2+y^2}\Big)\big[\vec{j}\times\vec{i}\big] = 0.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь учтено, что

$$\big[\vec{i}\times\vec{i}\big] = \big[\vec{j}\times\vec{j}\big] = 0, \qquad \big[\vec{i}\times\vec{j}\big] = -\big[\vec{j}\times\vec{i}\big].$$

Таким образом,

$$\big[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)}\big] + \big[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(1)}\big] = 0, \tag{3.9}$$

и условие (2.5) выполняется с функцией $\varPhi = 0$. Осталось проверить условие (2.6), которое для векторных полей (3.1) и (3.3) принимает вид

$$\big(\vec{u}^{(2)}\cdot\nabla\big)\Big(\frac{A\vec{k}}{\nu}\Big) + \frac{A}{\nu}\frac{\partial\vec{u}^{(2)}}{\partial z} = 0. \tag{3.10}$$

Равенство (3.10) выполняется, так как частные производные постоянного вектора равны нулю, а поле $\vec{u}^{(2)}$ не зависит от z.

Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены. Согласно принципу суперпозиции, набор функций

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)} = -\Big(\frac{\omega_0 y}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\omega_0 x}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\Big)\vec{j} +$$

$$+\Big(\frac{A}{4\nu}\big(x^2+y^2\big) + B\ln\sqrt{x^2+y^2} + C\Big)\vec{k}, \tag{3.11}$$

$$p = p^{(1)} + p^{(2)} - \big(\vec{u}^{(1)}\cdot\vec{u}^{(2)}\big) + \Phi =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{8}\big(x^2+y^2\big) + \frac{\omega_0\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2\big(x^2+y^2\big)} + Az + p_0 \tag{3.12}$$

задает точное решение, общее для стационарных систем Навье–Стокса и КГД. Здесь $p_0 = p_0^{(1)} + p_0^{(2)}$ – произвольная постоянная. Это решение системы КГД впервые было построено другим способом в [10].

Пример 2. Решение $\big(\vec{u}^{(1)}, p^{(1)}\big)$ выберем таким же, как и в предыдущем примере. В качестве $\big(\vec{u}^{(2)}, p^{(2)}\big)$ возьмем общее вихревое решение систем Навье–Стокса и КГД, построенное в [14] на стр. 9–10:

$$\vec{u}^{(2)} = -\frac{Dy}{2\nu(t_0+t)^2}e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}}\vec{i} + \frac{Dx}{2\nu(t_0+t)^2}e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}}\vec{j}. \tag{3.13}$$

$$p^{(2)} = -\frac{D^2}{4\nu(t_0+t)^3}e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2\nu(t_0+t)}} + p_0^{(2)}(t). \tag{3.14}$$

Здесь D и t_0 – заданные положительные константы, $p_0^{(2)}(t)$ – произвольная функция времени, определенная при $t \geqslant 0$. Поскольку

$$\frac{\partial\vec{u}^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(2)} = 0, \tag{3.15}$$

для векторного поля $\vec{u} = \vec{u}^{(2)}$ условие (2.3) выполняется. С помощью (2.4) находим

$$\vec{\omega}^{(1)} = \mathrm{rot}\ \vec{u}^{(1)} = \Big(\frac{Ay}{2\nu} + \frac{By}{x^2+y^2}\Big)\vec{i} - \Big(\frac{Ax}{2\nu} + \frac{Bx}{x^2+y^2}\Big)\vec{j}, \tag{3.16}$$

$$\vec{\omega}^{(2)} = \mathrm{rot}\ \vec{u}^{(2)} = \frac{D}{\nu(t_0+t)^2}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}}\vec{k}. \tag{3.17}$$

Имеем

$$\big[\vec{u}^{(1)}\times\vec{\omega}^{(2)}\big] = \Big(\frac{A}{4\nu}\big(x^2+y^2\big) + B\ln\sqrt{x^2+y^2} + C\Big)\times$$

$$\times\frac{D}{\nu(t_0+t)^2}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}}\big[\vec{k}\times\vec{k}\big] = 0, \tag{3.18}$$

$$\left[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(1)}\right] = -\frac{Dy}{2\nu(t_0+t)^2} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}} \left(\frac{Ay}{2\nu} + \frac{By}{x^2+y^2}\right)[\vec{i} \times \vec{i}] -$$

$$-\frac{Dx}{2\nu(t_0+t)^2} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}} \left(\frac{Ax}{2\nu} + \frac{Bx}{x^2+y^2}\right)[\vec{j} \times \vec{j}] +$$

$$+\frac{Dy}{2\nu(t_0+t)^2} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}} \left(\frac{Ax}{2\nu} + \frac{Bx}{x^2+y^2}\right)[\vec{i} \times \vec{j}] +$$

$$+\frac{Dx}{2\nu(t_0+t)^2} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}} \left(\frac{Ay}{2\nu} + \frac{By}{x^2+y^2}\right)[\vec{j} \times \vec{i}] = 0. \tag{3.19}$$

Следовательно,

$$\left[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)}\right] + \left[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(1)}\right] = 0, \tag{3.20}$$

и условие (2.5) выполнено с функцией $\Phi = 0$. В силу (3.15) условие (2.6) принимает вид

$$\left(\vec{u}^{(2)} \cdot \nabla\right)\left(\frac{A\vec{k}}{\nu}\right) + \frac{A}{\nu}\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial z} = 0. \tag{3.21}$$

Оно выполняется, поскольку поле $\vec{u}^{(2)}$ не зависит от z. Частные производные от постоянного вектора также обращаются в нуль. По принципу суперпозиции функции

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)} = -\frac{Dy}{2\nu(t_0+t)^2} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}} \vec{i} + \frac{Dx}{2\nu(t_0+t)^2} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}} \vec{j} +$$

$$+\left(\frac{A}{4\nu}\left(x^2+y^2\right) + B\ln\sqrt{x^2+y^2} + C\right)\vec{k}, \tag{3.22}$$

$$p = p^{(1)} + p^{(2)} - \left(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{u}^{(2)}\right) + \Phi =$$

$$= -\frac{D^2}{4\nu(t_0+t)^3} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2\nu(t_0+t)}} + Az + p_0(t), \tag{3.23}$$

при $t \geqslant 0$ образуют общее точное решение систем Навье–Стокса и КГД. Здесь $p_0(t)$ – произвольная функция времени.

Пример 3. Пусть пара функций $\left(\vec{u}^{(1)}, p^{(1)}\right)$ задает точное решение системы Навье-Стокса, отвечающее плоскому стационарному течению Пуазейля–Куэтта:

$$\vec{u}^{(1)} = \left(\frac{A}{2\nu}x^2 + Bx + C\right)\vec{k}. \tag{3.24}$$

$$p^{(1)} = Az + p_0^{(1)}. \tag{3.25}$$

Здесь A, B, C и $p_0^{(1)}$ – заданные вещественные числа, причем $A < 0$. Для векторного поля $\vec{u} = \vec{u}^{(1)}$ условие (2.3) выполняется. В качестве $\big(\vec{u}^{(2)}, p^{(2)}\big)$ выберем общее решение систем Навье–Стокса и КГД вида

$$\vec{u}^{(2)} = \frac{D}{2\sqrt{\pi\nu(t+t_0)}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4\nu(t+t_0)}\Big)\vec{j}, \tag{3.26}$$

$$p^{(2)} = p_0^{(2)}(t). \tag{3.27}$$

Символами D и t_0 обозначены заданные положительные постоянные, $p_0^{(2)}(t)$ – произвольная функция времени, определенная при $t \geqslant 0$. Так как

$$\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u}^{(2)} = 0, \tag{3.28}$$

для векторного поля $\vec{u} = \vec{u}^{(2)}$ условие (2.3) выполняется. С помощью (2.4) определяем

$$\vec{\omega}^{(1)} = \mathrm{rot}\ \vec{u}^{(1)} = -\Big(\frac{Ax}{\nu} + B\Big)\vec{j}, \tag{3.29}$$

$$\vec{\omega}^{(2)} = \mathrm{rot}\ \vec{u}^{(2)} = -\frac{Dx}{4\sqrt{\pi}(\nu(t+t_0))^{3/2}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4\nu(t+t_0)}\Big)\vec{k}. \tag{3.30}$$

Вычисления дают

$$\begin{gathered}\big[\vec{u}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)}\big] + \big[\vec{u}^{(2)} \times \vec{\omega}^{(1)}\big] = \\ = -\Big(\frac{A}{2\nu}x^2 + Bx + C\Big)\frac{Dx}{4\sqrt{\pi}(\nu(t+t_0))^{3/2}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4\nu(t+t_0)}\Big)\big[\vec{k} \times \vec{k}\big] - \\ -\frac{D}{2\sqrt{\pi\nu(t+t_0)}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4\nu(t+t_0)}\Big)\Big(\frac{Ax}{\nu} + B\Big)\big[\vec{j} \times \vec{j}\big] = 0.\end{gathered} \tag{3.31}$$

Условие (2.5) выполннено с функцией $\varPhi = 0$. Условие (2.6) принимает вид

$$\Big(u_y^{(2)}\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(\frac{A\vec{k}}{\nu}\Big) + \frac{A}{\nu}\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial z} = 0.$$

Оно также выполняется. Согласно принципу суперпозиции, функции

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)} = \frac{D}{2\sqrt{\pi\nu(t+t_0)}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4\nu(t+t_0)}\Big)\vec{j} +$$

$$+\Big(\frac{A}{2\nu}x^2 + Bx + C\Big)\vec{k},$$

$$p = p^{(1)} + p^{(2)} - \big(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{u}^{(2)}\big) + \varPhi = Az + p_0(t),$$

при $t \geqslant 0$ задают общее точное решение систем Навье–Стокса и КГД. Здесь $p_0(t)$ – произвольная функция времени.

Заметим, что нестационарные решения из примеров 2 и 3 для квазигидродинамической системы построены впервые.

Заключение

Нетрудно показать, что принцип суперпозиции справедлив для установившихся потенциальных течений жидкости. Кроме того, он выполняется для двух нестационарных однородно-винтовых решений $\left(\vec{u}^{(1)}, p^{(1)}\right)$ и $\left(\vec{u}^{(2)}, p^{(2)}\right)$ квазигидродинамической системы, подчиняющихся условиям

$$\vec{\omega}^{(1)} = \lambda \vec{u}^{(1)}, \qquad \vec{\omega}^{(2)} = \lambda \vec{u}^{(2)},$$

с одинаковым значением $\lambda \neq 0$. Для системы Навье–Стокса эти факты были давно известны. Регуляризованные уравнения гидродинамики квазигидродинамического типа широко используются для построения численных методов. Некоторые последние результаты представлены в [17–22].

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[3] Riley N., Drazin P.G. The Navier-Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.

[4] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.

[5] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.

[6] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

[7] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[8] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[9] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[10] Шеретов Ю.В. О общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5–15.

[11] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье-Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13–25. https://doi.org/10.26456/vtpmk176

[12] Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 84–96. https://doi.org/10.26456/vtpmk557

[13] Шеретов Ю.В. О классах точных решений квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 5–17. https://doi.org/10.26456/vtpmk592

[14] Шеретов Ю.В. О построении точных решений двумерной квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. С. 5–20. https://doi.org/10.26456/vtpmk605

[15] Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих системам Навье–Стокса и Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. Т. 2. С. 5–15. https://doi.org/10.26456/vtpmk611

[16] Хорин А.Н. Семейство точных решений уравнений Навье-Стокса для верификации компьютерных программ // Труды МФТИ. 2020. Т. 12, № 4. С. 80–89.

[17] Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. ID 066. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66

[18] Balashov V.A., Zlotnik A.A. An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // Journal of Computational Dynamics. 2020. Vol. 7, № 2. Pp. 291–312. https://doi.org/10.3934/jcd.2020012

[19] Balashov V.A. Dissipative spatial discretization of a phase field model of multiphase multicomponent isothermal fluid flow // Computers and Mathematics with Applications. 2021. Vol. 90, № 112. ID 124. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.013

[20] Злотник А.А., Федченко А.С. Свойства агрегированной квазигидродинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью. 2021. 26 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-77

[21] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Регуляризованная модель типа фазового поля для описания динамики системы «жидкость-твердое тело» с учетом химических реакций. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. 20 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-82

[22] Kraposhin M.V., Ryazanov D.A. Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // Computer Physics Communications. 2022. Vol. 271, № 1. ID 108216. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. Принцип суперпозиции решений квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 60–73. https://doi.org/10.26456/vtpmk638

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

SUPERPOSITION PRINCIPLE FOR SOLUTIONS OF QUASI-HYDRODYNAMIC SYSTEM

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis Department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 18.02.2022, revised 20.03.2022.

The quasi-hydrodynamic (QHD) system was proposed by the author in 1993. It has deep connections with classical Navier–Stokes and Euler systems. In this paper the principle of superposition of solutions for nonlinear quasi–hydrodynamic system is formulated and proved. Using this approach, exact solutions are found that are common for the Navier–Stokes and QHD systems. Some of these solutions for the quasi–hydrodynamic system are constructed for the first time.

Keywords: Navier–Stokes system, quasi–hydrodynamic system, exact solutions, superposition principle.

Citation

Sheretov Yu.V., “Superposition principle for solutions of quasi-hydrodynamic system”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 2, 60–73 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk638

References

[1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[2] Landau L.D., Lifshits E.M., *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 736 pp.

[3] Riley N., Drazin P.G., *The Navier-Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 pp.

[4] Shmyglevskij Yu.D., *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti [Analytical Investigations of Gas and Fluid Dynamics]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 1999 (in Russian), 232 pp.

[5] Pukhnachev V.V., “Symmetries in the Navier-Stokes equations”, *Uspekhi mekhaniki [Achievements in Mechanics]*, 2006, № 1, 6–76 (in Russian).

[6] Wang C.Y., “Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations”, *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.

[7] Sheretov Yu.V., "On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).

[8] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[9] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[10] Sheretov Yu.V., "On the common exact solutions of stationary Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems, not satisfying to Euler equations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 2, 5–15 (in Russian).

[11] Sheretov Yu.V., "On common exact solutions of Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems for nonstationary flows", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 13–25 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk176.

[12] Sheretov Yu.V., "On the solutions of Cauchy problem for quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 1, 84–96 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk557.

[13] Sheretov Yu.V., "On classes of exact solutions of quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 5–17 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk592.

[14] Sheretov Yu.V., "On the construction of exact solutions of two-dimensional quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 1, 5–20 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk605.

[15] Grigoreva V.V., Sheretov Yu.V., "On exact solutions of quasi-hydrodynamic system that don't satisfy the Navier-Stokes and Euler systems", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, **2** (2021), 5–15 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk611.

[16] Khorin A.N., "A family of exact solutions of the Navier-Stokes equations for verification of computer programs", *Trudy MFTI [Works of MIPT]*, **12**:4 (2020), 80–89 (in Russian).

[17] Stenina T.V., Elizarova T.G., Kraposhin M.V., "Regularized equations for disk pump simulation problems in OpenFOAM implementation", *Keldysh Institute preprints*, 2020, 066 (in Russian), 30 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66.

[18] Balashov V.A., Zlotnik A.A., "An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal

Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations”, *Journal of Computational Dynamics*, **7**:2 (2020), 291–312, https://doi.org/10.3934/jcd.2020012.

[19] Balashov V.A., “Dissipative spatial discretization of a phase field model of multiphase multicomponent isothermal fluid flow”, *Computers and Mathematics with Applications*, **90**:112 (2021), 124, https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.013.

[20] Zlotnik A.A., Fedchenko A.S., *Properties of an aggregated quasi-hydrodynamic system of equations of a homogeneous gas mixture with a common regularizing velocity*, 2021 (in Russian), 26 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2021-77.

[21] Balashov V.A., Savenkov E.B., *Regularized phase-field model for description of dynamics of "solid-fluid" system taking into account chemical reactions*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2020 (in Russian), 29 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2021-82.

[22] Kraposhin M.V., Ryazanov D.A. Elizarova T.G., “Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM”, *Computer Physics Communications*, **271**:1 (2022), 108216, https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216.