

УДК 330.42

DOI: 10.26456/2219-1453/2022.4.210–219

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНАЯ ПРИРОДА СКАЧКОВ КУРСА BTC/USD

С.А. Михеев, О.А. Нечаева, Д.К. Паршин,
А.И. Цветков, В.П. Цветков

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», г. Тверь

Целью работы является анализ курса BTC/USD с 01.01.2022 по 15.06.2022 на основе методов мультифрактальной динамики для исследования возможности прогноза скачков курса и выявления характерных маркеров скачков. Всего наблюдались 12 скачков с амплитудами в диапазоне 500–900 долл. в минуту. В работе показано, что такая высокая волатильность связана с мультифрактальной природой этих скачков. Анализ скачков курса BTC/USD был проведен в рамках модели мультифрактальной динамики. Кратко изложены основы мультифрактальной динамики, поскольку эта модель лежит в основе данной работы. В статье описываются уравнения этой модели, решения которых позволяют вычислить основные ее параметры для каждого большого скачка курса BTC/USD. Полученные в статье результаты указывают на высокую степень близости курса BTC/USD к мультифракталам на временных интервалах перед большими скачками. Показана бифуркационная природа скачков, связанная с мультифрактальным характером динамики курса BTC/USD перед его большими скачками. Необходимым условием скачка курса BTC/USD является близость значений параметров мультифрактальной динамики D_0 и D_k . Элементом научной новизны является выявленное свойство резкого скачка динамики курса BTC/USD после приближения фрактальной размерности локального тренда к значениям D_0 и D_k , которое может быть использовано при прогнозе возникновения больших скачков курса BTC/USD.

Ключевые слова: скачки курса BTC/USD, мультифрактальная динамика, кусочно-линейный тренд, параметры мультифрактальной динамики

Введение

Биткоин в настоящее время стал одной из значимых цифровых валют. Он стал известен в 2008 г. Его востребованность связана с децентрализованной системой биткоина, которая позволяет избежать единого администратора, способного вмешаться в систему платежей. В нынешнее время банковская система внушает все меньше доверия обыкновенным пользователям. Это только подогревает интерес к криптовалютам.

В 2009 г. впервые был установлен курс обмена биткоинов. Один доллар приравнивался к 1309 биткоинам.

В 2011 г. биткоин стоил 10 \$, но несмотря на проблемы с протоколами безопасности в 2013 г. курс превысил 100 \$ в апреле и

совершил скачок в ноябре до 1000 \$, когда один из создателей видеоигр сделал криптовалюту одним способов оплаты покупки игр.

По мнению многих финансовых аналитиков биткоин является слишком нестабильным активом [1]. Таковым его делают несколько факторов.

Во-первых, две трети доступных биткоинов используются для инвестиций и спекуляций. Во-вторых, количество биткоинов в обращении ограничено. Максимальное количество биткоинов, которое когда-либо будет существовать, – чуть менее 21 млн. Около 89 % от общего количества биткоинов уже находится в обращении. Потому его просто недостаточно, чтобы использовать в качестве законного платежного средства.

Вдобавок из-за ограниченного обращения курсом биткоина очень легко манипулировать: несколько крупных покупок или продаж криптовалюты могут существенно повлиять на баланс спроса и предложения. Поэтому биткоин крайне волатилен. Колебания его курса могут достигать впечатляющей амплитуды в течение всего нескольких дней или часов.

При анализе курса BTC/USD с 01.01.2022 по 15.06.2022 наблюдались 12 скачков с амплитудами в диапазоне 500–800 долл. в минуту. Такая высокая волатильность несомненно связана с его природой.

Цель настоящей работы – исследование скачков курса BTC/USD в рамках модели мультифрактальной динамики (МФД), которая является развитием оригинальной модели Мандельброта «Мультифрактальная прогулка по Уолл-стрит» [5] и была разработана и протестирована в работах [2, 3, 4, 6].

1. Мультифрактальная динамика с кусочно-линейным трендом

Кратко изложим основы мультифрактальной динамики. Пусть $y(t)$ мультифрактальная кривая, описывающая динамику интересующего нас параметра и имеющая на интервалах времени T_i , $i = (1, 2, 3 \dots N)$ определенное значение фрактальной размерности D_i . Тогда, если скорость X_i линейного тренда $\bar{y}_i(t)$, аппроксимирующего эту функцию на интервале T_i с нужной нам степенью точности, зависит только от D_i , то данный вид динамики мы будем называть мультифрактальной.

Динамику мультифрактального процесса на интервале T_i можно разделить на две составляющие, используя понятие кусочно-линейного тренда:

$$y_i(t) = \bar{y}_i(t) + \tilde{y}_i(t) \quad (1)$$

где $y_i(t)$ – линейный тренд процесса, который во времени меняется гладко; $\tilde{y}_i(t)$ – быстрые осцилляции относительно тренда.

Предполагается, что $|\bar{y}_i(t)| \gg |\tilde{y}_i(t)|$ и кривая $y_i(t)$ является мультифрактальной. Линия тренда $\bar{y}_i(t)$ имеет фрактальную размерность равную единице, а $\tilde{y}_i(t)$ – фрактальную размерность D_i .

В математической модели МФД функция $X(D)$ определяется уравнением [4]:

$$A(D) \cdot X(D) + B_0 X^3(D) = \eta. \quad (2)$$

Параметры МФД B_0 и η на интересующем нас интервале времени считаются постоянными. Динамика $\bar{y}(t)$ в данной модели определяется аналитической зависимостью коэффициента A от фрактальной размерности D . Значения D удовлетворяют условию $D \in [1, 2]$. Разобьем этот интервал на два $1 < D < D_0$ и $D_0 < D < 2$.

Параметр η в (2) описывает эффективное влияние основных факторов на динамику мультифрактального процесса. Причем в (2) считается, что $|X(D)| \ll 1$, что соответствует достаточно медленному (квазиравновесному) характеру динамики данного процесса.

Параметры B_0 и η в течение времени наблюдения процесса постоянны, а динамика процесса определяется аналитической зависимостью коэффициента A от фрактальной размерности D . Нами будет использована следующее аналитическое представление $X(D)$ [4]:

$$A(D) = H(D - D_0)(D_0 - D)^{-1} + H(D - D_k)(D_k - D)^{-1} \quad (3)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда. В (3) D_0 и D_k – параметры модели МФД, удовлетворяющие условию: $1 < D_0 < D_k < 2$. В точке D_0 функции в (3) гладко сшиваются.

Параметры МФД D_0 , D_k , η находятся из условия минимума уклонения вычисленных значений X от данных опыта на различных участках кривой $y(t)$.

Нас будут интересовать только вещественные решения уравнения (2). Их может быть для кубических уравнений или одно, или три.

Приведем (2) к более удобному для исследования виду. Сделаем замену $X = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_0}} \cdot \zeta$. Тогда (2) имеет вид:

$$\zeta^2 - \frac{1}{\zeta} = \lambda, \quad (4)$$

где $\lambda = -A(D) \cdot B_0^{\frac{1}{3}} \cdot \eta^{-\frac{2}{3}}$

Зависимость решений уравнения (4) от параметра λ , представлена на рис. 1.

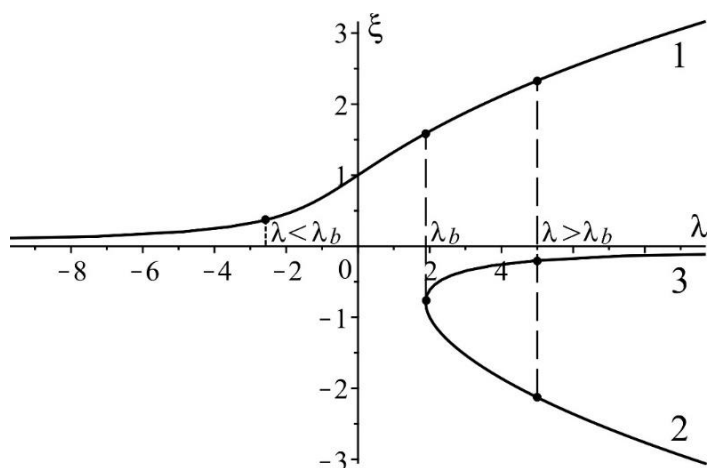


Рис. 1. График функции $\xi(\lambda)$

Из рис. 1 и формулы (4) следует, что точкой бифуркации является точка $\lambda_b = \lambda(D_b) = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$. При значениях $\lambda < \lambda_b$ уравнение (4) определяет одну функцию $\zeta_1(\lambda)$, а при значениях $\lambda > \lambda_b$, три функции $\zeta_{1,2,3}(\lambda)$.

Из (4) вытекает, что функции $\zeta_{1,2,3}(\lambda)$ имеют асимптотики:

$$\zeta_1(\lambda) = \sqrt{\lambda} (\lambda \gg 1, \lambda > 0), \zeta_1(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} (-\lambda \gg 1, \lambda < 0)$$

$$\zeta_2(\lambda) = -\sqrt{\lambda} (\lambda \gg 1, \lambda > 0), \zeta_2(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} (\lambda \gg 1, \lambda > 0) \quad (5)$$

Функции $\zeta_{1,2,3}(\lambda)$ определяют стационарные состояния динамической системы. В случае $\lambda \geq \lambda_b$ их одновременно будет три. Возникает возможность скачков между этими состояниями при воздействии на динамическую систему нестационарных факторов при потере устойчивости состояния, описываемого функцией $\zeta_2(\lambda)$ и реализуемого до скачка. Согласно статистике [2] скачки $y(t)$ наблюдаются в динамике курса BTC/USD.

2. Исследование курса BTC/USD в модели МФД

На основании статистических данных [2] построим график курса биткоина за период с 01.01.2022 по 15.06.2022.

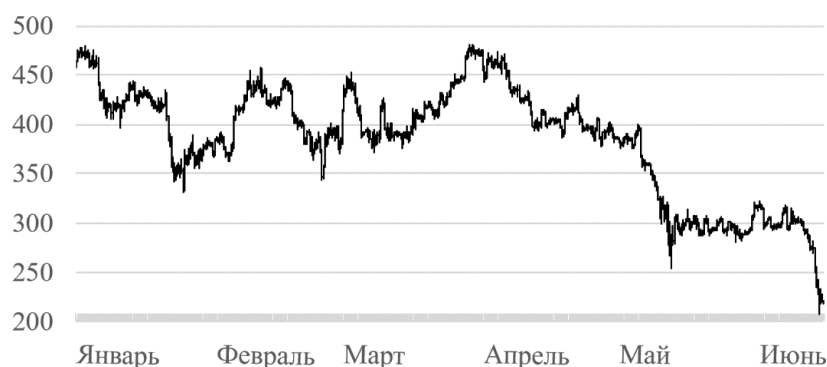


Рис. 2. График курса BTC/USD за период с 01.01.2022 по 15.06.2022

Из рис. 2 видно, что график функции $y(t)$ представляет собой сложную негладкую кривую, которая, как будет показано нами, является мультифрактальной.

В области скачка функции $y(t)$ кусочно-линейный тренд $\bar{y}(t)$ совпадает с функцией $y(t)$. Для скачков $y(t)$ значение X в области скачка X_j можно оценить по формуле:

$$X_j = \frac{y_i - y_0}{\tau_j}, \quad (7)$$

где y_i – значение $y(t)$ в максимуме скачка, y_0 – значение $y(t)$ перед скачком, τ_j – длительность скачка.

Разобьем интервал времени наблюдения за курсом BTC/USD перед каждым скачком на три интервала T_1, T_2, T_3 и построим три кусочно-линейных тренда $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ на них. Разбиение интервала наблюдения на части T_1, T_2, T_3 и расчет параметров функций $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ проводились из условия наилучшего приближения этих функций в кусочно-линейными функциям в пространстве L_2 .

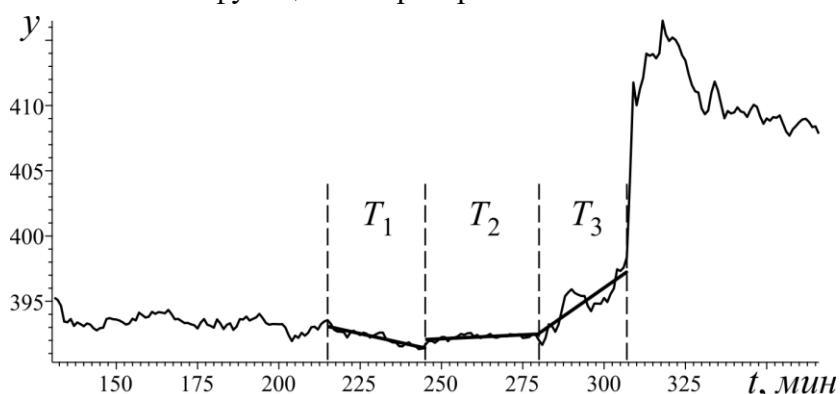


Рис. 3. График курса BTC/USD вблизи скачка, произошедшего 16.03

На рис. 3 эта процедура проиллюстрирована на конкретном примере скачка, произошедшего 16.03.

На рис. 3 временной интервал отсчитывается от момента времени 0 ч. 0 мин.16.03.

Рассчитаем параметры МФД $X_1, X_2, X_3, D_1, D_2, D_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3, X_j$, $\beta = -X_3^{\frac{1}{3}} X_j^{\frac{2}{3}} (\delta_1, \delta_2, \delta_3 - \text{степени относительного уклонения кривой } y(t) \text{ от фракталов на интервалах } T_1, T_2, T_3, \text{ соответственно})$ для наиболее интенсивных скачков курса биткоина и представим их в табл. 1, 2.

Таблица 1

№ скачка (дата)	X_1	X_2	X_3	X_j	β
1 (05.01)	-0.0571	0.0293	-0.0388	-5.213	1.018
2 (07.01)	-0.0493	0.0502	0.0202	8.096	-1.098
3 (10.01)	0.199	-0.333	0.116	-5.348	-1.491
4 (22.01)	0.0998	-0.176	-0.335	-5.147	2.070
5 (10.02)	-0.0308	0.103	-0.0889	-6.334	1.528
6 (24.02)	-0.198	0.226	0.0821	9.121	-1.897
7 (01.03)	0.0801	-0.0500	0.0680	7.925	-1.622
8 (14.03)	0.00343	-0.00751	-0.0416	-5.389	1.065
9 (16.03)	-0.0554	0.0120	0.174	7.159	-2.074
10 (27.03)	-0.0505	0.0294	-0.00809	5.024	0.589
11 (18.04)	-0.0879	0.00690	-0.0335	-6.293	1.099
12 (11.05)	-0.0546	0.0129	-0.0478	5.869	1.181

Таблица 2

№ скачка (дата)	D_1	δ_1	D_2	δ_2	D_3	δ_3
1 (05.01)	1.226	0.0116	1.216	0.00527	1.370	0.0102
2 (07.01)	1.267	0.00649	1.229	0.0219	1.287	0.00855
3 (10.01)	1.055	0.00531	1.063	0.00793	1.193	0.00713
4 (22.01)	1.105	0.00325	1.152	0.008672	1.108	0.00720
5 (10.02)	1.214	0.00689	1.100	0.00367	1.085	0.0182
6 (24.02)	1.101	0.0142	1.127	0.0125	1.257	0.00942
7 (01.03)	1.260	0.0150	1.206	0.0162	1.258	0.0125
8 (14.03)	1.264	0.0148	1.278	0.0108	1.112	0.00862
9 (16.03)	1.203	0.0176	1.294	0.00909	1.095	0.00615
10 (27.03)	1.151	0.0147	1.251	0.0226	1.354	0.0101
11 (18.04)	1.127	0.0146	1.429	0.0229	1.124	0.0198
12 (11.05)	1.238	0.0107	1.188	0.0267	1.236	0.0260

Из анализа данных $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ табл. 2 следует, что максимальная степень относительного уклонения кривой $y(t)$ от фракталов на интервалах T_1, T_2, T_3 равна 0.0267, а средняя степень относительного уклонения $y(t)$ от фракталов на тех же интервалах составила 0.0124. Приведенные оценки указывают на высокую степень близости курса BTC/USD к мультифракталам на временных интервалах перед скачками. Фрактальная размерность на интервалах T_1, T_2, T_3 перед скачками курса биткоина изменяется в интервале 1.055–1.429, а среднее значение фрактальной размерности оказалось равной 1.201. Наши оценки указывают на существенно меньшую величину среднего значения фрактальной размерности курса BTC/USD от гауссовского значения 1.5.

Вычисления параметров МФД $D_0, D_k, \eta, \lambda_3$ для каждого скачка будем проводить на основании системы уравнений (8), следующей из (2), (3).

$$X_i(1 - \beta^{-3} X_i^3)^{-1} = \eta(D_0 - D_i) [H(D_0 - D_i) + H(D_i - D_0)(D_k - D_0)(D_k - D_i)^{-1}], i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

Из табл. 1 следует, что параметр β существенно превосходит параметры X_1, X_2, X_3 и, следовательно, значения $\beta^{-3} X_i^3$ в (8) будут малы и ими можно пренебречь.

Используя данные табл. 1, 2 и комплекс программ в системе компьютерной алгебры Maple, находим значения параметров МФД для наиболее интенсивных скачков курса BTC/USD. Вычисленные нами значения этих параметров приводим в табл. 3.

Таблица 3

№ скачка (дата)	D_0	D_k	η	λ_3	B_0
1 (05.01)	1.215	1.218	-10.146	26.232	-9.622
2 (07.01)	1.260	1.269	1.620	54.360	-1.224
3 (10.01)	1.060	1.063	35.964	12.857	-10.840
4 (22.01)	1.104	1.106	-81.751	6.180	-9.212
5 (10.02)	1.097	1.101	-7.588	17.186	-2.127
6 (24.02)	1.069	1.111	1.517	23.110	-0.222
7 (01.03)	1.234	1.296	-1.796	23.859	0.421
8 (14.03)	1.258	1.270	-0.284	25.602	-0.235
9 (16.03)	1.197	1.204	1.710	11.918	-0.192
10 (27.03)	1.241	1.254	-0.563	72.789	-2.757
11 (18.04)	1.088	1.130	0.143	32.800	0.108
12 (11.05)	1.205	1.269	0.783	24.703	0.476

Числовые данные в табл. 3 указывают, что необходимым условием скачка курса BTC/USD является близость значений параметров МФД D_0 и D_k , то есть выполнение условия $(D_k - D_0) \ll 1$. Максимальное значение величины $D_k - D_0 = 0.064$, а среднее значение равно 0.022, что в три раза меньше максимального значения.

Заключение

В работе проведен анализ курса BTC/USD с 01.01.2022 по 15.06.2022. За это время наблюдались 12 скачков с амплитудами в диапазоне 500–900 долл. в минуту. Как показано в нашей работе такая высокая волатильность связана с мультифрактальной природой этих скачков.

Анализ скачков курса BTC/USD проводился в рамках модели МФД, которая является развитием оригинальной модели Мандельброта «Мультифрактальная прогулка по Уолл-стрит» [2] и была разработана и протестирована в работах [3, 4, 6]. Так в работе [6] модель МФД успешно применена для описания больших скачков суточной заболеваемости во время пандемии COVID-19.

Поскольку математическая модель МФД лежит в основе данной работы, нами кратко изложены основы мультифрактальной динамики, в том числе подробно описываются уравнения этой модели, решения которых позволяют вычислить основные ее параметры D_0 , D_k , η , λ_3 для каждого большого скачка курса BTC/USD. Уравнения МФД представляют собой систему сложных нелинейных алгебраических уравнений, поэтому для их решения нами разработан комплекс программ в системе компьютерной алгебры Maple.

Результаты вычислений параметров МФД представлены в таблицах 1–3.

Данные табл. 2 указывают на высокую степень близости курса BTC/USD к мультифракталам на временных интервалах перед большими скачками. Показана бифуркационная природа скачков, связанная с мультифрактальным характером динамики курса BTC/USD перед его большими скачками.

Данные табл. 3 указывают, что необходимым условием скачка курса BTC/USD является близость значений параметров МФД D_0 и D_k , то есть выполнение условия $D_k - D_0 \ll 1$. Это свойство параметров МФД D_0 и D_k может быть, несомненно, использовано при прогнозе возникновения больших скачков курса BTC/USD.

Список литературы

1. Белкина О. «Опасная игра: подходит ли биткоин для сбережений». Газета Известия, 2021 год.

2. Данные котировок BTC/USD за произвольный период: [Электронный ресурс] Сайт компании «ФИНАМ». 2022, Режим доступа <https://www.finam.ru/profile/cryptocurrencies/btc-usd/export/свободный>
3. Kudinov A.N., Lebedev D.Y., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Mathematical model of the multifractal dynamics and analysis of heart rates// Comput Simul, 7 (3) (2015), pp. 214–221, 10.1134/S2070048215030084
4. Kudinov A.N., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Catastrophes in the multi-fractal dynamics of social-economic systems // Russ J Math Phys, 18 (2) (2011), pp. 149–155, 10.1134/S1061920811020038
5. Mandelbrot B.B. A Multifractal Walk down Wall Street // Sci Am, 280 (2) (February 1999), pp. 70–73
6. Tsvetkov V.P., Mikheev S.A., Tsvetkov I.V., Derbov V.L., Gusev A.A., Vinitsky S.I. Modeling the multifractal dynamics of COVID-19 pandemic // Chaos, Solitons and Fractals, V. 161 (2022), Article 112301. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112301>
7. Tsvetkov V.P., Mikheyev S.A., Tsvetkov I.V. Fractal phase space and fractal entropy of instantaneous cardiac rhythm // Chaos, Solitons Fractals, 108 (2018), pp. 71–76, 10.1016/j.chaos.2018.01.030

Об авторах:

ЦВЕТКОВ Виктор Павлович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой общей математики и математической физики, ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», 170100, Тверь, ул. Желябова, д. 33, e-mail: tsvetkov.vp@tversu.ru, ORCID: 0000-0001-8842-8076, Spin-код: 2779-6153

МИХЕЕВ Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики и математической физики, ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», 170100, Тверь, ул. Желябова, д. 33, e-mail: mikheev.sa@tversu.ru, ORCID: 0000-0001-7749-6460, Spin-код: 7100-8131

ПАРШИН Дмитрий Константинович – магистрант направления Математика и компьютерные науки, ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», 170100, Тверь, ул. Желябова, д. 33; e-mail: dkparshin@edu.tversu.ru, ORCID: 0000-0001-8592-308X

НЕЧАЕВА Оксана Анатольевна – студент направления Математика и компьютерные науки, ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», 170100, Тверь, ул. Желябова, д. 33; e-mail: oaulyanova1@edu.tversu.ru, ORCID: 0000-0001-7555-5076

ЦВЕТКОВ Антон Ильич – магистрант направления Математика и компьютерные науки, ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», 170100, Тверь, ул. Желябова, д. 33; e-mail: aitsvetkov@edu.tversu.ru, ORCID: 0000-0002-7007-4828.

MULTIFRACTAL NATURE OF JUMPS IN THE BTC/USD

**S.A. Mikheyev, O.A. Nechayeva, D.K. Parshin,
A.I. Tsvetkov, V.P. Tsvetkov**

Tver State University, Tver

The aim of the work is to analyze the BTC/USD rate from 01/01/2022 to 06/15/2022 based on the methods of multifractal dynamics to study the possibility of forecasting rate jumps. A total of 12 jumps were observed with amplitudes in the range of \$500-\$900 per minute. The paper shows that such high volatility is associated with the multifractal nature of these jumps. The analysis of BTC/USD exchange rate fluctuations was carried out within the framework of the multifractal dynamics model. The basics of multifractal dynamics are briefly outlined, since this model underlies this work. The article describes the equations of this model, the solutions of which make it possible to calculate its main parameters for each big jump in the BTC/USD rate. The results obtained in the article indicate a high degree of proximity of the BTC/USD rate to multifractals at time intervals before large jumps. The bifurcation nature of the jumps is shown, which is associated with the multifractal nature of the dynamics of the BTC/USD rate before its big jumps. Table data. 3 indicate that the necessary condition for the jump in the BTC/USD rate is the proximity of the values of the multifractal dynamics parameters D_0 and D_k . An element of scientific novelty is the identified property of a sharp jump in the dynamics of the BTC/USD exchange rate after the fractal dimension of the local trend approaches the values of D_0 and D_k , which can be used to predict the occurrence of large jumps in the BTC/USD exchange rate.

Keywords: *rate jumps, multifractal dynamics, multifractal parameters.*

About the authors:

CVETKOV Viktor Pavlovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of General Mathematics and Mathematical Physics, FGBOU VO “Tver State University”, 170100, Tver, st. Zhelyabova, 33, e-mail: tsvetkov.vp@tversu.ru

MIHEEV Sergej Aleksandrovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor of the Department of General Mathematics and Mathematical Physics, FGBOU VO “Tver State University”, 170100, Tver, st. Zhelyabova, 33, e-mail: mikheev.sa@tversu.ru

PARSHIN Dmitriy Konstantinovich – Master's student in Mathematics and Computer Science, FGBOU VO “Tver State University”, 170100, Tver, st. Zhelyabova, 33, e-mail: dkparshin@edu.tversu.ru

NEChAEVA Oksana Anatol'evna – Master's student in Mathematics and Computer Science, FGBOU VO “Tver State University”, 170100, Tver, st. Zhelyabova, 33, e-mail: oaulyanova1@edu.tversu.ru

TSVETKOV Anton Il'ich – Master's student in Mathematics and Computer Science, FGBOU VO “Tver State University”, 170100, Tver, st. Zhelyabova, 33, e-mail: aitsvetkov@edu.tversu.ru