МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.67

О ЙОНСОНОВСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ И КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ[1]

Дудаков С.М.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 25.11.2022, после переработки 14.12.2022.

В работах некоторых авторов было введено понятие йонсоновского многообразия и квазимногообразия и для таких классов алгебраических систем доказаны разного рода утверждения. Мы показываем, что на самом деле йонсоновские многообразия и квазимногообразия ограничиваются всего лишь классами множеств и либо пунктированных множеств в зависимости от сигнатуры. Таким образом, результаты, полученные в упомянутых выше работах другими исследователями, является тривиальными.

Ключевые слова: многообразие, квазимногообразие, йонсоновская теория.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 4. С. 5–10.
https://doi.org/10.26456/vtpmk650

Введение

Йонсоновские теории были введены в середине прошлого века для того, чтобы применять ряд результатов теории моделей первого порядка к базисному случаю. Классическая теория моделей имеет дело с элементарными отображениями, вложениями, цепями и т.д. Но при изучении конкретных алгебраических классов (групп, колец, полей) обычно приходится иметь дело не с элементарными, а с базисными отношениями. Типичный пример — присоединение корня многочлена к полю. Для того, чтобы снять это ограничение, и была предложена концепция йонсоновских теорий, для которых была бы справедлива значительная часть классических результатов, но для базисного случая.

В данной работе изучается класс йонсоновских многообразий (квазимногообразий), который был введён в работе [3]. Для этого класса алгебраических систем был получен ряд результатов.

Мы показываем, что определение йонсоновских многообразий (квазимногообразий), которое дано в работе [3], не имеет большого смысла, так как фактически

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №20-01-00435.

каждый такой класс является классом либо множеств без алгебраической структуры на них, либо пунктированных множеств. Следовательно, результаты из работы [3] тривиальны.

1. Определения

Классическая элементарная теория моделей [4] характеризуется следующими свойствами изучаемых теорий T:

1) T полна и имеет, следовательно, только бесконечные модели,

2) класс моделей T замкнут относительно объединений элементарных цепей,

3) модели T обладают свойством совместного элементарного вложения (любые две модели теории T элементарно вкладываются в некоторую третью модель теории T),

4) T обладает свойством элементарной амальгамируемости (элементарные вложения любой модели теории T в две других модели теории T можно достроить до коммутативного квадрата элементарных вложений с помощью четвёртой модели).

В алгебре и других разделах математики, однако, часто приходится иметь дело не с элементарным, а с базисным случаем. В этом случае перечисленные выше определения должны быть адаптированы к базисным формулам вместо произвольных. Это приводит к понятию йонсоновской теории (см. [2]).

Йонсоновской называется теория T, которая удовлетворяет следующим четырём свойствам:

1) T имеет бесконечную модель,

2) T индуктивна, то есть класс её моделей замкнут относительно объединения цепей,

3) T обладает свойством совместного вложения (любые две модели теории T изоморфно вкладываются в некоторую третью модель теории T),

4) T обладает свойством амальгамируемости (изоморфные вложения любой модели теории T в две других модели теории T можно достроить до коммутативного квадрата изоморфных вложений с помощью четвёртой модели).

Сразу напомним, что согласно теореме Ченя – Лося – Сушко индуктивность теории эквивалентна её $\forall\exists$-аксиоматизируемости (см. [4]).

Квазимногообразием называется класс алгебраических систем (см. [4]), который аксиоматизируется с помощью универсальных хорновских формул, то есть предложений, имеющих вид

$$(\forall \bar{x})(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \to \psi).$$

Многообразием называется класс систем (см. [4]), который аксиоматизируется с помощью универсальных тождеств, то есть предложений вида

$$(\forall \bar{x})\psi.$$

В обоих случаях $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi$ — это какие-то атомные формулы.

Как известно (см. [1]), любое многообразие и квазимногообразие содержит *единичную модель*: алгебраическую систему, состоящую из единственного элемента e. Функции в этой системе определены единственным возможным способом: $f(e, \ldots, e) = e$, а все предикаты истинны на единственном существующем в системе наборе $(e, \ldots, e)$. Это означает, что в этой единичной системе на единственном наборе истинны все атомные формулы.

Изучаемые в настоящей статье определения *йонсоновского многообразия и квазимногообразия* введены в работе [3].

Многообразие (квазимногообразие) K называется йонсоновским, если следующая теория $\forall\exists(K)$ является йонсоновской:

$$\forall\exists(K) = \mathrm{Th}(K) \cup \{\theta : \theta - \forall\exists\text{-предложение и } \\ \text{множество формул } \{\theta\} \cup \mathrm{Th}(K) \text{ совместно}\}.$$

2. Основной результат

Чтобы получить основные теоремы нашей работы, сначала установим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если K — йонсоновское многообразие (квазимногообразие), то для любого универсального тождества $(\forall\bar{x})\phi$ теория $\mathrm{Th}(K)$ содержит это тождество или его отрицание.*

Доказательство. Из определения йонсоновской теории (пункт 1) очевидным образом вытекает, что она совместна. Следовательно, для йонсоновского многообразия (квазимногообразия) K теория $\forall\exists(K)$ должна быть совместной. Это означает, что среди предложений θ в множестве

$$\{\theta : \theta - \forall\exists\text{-предложение и множество формул } \{\theta\} \cup \mathrm{Th}(K) \text{ совместно}\}$$

не может быть одновременно тождества $(\forall\bar{x})\phi$ и его отрицания $\neg(\forall\bar{x})\phi \equiv (\exists\bar{x})\neg\phi$. Заметим, что обе эти формулы являются $\forall\exists$-формулами, поэтому одна из них должна быть несовместной с теорией $\mathrm{Th}(K)$. Но формула несовместна с теорией тогда и только тогда, когда теория содержит отрицание этой формулы. □

Лемма 2. *Если K — йонсоновское многообразие (квазимногообразие), то теория $\mathrm{Th}(K)$ содержит все универсальные тождества $(\forall\bar{x})\phi$.*

Доказательство. Из предыдущей леммы вытекает, что теория $\mathrm{Th}(K)$ содержит тождество $(\forall\bar{x})\phi$ или его отрицание $\neg(\forall\bar{x})\phi$. Допустим, что теория $\mathrm{Th}(K)$ содержит отрицание тождества $\neg(\forall\bar{x})\phi \equiv (\exists\bar{x})\neg\phi$. Но это невозможно, так как единичная система принадлежит многообразию (квазимногообразию) K и в ней выполнены все формулы теории $\mathrm{Th}(K)$, а с другой стороны, в ней же на единственном наборе истинна атомная формула ϕ, то есть ложно $(\exists\bar{x})\neg\phi$. □

Лемма 3. *Пусть K — йонсоновское многообразие (квазимногообразие), $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебраическая система из K. Тогда*

1) *для любого* n*-местного предикатного символа* R *и любых* $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ *выполнено* $\mathfrak{A} \models R(a_1, \ldots, a_n)$*;*

2) *существует* $a \in \mathfrak{A}$ *такой, что для любого* n*-местного функционального символа* f *и любых* $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ *выполнено* $\mathfrak{A} \models a = f(a_1, \ldots, a_n)$*.*

Доказательство. Пусть R — любой n-местный предикатный символ. Тогда из $\mathrm{Th}(K)$ следует тождество $(\forall \bar{x}) R(\bar{x})$, то есть в любой системе $\mathfrak{A} \in K$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ выполнено $\mathfrak{A} \models R(a_1, \ldots, a_n)$.

Пусть f, g — любые n- и m-местный соответственно функциональные символы (возможно, совпадающие). Тогда из $\mathrm{Th}(K)$ следует тождество $(\forall \bar{x}, \bar{y}) f(\bar{x}) = g(\bar{y})$, то есть в любой системе $\mathfrak{A} \in K$ для любых $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathfrak{A}$ выполнено $\mathfrak{A} \models f(a_1, \ldots, a_n) = g(b_1, \ldots, b_m)$. Но это означает, что значение всех сигнатурных функций на любых аргументах равно одному и тому же элементу $a \in \mathfrak{A}$, что и влечёт требуемое утверждение. $\square$

Теорема 1. *Пусть сигнатура* Σ *не содержит функциональных символов,* K *— йонсоновское многообразие (квазимногообразие). Тогда на любом множестве* A *единственным образом определяется интерпретация символов* Σ *так, чтобы полученная система стала элементом* K*.*

Иными словами, все элементы K *однозначно определяются своим носителем.*

Теорема 2. *Пусть сигнатура* Σ *содержит функциональные символы,* K *— йонсоновское многообразие (квазимногообразие). Тогда на любом множестве* A *интерпретация символов* Σ *так, чтобы полученная система стала элементом* K*, однозначно определяется произвольным элементом* $a \in A$ *— значением функций.*

Иначе говоря, все элементы K *однозначно определяются своим носителем и произвольным его элементом.*

Доказательство обеих теорем. Непосредственно вытекает из леммы 3. $\square$

Таким образом, любое йонсоновское многообразие (квазимногообразие) семантически ничем не отличается от соответствующего класса множеств (если сигнатура содержит только предикатные символы) или пунктированных множеств.

Заключение

Мы продемонстрировали, что ранее введённые понятия йонсоновских многообразий и квазимногообразий не представляют значительного интереса, так как фактически являются хорошо изученными классами множеств либо пунктированных множеств.

Список литературы

[1] Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

[2] Jonsson B. Homogeneous universal relational systems // Mathematica Scandinavica. 1960. № 8. Pp. 137–142.

[3] Yeshkeyev A.R. On Jonsson varieties and quasivarieties // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. 2021. Vol. 104, № 4. Pp. 151–157.

[4] Hodges W. Model Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 786 p.

Образец цитирования

Дудаков С.М. О йонсоновских многообразиях и квазимногообразиях // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 4. С. 5–10. https://doi.org/10.26456/vtpmk650

Сведения об авторах

1. **Дудаков Сергей Михайлович**
декан факультета прикладной математики и кибернетики Тверского госуниверситета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: sergeydudakov@yandex.ru

ON JONSSON VARIETIES AND QUASIVARIETIES

Dudakov Sergey Mikhailovich
Head of Applied Mathematics and Cybernetics Faculty, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33, Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: sergeydudakov@yandex.ru

Received 25.11.2022, revised 14.12.2022.

Earlier the notion of a Jonsson varieties and quasivarieties was introduced. For these classes of algebraic structures various assertions were proven by some researchers. We show that Jonsson varieties and quasivarieties are exactly classes of sets or pointed sets, it depends on signature. Thus, the results from the works mentioned above are trivial.

Keywords: variety, quasivariety, Jonsson theory.

Citation

Dudakov S.M., "On Jonsson varieties and quasivarieties", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 4, 5–10 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk650

References

[1] Maltsev A.I., *Algebraic systems*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, and Berlin, 1973.

[2] Jonsson B., "Homogeneous universal relational systems", *Mathematica Scandinavica*, 1960, № 8, 137–142.

[3] Yeshkeyev A.R., "On Jonsson varieties and quasivarieties", *Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series*, **104**:4 (2021), 151–157.

[4] Hodges W., *Model Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, 786 pp.