УДК 513.88

ПРОЕКЦИОННЫЕ КОНСТАНТЫ ПРОСТРАНСТВА L_{∞}^{3M}

Мартынов О.М.
Военная академия воздушно-космической обороны имени Маршала Советского Союза Г.К. Жукова, г. Тверь

Поступила в редакцию 31.05.2022, после переработки 20.10.2022.

В работе рассматриваются минимальные проекции пространства l_{∞}^{3m} на некоторые подпространства коразмерности m. Для них найдены относительные проекционные константы, а в случае минимальной проекции с единичной нормой найдено максимальное значение константы сильной единственности. Найденные проекционные константы могут найти применение в вычислительной математике, в частности, для оценки сходимости проекционных методов.

Ключевые слова: пространство, подпространство, оператор проектирования (проекция), относительная проекционная константа, константа сильной единственности.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 76–90.
https://doi.org/10.26456/vtpmk642

Введение

Вычисление проекционных констант является одной из задач прикладного функционального анализа. Актуальность этой проблемы и применение полученных результатов рассматриваются в работах [2, 12, 17, 18, 20, 22]. Рассмотрим эти аспекты более подробно.

Большой интерес к задачам этой тематики обусловлен тем, что операторы проектирования (ограниченные идемпотентные операторы) дают приближение того же порядка, что и наилучшее, и, следовательно, находят применение в вычислительной математике. Известно, что для приближенных решений линейных и нелинейных операторных уравнений широко применяются проекционные методы. Для оценки сходимости этих методов (например, метода Галеркина – Петрова) зачастую удобно было бы использовать абсолютные проекционные константы $\lambda(k, n)$, $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, точные значения которых для $k \leqslant n-2$ пока неизвестны. Поэтому даже их оценки (с помощью относительных проекционных констант) очень важны, и, именно это, делает проблему нахождения относительных проекционных констант актуальной.

В монографии Одинца [17] показана связь проблемы единственности минимальных проекций в банаховых пространствах с проблемой единственности в математическом программировании. В конечномерных симметричных пространствах проблема единственности минимальной проекции по сути является некоторой задачей математического программирования.

Связь функционального анализа с математическим программированием хорошо известна. В основном методы функционального анализа применяются для решения той или иной задачи математического программирования. В [17] методы математического программирования (в частности, симплекс-метод) применены для решения задачи функционального анализа – проблемы единственности минимальной проекции в конечномерном симметричном пространстве. Здесь же приведен пример, который демонстрирует связь теории матричных игр с проблемой единственности минимальных проекций.

Существуют два основных применения констант сильной единственности: 1. Оценка погрешности алгоритма Ремеза; 2. Непрерывность по Липшицу оператора наилучшего приближения в x_0 (если существует сильно единственный элемент наилучшего приближения к x_0). Оценка погрешности алгоритма Ремеза основана на итерационном процессе нахождения константы k из (1.2). Сначала этот алгоритм использовался для приближения по Чебышеву. Сегодня он используется для проектирования фильтров при цифровой обработке сигналов. В настоящее время в численных методах приближения по Чебышеву константы сильной единственности используются совместно с метрической проекцией непрерывной по Липшицу [20].

Пусть Y – замкнутое подпространство банахова пространства X.

Определение 1. *Линейный ограниченный оператор $\pi : X \to Y$ называется оператором проектирования (проекцией) пространства X на Y, если $\pi y = y$ для любого $y \in Y$.*

Множество всех операторов проектирования пространства X на подпространство Y будем обозначать через $\pi(X, Y)$.

Определение 2. *Относительной проекционной константой подпространства Y в пространстве X называется число $\lambda(Y, X) = \inf\big\{\|\pi\|, \pi \in \pi(X, Y)\big\}$.*

Среди операторов проектирования особый интерес представляют те, для которых выполняется равенство $\|\pi\| = \lambda(Y, X)$. Такие проекции, если они существуют, называются *минимальными.*

Множество минимальных проекций из X на Y будем обозначать $\Delta(X, Y)$.

Определение 3. *Если множество $\Delta(X, Y)$ состоит ровно из одного элемента, то говорят, что пара (X, Y) обладает свойством единственности или, что минимальная проекция π является единственной.*

Условия единственности для некоторых минимальных проекций в пространствах l_∞^n и l_1^n можно найти, например, в [1, 3, 7, 19, 22].

Пусть Y_{2m} есть $2m$ – мерное подпространство пространства $X = l_\infty^{3m}$, $3m$-мерного линейного нормированного пространства элементов $x = \big(x_i\big)_1^{3m}$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3m} \big|x_i\big|.$$

Предложение 1. [1] *Любой оператор проектирования* $\pi : l_\infty^{3m} \to Y_{2m}$ *имеет вид* π_α, *где*

$$\pi_\alpha x = x - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x),$$

$\alpha_i = \big(\alpha_{ij}\big)_{j=1}^{3m}$ – *элементы пространства* l_∞^{3m}, *а* $f_i = (f_{ij})_{j=1}^{3m} \neq 0$ – *линейные функционалы, определенные в* l_∞^{3m}, *причем*

$$f_i\big(\alpha_j\big) = \sum_{k=1}^{3m} \alpha_{jk} f_{ik} = \delta_{ij} \ (i, j = 1, \ldots, m). \tag{1.1}$$

Гиперплоскости пространства l_∞^{3m} имеют вид

$$f_i^{-1}(0) = \left\{ x \in l_\infty^{3m} \mid f_i(x) = \sum_{k=1}^{3m} f_{ik} x_k = 0 \right\} \ (i = 1, \ldots, m),$$

и в силу линейной независимости функционалов f_i $(i = 1, \ldots, m)$, которая следует из формул (1.1), пространство $Y_{2m} = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(0)$ является подпространством пространства l_∞^{3m} коразмерности m.

Определение 4. *Оператор проектирования* $\pi_0 \in \Delta\big(l_\infty^{3m}, Y_{2m}\big)$ *называется сильно единственным, если для любого* $\pi \in \pi\big(l_\infty^{3m}, Y_{2m}\big)$ *справедливо неравенство*

$$\big\|\pi_0\big\| + k \cdot \big\|\pi - \pi_0\big\| \leqslant \|\pi\|, \tag{1.2}$$

где k *не зависит от* π *и* $k \in (0; 1]$.

Число k называется константой сильной единственности, а через k_0 обозначается максимальное значение k, при котором выполняется неравенство (1.2).

Очевидно, что сильно единственный оператор π_0 имеет минимальную норму и является единственным.

Предложение 2. [1] *Пусть* $\pi \in \pi\big(l_\infty^{3m}, Y_m\big)$, *а* $\pi_0 \in \Delta\big(l_\infty^{3m}, Y_m\big)$. *Нормы операторов* π *и* $\pi - \pi_0$ *вычисляются по формулам*

$$\|\pi\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3m} T_i, \big\|\pi - \pi_0\big\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3m} B_i,$$

где

$$T_i = \sum_{j=1}^{3m} \left| \delta_{ij} - \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki} f_{kj} \right|, B_i = \sum_{j=1}^{3m} \left| \sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_{ki} - \alpha_{ki}^{(0)} \right) f_{kj} \right|,$$

а оператор π_0 *имеет вид* $\pi_\alpha^{(0)}$, *где*

$$\pi_\alpha^{(0)} x = x - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(0)} f_k(x).$$

Относительные проекционные константы гиперплоскостей и подпространств коразмерности больше единицы найдены в работах [1, 3, 5, 7, 9–16].

В работах [2–4, 6–12, 14–16, 21] можно найти решение некоторых проблем, связанных с сильной единственностью операторов проектирования в конечномерных пространствах.

Найдем проекционные константы для операторов проектирования пространства l_∞^{3m} на некоторый класс подпространств коразмерности m.

1. Относительные проекционные константы

Функционалы f_i $(i = 1, \ldots, m)$ зададим следующим образом:

$$f_i = (f_{ij})_{j=1}^{3m}, \text{ где } f_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } j = i; \\ r, \text{ если } j = m+i; \\ s, \text{ если } j = 2m+i; \\ 0, \text{ если } j \neq i, j \neq m+i, j \neq 2m+i. \end{cases} \tag{2.1}$$

где $r > 0$, $s > 0$. В этом случае, если $Y_{2m} = \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(0)$, то для проекций $\pi_\alpha \in \pi\big(l_\infty^{3m}, Y_{2m}\big)$ соотношения (1.1) примут вид

$$f_i\big(\alpha_j\big) = \alpha_{ji} + r\alpha_{j\,m+i} + s\alpha_{j\,2m+i} = \delta_{ij} \ (i, j = 1, \ldots, m). \tag{2.2}$$

Теорема 1. *Пусть $\pi_\alpha^{(0)}$ – минимальный оператор проектирования пространства l_∞^{3m} на подпространство Y_{2m}, определяемое функционалами (2.1). Тогда*

$$(1)\ \lambda\big(Y_{2m}, l_\infty^{3m}\big) = \big\|\pi_\alpha^{(0)}\big\| = 1, \text{ если } 0 < r+s \leqslant 1;$$

$$(2)\ \lambda\big(Y_{2m}, l_\infty^{3m}\big) = \big\|\pi_\alpha^{(0)}\big\| = \frac{4rs}{\big(1-(s-r)^2\big)(1-r-s)+4rs},$$

если $r+s > 1$ *и* $|r-s| < 1$.

Доказательство. Найдем значения $T_i^{(0)}$ $(i = 1, \ldots, 3m)$. Имеем

$$T_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{3m}\left|\delta_{ij} - \sum_{k=1}^m \alpha_{ki}^{(0)} f_{kj}\right| = \big|1-\alpha_{ii}^{(0)}\big| + \sum_{k=1,\,k\neq i}^m \big|\alpha_{ki}^{(0)}\big| + (r+s)\sum_{k=1}^m \big|\alpha_{ki}^{(0)}\big|,$$

$$T_{m+i}^{(0)} = \sum_{j=1}^{3m}\left|\delta_{m+i\,j} - \sum_{k=1}^m \alpha_{k\,m+i}^{(0)} f_{kj}\right| = \big|1-r\alpha_{i\,m+i}^{(0)}\big| + r\sum_{k=1,\,k\neq i}^m \big|\alpha_{k\,m+i}^{(0)}\big|$$

$$+(1+s)\sum_{k=1}^m \big|\alpha_{k\,m+i}^{(0)}\big|,\ \ T_{2m+i}^{(0)} = \sum_{j=1}^{3m}\left|\delta_{2m+i\,j} - \sum_{k=1}^m \alpha_{k\,2m+i}^{(0)} f_{kj}\right| = \big|1-s\alpha_{i\,2m+i}^{(0)}\big|$$

$$+s\sum_{k=1,\,k\neq i}^m \big|\alpha_{k\,2m+i}^{(0)}\big| + (1+r)\sum_{k=1}^m \big|\alpha_{k\,2m+i}^{(0)}\big|,$$

где $i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим два случая.

(1) $0 < r+s \leqslant 1$. В равенствах, полученных для T_i $(i=1,\dots,3m)$, положим $\alpha_{ii}^{(0)} = 1$ $(i=1,\dots,m)$, все остальные α_{ij} пусть будут равны нулю. При этом условия (2.2) выполняются. Тогда $T_i^{(0)} = r+s \leqslant 1$, $T_{m+i}^{(0)} = T_{2m+i}^{(0)} = 1$ $(i=1,\dots,m)$.

Следовательно,

$$\lambda\big(Y_{2m}, l_\infty^{3m}\big) = \big\|\pi_\alpha^{(0)}\big\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 3m} T_i^{(0)} = 1.$$

(2) $r+s>1$ и $|r-s|<1$. Очевидно, что $\big\|\pi_\alpha^{(0)}\big\| \geqslant T_i^{(0)}$ $(i=1,\dots,3m)$. Оценим выражения для $T_i^{(0)}$ $(i=1,\dots,3m)$ снизу. Для этого воспользуемся тем, что $|x-y| \geqslant |x|-|y|$ и очевидными неравенствами $|\alpha_{ij}^{(0)}| \geqslant 0$. Также из условий (2.2) следует, что $\alpha_{ii}^{(0)} = 1 - r\alpha_{i\,m+i}^{(0)} - s\alpha_{i\,2m+i}^{(0)}$. Тогда

$$\big\|\pi_\alpha^{(0)}\big\| \geqslant T_i^{(0)} \geqslant \big|1-\alpha_{ii}^{(0)}\big| + (r+s)\big|\alpha_{ii}^{(0)}\big| = \big|r\alpha_{i\,m+i}^{(0)} + s\alpha_{i\,2m+i}^{(0)}\big|$$

$$+(r+s)\big|1-\big(r\alpha_{i\,m+i}^{(0)} + s\alpha_{i\,2m+i}^{(0)}\big)\big| \geqslant r+s+(1-r-s)\big|r\alpha_{i\,m+i}^{(0)} + s\alpha_{i\,2m+i}^{(0)}\big|.$$

Аналогично получим

$$\big\|\pi_\alpha^{(0)}\big\| \geqslant T_{m+i}^{(0)} \geqslant \big|1-r\alpha_{i\,m+i}^{(0)}\big| + (1+s)\big|\alpha_{i\,m+i}^{(0)}\big| \geqslant 1+(1-r+s)\big|\alpha_{i\,m+i}^{(0)}\big|,$$

$$\big\|\pi_\alpha^{(0)}\big\| \geqslant T_{2m+i}^{(0)} \geqslant \big|1-s\alpha_{i\,2m+i}^{(0)}\big| + (1+r)\big|\alpha_{i\,2m+i}^{(0)}\big| \geqslant 1+(1+r-s)\big|\alpha_{i\,2m+i}^{(0)}\big|,$$

где $i=1,\dots,m$.

Далее достаточно рассматривать неравенства только для $i=1$. Остальные оценки будут такими же. Имеем

$$\big\|\pi_\alpha^{(0)}\big\| \geqslant T_1^{(0)} \geqslant r+s+(1-r-s)\big|r\alpha_{1\,m+1}^{(0)} + s\alpha_{1\,2m+1}^{(0)}\big|.$$

Неравенства для $T_{m+1}^{(0)}$ и $T_{2m+1}^{(0)}$ умножим на $\frac{r(r+s-1)}{1-r+s}$ и $\frac{s(r+s-1)}{1+r-s}$ соответственно. Обе дроби являются положительными величинами в силу условий $r>0, s>0, r+s>1$ и $|r-s|<1$. Получим

$$\frac{r(r+s-1)}{1-r+s}\big\|\pi_\alpha^{(0)}\big\| \geqslant \frac{r(r+s-1)}{1-r+s}T_{m+1}^{(0)} \geqslant \frac{r(r+s-1)}{1-r+s} + r(r+s-1)\big|\alpha_{1\,m+1}^{(0)}\big|,$$

$$\frac{s(r+s-1)}{1+r-s}\big\|\pi_\alpha^{(0)}\big\| \geqslant \frac{s(r+s-1)}{1+r-s}T_{2m+1}^{(0)} \geqslant \frac{s(r+s-1)}{1+r-s} + s(r+s-1)\big|\alpha_{1\,2m+1}^{(0)}\big|.$$

Сложим полученные три неравенства

$$\left(1+\frac{r(r+s-1)}{1-r+s}+\frac{s(r+s-1)}{1+r-s}\right)\big\|\pi_\alpha^{(0)}\big\| \geqslant r+s+\frac{r(r+s-1)}{1-r+s}+\frac{s(r+s-1)}{1+r-s}$$

$$+(1-r-s)\big|r\alpha_{1\,m+1}^{(0)} + s\alpha_{1\,2m+1}^{(0)}\big| + (r+s-1)\big(r\big|\alpha_{1\,m+1}^{(0)}\big| + s\big|\alpha_{1\,2m+1}^{(0)}\big|\big) \geqslant r+s$$

$$+\frac{\big(r+s+(s-r)^2\big)(r+s-1)}{1+(s-r)^2} + (1-r-s)\big|r\alpha_{1\,m+1}^{(0)} + s\alpha_{1\,2m+1}^{(0)}\big|$$

$$+(r+s-1)\big|r\alpha^{(0)}_{1\,m+1}+s\alpha^{(0)}_{1\,2m+1}\big| = r+s+\frac{\big(r+s+(s-r)^2\big)(r+s-1)}{1+(s-r)^2}.$$

Таким образом,

$$\left(1+\frac{\big(r+s+(s-r)^2\big)(r+s-1)}{1+(s-r)^2}\right)\big\|\pi^{(0)}_{\alpha}\big\| \geqslant r+s+\frac{\big(r+s+(s-r)^2\big)(r+s-1)}{1+(s-r)^2}.$$

Следовательно,

$$\lambda\big(Y_{2m}, l^{3m}_{\infty}\big) = \big\|\pi^{(0)}_{\alpha}\big\| \geqslant 1+\frac{(s+r-1)\big(1-(s-r)^2\big)}{1-(s-r)^2+\big(r+s+(s-r)^2\big)(r+s-1)}$$

$$=\frac{4rs}{\big(1-(s-r)^2\big)(1-r-s)+4rs} = T_0.$$

Очевидно, что, в силу условий $r>0, s>0, r+s>1$ и $|r-s|<1$, величина $T_0>1$.

Покажем, что эта оценка снизу точная. Для этого найдем $\alpha^{(0)}_{ij}$ $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,3m)$ такие, что $T^{(0)}_i = T_0$ $(i=1,...,3m)$.

Положим

$$\alpha^{(0)}_{ii} = \frac{1-(s-r)^2}{\big(1-(s-r)^2\big)(1-r-s)+4rs},$$

$$\alpha^{(0)}_{i\,m+i} = \frac{(s+r-1)\big(1-(s-r)^2\big)}{(1-r+s)\big[\big(1-(s-r)^2\big)(1-r-s)+4rs\big]},$$

$$\alpha^{(0)}_{i\,2m+i} = \frac{(s+r-1)\big(1-(s-r)^2\big)}{(1+r-s)\big[\big(1-(s-r)^2\big)(1-r-s)+4rs\big]},$$

где $i=1,\dots,m$. Остальные α_{ij} положим равными нулю. Условия (2.2) при этом выполняются.

Тогда

$$T^{(0)}_i = \big|1-\alpha^{(0)}_{ii}\big| + (r+s)\big|\alpha^{(0)}_{ii}\big| = 1+(r+s-1)\alpha^{(0)}_{ii} = T_0.$$

Аналогично $T^{(0)}_{m+i} = T^{(0)}_{2m+i} = T_0$, где $i=1,\dots,m$.

Таким образом,

$$\lambda(Y_{2m}, l^{3m}_{\infty}) = \big\|\pi^{(0)}_{\alpha}\big\| = \frac{4rs}{\big(1-(s-r)^2\big)(1-r-s)+4rs}.$$

□

2. Константы сильной единственности

Покажем, что рассмотренные выше операторы проектирования с единичной нормой, в случае $r>0$, $s>0$ и $\max\{r,s\}\leqslant\frac{1}{2}$, обладают свойством сильной единственности и найдем максимальные значения констант сильной единственности.

Лемма 1. *Значение константы сильной единственности k из неравенства (1.2) для оператора проектирования $\pi_\alpha^{(0)} : l_\infty^{3m} \to Y_{2m}$, который определяется функционалами (2.1), удовлетворяет условию*

$$k \leqslant \frac{1-|s-r|}{1+r+s},$$

если $r>0$, $s>0$, $r+s\leqslant 1$.

Доказательство. Для получения оценки константы k сверху рассмотрим оператор $\overline{\pi}x = x - \sum_{k=1}^m \overline{\alpha}_k f_k(x)$. Значения $\overline{\alpha}_k$ $(k=1,\ldots,m)$ определим следующим образом: $0<\overline{\alpha}_{ii}<1$, $\overline{\alpha}_{i\,m+i}>0$, $\overline{\alpha}_{i\,2m+i}>0$ для всех $i=1,\ldots,m$. Значения всех остальных α_{ij} положим равными нулю.

Вычислим нормы операторов $\overline{\pi}$ и $\overline{\pi}-\pi^{(0)}$.

Имеем

$$\|\overline{\pi}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 3m} \overline{T}_i = \max_i \sum_{j=1}^{3m} \left| \delta_{ij} - \sum_{k=1}^m \overline{\alpha}_{ki} f_{kj} \right|.$$

Найдем значения $\overline{T}_i$, учитывая, что $1-\overline{\alpha}_{ii}>0$, $1-r\overline{\alpha}_{i\,m+i} = \overline{\alpha}_{ii}+s\overline{\alpha}_{i\,2m+i}>0$, $1-s\overline{\alpha}_{i\,2m+i} = \overline{\alpha}_{ii}+r\overline{\alpha}_{i\,m+i}>0$.

$$\overline{T}_i = 1-\overline{\alpha}_{ii}+(r+s)\overline{\alpha}_{ii} = 1+(r+s-1)\overline{\alpha}_{ii}\leqslant 1,$$

$$\overline{T}_{m+i} = 1-r\overline{\alpha}_{i\,m+i}+(1+s)\overline{\alpha}_{i\,m+i} = 1+(1-r+s)\overline{\alpha}_{i\,m+i}>1,$$

$$\overline{T}_{2m+i} = 1-s\overline{\alpha}_{i\,2m+i}+(1+r)\overline{\alpha}_{i\,2m+i} = 1+(1+r-s)\overline{\alpha}_{i\,2m+i}>1.$$

Таким образом,

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 3m}\overline{T}_i = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\bigl\{\overline{T}_{m+i},\,\overline{T}_{2m+i}\bigr\}.$$

Далее

$$\bigl\|\overline{\pi}-\pi_\alpha^{(0)}\bigr\| = \max_{1\leqslant i\leqslant 3m}\overline{B}_i = \max_{1\leqslant i\leqslant 3m}\sum_{j=1}^{3m}\left|\sum_{k=1}^m\left(\overline{\alpha}_{ki}-\alpha_{ki}^{(0)}\right)f_{kj}\right|$$

$$= \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\sum_{j=1}^{3m}\bigl|\bigl(\overline{\alpha}_{ii}-1\bigr)f_{ij}\bigr|;\ \sum_{j=1}^{3m}\bigl|\overline{\alpha}_{i\,m+i}f_{ij}\bigr|;\ \sum_{j=1}^{3m}\bigl|\overline{\alpha}_{i\,2m+i}f_{ij}\bigr|\right\}$$

$$= \max_{1\leqslant i\leqslant m}\bigl\{(1+r+s)\bigl|\overline{\alpha}_{ii}-1\bigr|;\ (1+r+s)\bigl|\overline{\alpha}_{i\,m+i}\bigr|;\ (1+r+s)\bigl|\overline{\alpha}_{i\,2m+i}\bigr|\bigr\}$$

$$= (1+r+s)\max_{1\leqslant i\leqslant m}\bigl\{\bigl|\overline{\alpha}_{ii}-1\bigr|;\ \bigl|\overline{\alpha}_{i\,m+i}\bigr|;\ \bigl|\overline{\alpha}_{i\,2m+i}\bigr|\bigr\} = (1+r+s)\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{r\overline{\alpha}_{i\,m+i}$$

$$+s\overline{\alpha}_{i\,2m+i};\ \overline{\alpha}_{i\,m+i};\ \overline{\alpha}_{i\,2m+i}\} = (1+r+s)\max_{1\leqslant i\leqslant m}\bigl\{\overline{\alpha}_{i\,m+i};\ \overline{\alpha}_{i\,2m+i}\bigr\},$$

так как $r\overline{\alpha}_{i\,m+i}+s\overline{\alpha}_{i\,2m+i}\leqslant (r+s)\max\bigl\{\overline{\alpha}_{i\,m+i};\,\overline{\alpha}_{i\,2m+i}\bigr\}\leqslant \max\bigl\{\overline{\alpha}_{i\,m+i};\,\overline{\alpha}_{i\,2m+i}\bigr\}$ для каждого номера $i=1,\ldots,m$.

Найдем для k оценку сверху. Неравенство (1.2) примет вид

$$1+k\cdot(1+r+s)\max_{1\leqslant i\leqslant m}\bigl\{\overline{\alpha}_{i\,m+i};\ \overline{\alpha}_{i\,2m+i}\bigr\}\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m}\bigl\{\overline{T}_{m+i},\,\overline{T}_{2m+i}\bigr\}. \qquad (3.1)$$

Рассмотрим два случая.

1) $\max_{1\leqslant i\leqslant 3m}\overline{B}_i=(1+r+s)\overline{\alpha}_{i\,m+i}$. Тогда неравенство (3.1) перепишется так

$$1+k\cdot(1+r+s)\overline{\alpha}_{i\,m+i}\leqslant 1+(1-r+s)\overline{\alpha}_{i\,m+i},$$

откуда получим, что $k\leqslant\frac{1-r+s}{1+r+s}$.

2) $\max_{1\leqslant i\leqslant 3m}\overline{B}_i=(1+r+s)\overline{\alpha}_{i\,2m+i}$. Тогда неравенство (3.1) будет иметь вид

$$1+k\cdot(1+r+s)\overline{\alpha}_{i\,2m+i}\leqslant 1+(1+r-s)\overline{\alpha}_{i\,2m+i},$$

откуда получим, что $k\leqslant\frac{1+r-s}{1+r+s}$.

Так как неравенство $1-r+s\leqslant 1+r-s$ равносильно условию $s\leqslant r$, то окончательно получим следующую оценку $k\leqslant\frac{1-|s-r|}{1+r+s}$. Очевидно, что $k\in(0,1]$. □

Теорема 2. *Оператор проектирования $\pi_\alpha^{(0)}$ пространства l_∞^{3m} на подпространство Y_{2m}, определяемое функционалами (2.1), является сильно единственным и максимальное значение константы сильной единственности k_0 равно $\frac{1-|s-r|}{1+r+s}$, если $r>0$, $s>0$ и $\max\{r,s\}\leqslant\frac{1}{2}$.*

Доказательство. Значения T_i, $(i=1,\ldots,3m)$ имеют вид

$$T_i=\sum_{j=1}^{3m}=\left|1-\alpha_{ii}\right|+\sum_{k=1,\,k\neq i}^{m}\left|\alpha_{ki}\right|+(r+s)\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_{ki}\right|,\ \ T_{m+i}=\left|1-r\alpha_{i\,m+i}\right|$$

$$+r\sum_{k=1,\,k\neq i}^{m}\left|\alpha_{k\,m+i}\right|+(1+s)\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_{k\,m+i}\right|,\ \ T_{2m+i}=\left|1-s\alpha_{i\,2m+i}\right|$$

$$+s\sum_{k=1,\,k\neq i}^{m}\left|\alpha_{k\,2m+i}\right|+(1+r)\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_{k\,2m+i}\right|,$$

где $i=1,\ldots,m$.

Далее найдем B_i, $(i=1,\ldots,3m)$. Имеем

$$B_i=\sum_{j=1}^{3m}\left|\sum_{k=1}^{m}\left(\alpha_{ki}-\alpha_{ki}^{(0)}\right)f_{kj}\right|=(1+r+s)\left(\left|\alpha_{ii}-1\right|+\sum_{k=1,\,k\neq i}^{m}\left|\alpha_{ki}\right|\right)$$

$$=(1+r+s)\left(\left|r\alpha_{i\,m+i}+s\alpha_{i\,2m+i}\right|+\sum_{k=1,\,k\neq i}^{m}\left|r\alpha_{k\,m+i}+s\alpha_{k\,2m+i}\right|\right)$$

$$=(1+r+s)\sum_{k=1}^{m}\left|r\alpha_{k\,m+i}+s\alpha_{k\,2m+i}\right|,$$

$$B_{m+i}=\sum_{j=1}^{3m}\left|\sum_{k=1}^{m}\alpha_{k\,m+i}f_{kj}\right|=(1+r+s)\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_{k\,m+i}\right|,$$

$$B_{2m+i}=\sum_{j=1}^{3m}\left|\sum_{k=1}^{m}\alpha_{k\,2m+i}f_{kj}\right|=(1+r+s)\sum_{k=1}^{m}\bigl|\alpha_{k\,2m+i}\bigr|,$$

где $i=1,\dots,m$.

Покажем, что $k_0=\frac{1-|s-r|}{1+r+s}$ $\bigl(r>0,\ s>0,\ \max\{r,\,s\}\leqslant\frac{1}{2}\bigr)$ – максимально возможное значение константы сильной единственности. Для этого надо доказать, что неравенство

$$\bigl\|\pi_\alpha^{(0)}\bigr\|+k_0\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant 3m}B_i\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant 3m}T_i \tag{3.2}$$

выполняется при любых значениях α_{ij}, $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,3m)$.

Сравним значения B_i. Докажем неравенства

$$B_{m+i}+B_{2m+i}\geqslant 2B_i\ \ (i=1,\dots,m). \tag{3.3}$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\bigl|\alpha_{k\,m+i}\bigr|+\bigl|\alpha_{k\,2m+i}\bigr|\geqslant 2\bigl|r\alpha_{k\,m+i}+s\alpha_{k\,2m+i}\bigr|$$

где $i,\,k=1,\dots,m$.

Последние неравенства выполняются, так как

$$2\bigl|r\alpha_{k\,m+i}+s\alpha_{k\,2m+i}\bigr|\leqslant 2\cdot\max\{r,\,s\}\cdot\bigl|\alpha_{k\,m+i}+\alpha_{k\,2m+i}\bigr|$$

$$\leqslant\bigl|\alpha_{k\,m+i}+\alpha_{k\,2m+i}\bigr|\leqslant\bigl|\alpha_{k\,m+i}\bigr|+\bigl|\alpha_{k\,2m+i}\bigr|.$$

Таким образом, неравенство (3.3) доказано.

Если $B_i>B_{m+i}$ и $B_i>B_{2m+i}$ $(i=1,\dots,m)$, то неравенства (3.3) не выполняются. Значит, хотя бы одно из B_{m+i}, B_{2m+i} не меньше B_i $(i=1,\dots,m)$. Следовательно,

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 3m}B_i=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{B_{m+i},\,B_{2m+i}\}.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 3m}B_i=\max_{1\leqslant i\leqslant m}B_{m+i}.$$

Для доказательства неравенства (3.2) достаточно доказать неравенства

$$1+\frac{1-|s-r|}{1+r+s}\cdot B_{m+i}\leqslant T_{m+i}\ (i=1,\dots,m).$$

т.е.

$$1+(1-|s-r|)\sum_{k=1}^{m}\bigl|\alpha_{k\,m+i}\bigr|\leqslant\bigl|1-r\alpha_{i\,m+i}\bigr|+r\sum_{k=1,\,k\neq i}^{m}\bigl|\alpha_{k\,m+i}\bigr|+(1+s)\sum_{k=1}^{m}\bigl|\alpha_{k\,m+i}\bigr|.$$

Так как неравенства

$$(1-|s-r|)\sum_{k=1,\,k\neq i}^{m}\bigl|\alpha_{k\,m+i}\bigr|\leqslant(1+r+s)\sum_{k=1,\,k\neq i}^{m}\bigl|\alpha_{k\,m+i}\bigr|\ (i=1,\dots,m)$$

равносильны очевидному неравенству $1-|s-r|\leqslant 1+r+s$, то остается доказать неравенства $1+(1-|s-r|)\left|\alpha_{i\,m+i}\right|\leqslant\left|1-r\alpha_{i\,m+i}\right|+(1+s)\left|\alpha_{i\,m+i}\right|$. Имеем $\left|1-r\alpha_{i\,m+i}\right|+(1+s)\left|\alpha_{i\,m+i}\right|\geqslant 1+(1-r+s)\left|\alpha_{i\,m+i}\right|\geqslant 1+(1-|s-r|)\left|\alpha_{i\,m+i}\right|$, так как, если $s\geqslant r$, то неравенство $1-r+s\geqslant 1-|s-r|$ равносильно условию $s\geqslant r$, а если $s\leqslant r$, то неравенство $1-r+s\geqslant 1-|s-r|$ преобразуется к очевидному неравенству $1-r+s\geqslant 1-r+s$.

2) Пусть

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 3m} B_i=\max_{1\leqslant i\leqslant m} B_{2m+i}.$$

Для доказательства неравенства (3.2) достаточно доказать неравенства

$$1+\frac{1-|s-r|}{1+r+s}\cdot B_{2m+i}\leqslant T_{2m+i}\ (i=1,\ldots,m).$$

т.е.

$$1+(1-|s-r|)\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_{k\,2m+i}\right|\leqslant\left|1-s\alpha_{i\,2m+i}\right|$$

$$+s\sum_{k=1,\,k\neq i}^{m}\left|\alpha_{k\,2m+i}\right|+(1+r)\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_{k\,2m+i}\right|.$$

Так как неравенства

$$(1-|s-r|)\sum_{k=1,\,k\neq i}^{m}\left|\alpha_{k\,2m+i}\right|\leqslant(1+r+s)\sum_{k=1,\,k\neq i}^{m}\left|\alpha_{k\,2m+i}\right|\ (i=1,\ldots,m)$$

равносильны очевидному неравенству $1-|s-r|\leqslant 1+r+s$, то остается доказать неравенства $1+(1-|s-r|)\left|\alpha_{i\,2m+i}\right|\leqslant\left|1-s\alpha_{i\,2m+i}\right|+(1+r)\left|\alpha_{i\,2m+i}\right|$. Имеем $\left|1-s\alpha_{i\,2m+i}\right|+(1+r)\left|\alpha_{i\,2m+i}\right|\geqslant 1+(1+r-s)\left|\alpha_{i\,2m+i}\right|\geqslant 1+(1-|s-r|)\left|\alpha_{i\,2m+i}\right|$. Последние неравенства справедливы так как, если $s\leqslant r$, то неравенство $1+r-s\geqslant 1-|s-r|$ равносильно условию $s\leqslant r$, а если $s\geqslant r$, то неравенство $1+r-s\geqslant 1-|s-r|$ становится очевидным неравенством $1+r-s\geqslant 1+r-s$.

□

Замечание 1. Вопрос о сильной единственности минимальных проекций с нееденичной нормой, найденных в теореме 1 при $r+s>1$ и $|r-s|<1$, остается нерешенным.

Заключение

В работе найдены проекционные константы для минимальных операторов проектирования на на некоторый класс подпространств коразмерности m в пространстве l_∞^{3m}. Подпространства образованы с помощью гиперплоскостей рассматриваемого конечномерного пространства. Относительные проекционные константы вычислены как для минимальных проекций с единичной нормой, так и для минимальных проекций с нормой больше единицы. Максимальные значения констант сильной единственности найдены только для минимальных операторов проектирования с единичной нормой. Найденые проекционные константы могут найти применение в вычислительной математике, в частности, для оценки сходимости проекционных методов решения операторных уравнений и в оценках ошибки алгоритма Ремеза.

Список литературы

[1] Blätter J., Cheney E.W. Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1974. Vol. 101. Pp. 215–227.

[2] Kroó A., Pinkus A. Strong uniqueness // Surveys in Approximation Theory. 2010. Vol. 5. Pp. 1–91.

[3] Lewicki G. Best Approximation in Spaces of Bounder Linear Operators: Dissertationes Mathematicae. Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1994. 103 p.

[4] Lewicki G., Micek A. Equality of two strong unique projection constants // Journal of Approximation Theory. 2010. Vol. 162, № 12. Pp. 2278–2289.

[5] Lokot' V.V. On a class of minimal projections in finite dimensional spaces // Optimization. 1994. Vol. 29. Pp. 311–317.

[6] Локоть В.В. Константы сильной единственности минимальных проекций на гиперплоскости в пространстве $l_\infty^n (n \geqslant 3)$ // Математические заметки. 2002. Т. 72, № 5. С. 723–728. https://doi.org/10.4213/mzm461

[7] Локоть В.В., Мартынов О.М. Проекционные константы. Мурманск: МГГУ, 2013. 302 с.

[8] Martinov O.M. Constants of strong unicity of minimal projections onto some two-dimensional subspaces of l_∞^4 // Journal of Approximation Theory. 2002. Vol. 118. Pp. 175–187.

[9] Мартынов О.М. Некоторые свойства операторов проектирования в банаховых пространствах: Диссертация к.ф.-м.н.. СПб: РГПУ им. А.И. Герцена, 2002.

[10] Мартынов О.М. Проекционные константы некоторого класса подпространств коразмерности два в пространстве l_∞^{2n} // Функциональный анализ и его приложения. 2019. Т. 53, № 3. С. 33–44.

[11] Мартынов О.М. О сильной единственности некоторых проекций с единичной нормой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. Т. 2. С. 33–48.

[12] Мартынов О.М. О сильной единственности минимальных проекций в пространстве l_∞^9 // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 4. С. 28–42. https://doi.org/10.26456/vtpmk603

[13] Мартынов О.М. Об относительных проекционных константах некоторых классов подпространств пространства l_∞^{2n} // Функциональный анализ и его приложения. 2020. Т. 54, № 4. С. 98–101.

[14] Martynov O.M. Constants of strong uniqueness of minimal projections onto some n-dimensional subspaces of $l_\infty^{2n} (n \geqslant 2)$ // Journal of Approximation Theory. 2021. Vol. 262. ID 105507.

[15] Мартынов О.М. Некоторые проекции и их свойства в пространстве l_∞^4 // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения. Т. LXXIV. СПб: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2021. С. 126–132.

[16] Martynov O.M. Some projections and their properties in the space $l_\infty^{mn} (m \geqslant 2, n \geqslant 3)$ // Annales Polonici Mathematici. 2022. Vol. 128, № 3. Pp. 221–231.

[17] Одинец В.П. Минимальные проекторы в пространствах Банаха. Проблемы единственности и существования и их приложения. Bydgoszcz: WSP, 1985.

[18] Одинец В.П. О семинаре по геометрии банаховых пространств в 1990-97 гг. // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения 2007. Т. LX. СПб: Изд-во БАН, 2007. С. 12–26.

[19] Odyniec W., Lewicki G. Minimal Projections in Banach Spaces. Series: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1449. Berlin, New York: Springer, 1990.

[20] Odyniec W., Prophet M. The strong unicity constant and its applications // Banach Center Publications. 2008. Vol. 79, № 1. Pp. 167–172. http://dx.doi.org/10.4064/bc79-0-13

[21] Odyniec W., Prophet M.P. A lower bound of the strongly unique minimal projection constant of $l_\infty^n, (n \geqslant 3)$ // Journal of Approximation Theory. 2007. Vol. 145. Pp. 111–121.

[22] Одинец В.П., Якубсон М.Я. Проекторы и базисы в нормированных пространствах. М.: Едиториал УРСС, 2004.

Образец цитирования

Мартынов О.М. Проекционные константы пространства l_∞^{3m} // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 3. С. 76–90. https://doi.org/10.26456/vtpmk642

Сведения об авторах

1. **Мартынов Олег Михайлович**
доцент кафедры №13 военной академии воздушно-космической обороны имени Маршала Советского Союза Г.К. Жукова.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Жигарева, д.50, ВА ВКО им. Маршала Советского Союза Г.К. Жукова. E-mail: olegmartynov@yandex.ru

PROJECTION CONSTANTS OF THE SPACE L_{∞}^{3M}

Martynov Oleg Mikhailovich
Associate professor at department №13,
Zhukov Air and Space Defense Academy
Russia, 170100, Tver, Zhigarev Str., 50, Military Aerospace Defense Academy.
E-mail: olegmartynov@yandex.ru

Received 31.05.2022, revised 20.10.2022.

The paper considers minimal projections of the space l_{∞}^{3m} on some subspace of codimension m. Relative projection constants are found for them, and in the case of a minimal projection with a unit norm, the maximum value of the strong uniqueness constant is found. The projection constants found can be used in computational mathematics, in particular, to assess the convergence of projection methods for solving operator equations.

Keywords: space, subspace, projection operator, relative projection constant, the constant of strong uniqueness.

Citation

Martynov O.M., "Projection constants of the space l_{∞}^{3m}", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 3, 76–90 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk642

References

[1] Blätter J., Cheney E.W., "Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces", *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **101** (1974), 215–227.

[2] Kroó A., Pinkus A., "Strong uniqueness", *Surveys in Approximation Theory*, **5** (2010), 1–91.

[3] Lewicki G., *Best Approximation in Spaces of Bounder Linear Operators*, Dissertationes Mathematicae, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 1994, 103 pp.

[4] Lewicki G., Micek A., "Equality of two strong unique projection constants", *Journal of Approximation Theory*, **162**:12 (2010), 2278–2289.

[5] Lokot' V.V., "On a class of minimal projections in finite dimensional spaces", *Optimization*, **29** (1994), 311–317.

[6] Lokot' V.V., "Constants of Strong Uniqueness of Minimal Projections onto Hyperplanes in the Space $l_{\infty}^{n} (n \geqslant 3)$", *Mathematical Notes*, **72**:5 (2002), 667–671, https://doi.org/10.4213/mzm461.

[7] Lokot V.V., Martynov O.M., *Proektsionnye konstanty [Projection constants]*, MGGU, Murmansk, 2013 (in Russian), 302 pp.

[8] Martinov O.M., "Constants of strong unicity of minimal projections onto some two-dimensional subspaces of l_∞^4", *Journal of Approximation Theory*, **118** (2002), 175–187.

[9] Martynov O.M., *Nekotorye svojstva operatorov proektirovaniya v banakhovykh prostranstvakh*, PhD Thesis, RGPU im. A.I. Gertsena, SPb, 2002 (in Russian).

[10] Martynov O.M., "Projection constants of a certain class of subspaces of codimension two in the space l_∞^{2n}", *Funktsionalnyj analiz i ego prilozheniya [Functional analysis and its applications]*, **53**:3 (2019), 33–44 (in Russian).

[11] Martynov O.M., "On the strong uniqueness of some projections with unit norm", *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya [Differential equations and control processes]*, **2** (2020), 33–48 (in Russian).

[12] Martynov O.M., "On the strong uniqueness of minimal projections in the space l_∞^9", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 4, 28–42 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk603.

[13] Martynov O.M., "On the relative projection constants of some classes of subspaces of the space l_∞^{2n}", *Funktsionalnyj analiz i ego prilozheniya [Functional analysis and its applications]*, **54**:4 (2020), 98–101 (in Russian).

[14] Martynov O.M., "Constants of strong uniqueness of minimal projections onto some n-dimensional subspaces of $l_\infty^{2n}(n \geqslant 2)$", *Journal of Approximation Theory*, **262** (2021), 105507.

[15] Martynov O.M., "Some projections and their properties in the space l_∞^4", *Nekotorye aktualnye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovaniya. Gertsenovskie chteniya [Some actual problems of modern mathematics and mathematical education. Herzen readings]*. V. LXXIV, Publishing House of A.I. Herzen RSPU, SPb., 2021, 126–132 (in Russian).

[16] Martynov O.M., "Some projections and their properties in the space $l_\infty^{mn}(m \geqslant 2, n \geqslant 3)$", *Annales Polonici Mathematici*, **128**:3 (2022), 221–231.

[17] Odinets V.P., *Minimalnye proektory v prostranstvakh Banakha. Problemy edinstvennosti i sushchestvovaniya i ikh prilozheniya [Minimal projectors in Banach spaces. Problems of uniqueness and existence and their applications]*, WSP, Bydgoszcz, 1985 (in Russian).

[18] Odinets V.P., "On the seminar on the geometry of Banach spaces in 1990-97.", *Nekotorye aktualnye problemy sovremennoj matematiki i matematicheskogo obrazovaniya. Gertsenovskie chteniya 2007 [Some actual problems of modern mathematics and mathematical education. Herzen Readings 2007]*. V. LX, Izd-vo BAN, SPb, 2007, 12–26 (in Russian).

[19] Odyniec W., Lewicki G., *Minimal Projections in Banach Spaces*. V. 1449, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, New York, 1990.

[20] Odyniec W., Prophet M., "The strong unicity constant and its applications", *Banach Center Publications*, **79**:1 (2008), 167–172, http://dx.doi.org/10.4064/bc79-0-13.

[21] Odyniec W., Prophet M.P., "A lower bound of the strongly unique minimal projection constant of $l_\infty^n, (n \geqslant 3)$", *Journal of Approximation Theory*, **145** (2007), 111–121.

[22] Odinets V.P., Yakubson M.Ya., *Proektory i bazisy v normirovannykh prostranstvakh [Projectors and bases in normed spaces]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 2004 (in Russian).