УДК 517.9

К ВОПРОСУ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ КОЛЕБАНИЯ ДВУХ СЛАБОСВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Баева О.В.*, **Куликов Д.А.****
*Академия ФСИН России, г. Рязань
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, г. Ярославль

Поступила в редакцию 17.10.2022, после переработки 08.11.2022.

Изучается система двух слабосвязанных полностью идентичных осцилляторов Ван дер Поля в случае диффузионной связи.В работе изучен в полном объеме вопрос о существовании и устойчивости периодических решений рассматриваемой системы. Показано, что у нее могут быть периодические решения трех типов, которые порождают циклы Андронова-Хопфа, противофазный, и третий тип циклов синхронизации: асимметричные циклы. Анализ задачи использовал метод нормальных форм Пуанкаре-Дюлака, а также метод интегральных многообразий.

Ключевые слова: осциллятор Ван дер Поля, синхронизация автоколебаний, нормальная форма, устойчивость, циклы, асимптотика периодических решений.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 4. С. 24–38.
https://doi.org/10.26456/vtpmk648

Введение

Одним из наиболее известных уравнений теории нелинейных колебаний можно считать следующее дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{u} - 2\varepsilon\alpha\dot{u} + \omega^2 u + au^2\dot{u} = 0, \tag{1}$$

которое называют осциллятором Ван дер Поля. Здесь $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1, \omega, a, \alpha$ – положительные постоянные.

Хорошо известно [1], что при $a > 0, \alpha > 0$ дифференциальное уравнение (1) имеет орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл – цикл Андронова – Хопфа (АХЦ). Он порождается семейством периодических решений

$$u_p(t, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\xi \cos(t + h) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

где $\xi = \sqrt{2\alpha/a}, h \in R$ – произвольная действительная постоянная. Естественно, что последняя асимптотическая формула может быть уточнена.

В теории нелинейных колебаний отдельно можно выделить раздел, который принято называть теорией синхронизации. Он посвящен изучению взаимодействия двух или нескольких автоколебательных систем. Одной из самых известных задач можно считать вопрос о взаимодействии (синхронизации) двух полностью идентичных осцилляторов Ван дер Поля при наличии слабой диффузионной связи (см., например, [2-3]). С математической точки зрения эта физическая задача приводит к необходимости анализа системы из двух следующих уравнений

$$\begin{aligned} &\ddot{u}_1 - 2\varepsilon\alpha\dot{u}_1 + \omega^2 u_1 + a u_1^2 \dot{u}_1 + \varepsilon\gamma(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = 0, \\ &\ddot{u}_2 - 2\varepsilon\alpha\dot{u}_2 + \omega^2 u_2 + a u_2^2 \dot{u}_2 + \varepsilon\gamma(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\gamma \in R$ и при $\gamma = 0$ получаем систему из двух отдельных осцилляторов Ван дер Поля, которые полностью идентичны (см. уравнение (1)). Последние слагаемые в обоих уравнениях системы (2) отвечают за связь между осцилляторами, а наличие в качестве множителя малого параметра ε означает, что рассматривается «слабая» связь между осцилляторами. В рамках данной статьи изучается такой вариант связи, которая носит название диссипативной (диффузионно диссипативной) связи, если $\gamma < 0$, а при $\gamma > 0$ такой вариант связи называют активной (диффузионной активной связью) [2-5]. Последняя терминология широко используется в радиофизике.

Подчеркнем, что система дифференциальных уравнений (2) имеет периодическое решение $C_{\text{АХЦ}}(u_p(t,\varepsilon), u_p(t,\varepsilon))$, где $u_p(t,\varepsilon)$ – периодическое решение дифференциального уравнения (1) и такой цикл принято называть синхронным циклом или однородным, что зависит иногда от области приложений в которой система уравнений (2) используется в качестве математической модели. Для этого цикла используют и третий вариант названия: цикл Андронова-Хопфа (АХЦ). Далее будем использовать последний вариант названия, т.е. АХЦ.

Нетрудно заметить, что система уравнений (2) имеет и иной цикл (противофазный цикл (ПЦ)) $C_{\text{ПЦ}} : (v(t,\varepsilon), -v(t,\varepsilon))$, где $v(t,\varepsilon)$ цикл уже вспомогательного варианта осциллятора Ван дер Поля

$$\ddot{v} - 2\varepsilon\beta\dot{v} + \omega^2 v + a v^2 \dot{v} = 0,$$

где $\beta = \alpha + \gamma$. Может показаться, что в силу полной идентичности уравнений системы (2) циклы АХЦ и ПЦ исчерпывают все синхронные режимы функционирования системы дифференциальных уравнений (2). В данной работе будет показано, что динамика решений системы (2) богаче и она имеет циклы, отличные от циклов АХЦ и ПЦ.

В данной работе будем изучать систему дифференциальных уравнений (2). Для нее будут найдены все ее периодические решения, которые принадлежат малой окрестности состояния равновесия $S_0 : u_1 = u_2 = 0$, а также будет дан ответ об их устойчивости в смысле классического определения А.М. Ляпунова. Подчеркнем, что соответствующие циклы: АХЦ, ПЦ, а также отличные от них описывают режимы синхронизации (иногда говорят об «обобщенной» синхронизации, а классический ее вариант понимают как реализацию АХЦ). Для анализа поставленных вопросов будет использован метод нормальных форм Пуанкаре-Дюлака (см., например, [6-8]), который и позволит найти циклы, отличные от циклов АХЦ и ПЦ.

Подчеркнем, что использование аппарата теории нормальных форм позволит дать ответ об устойчивости всех найденных периодических решений.

В заключении этого раздела отметим, что вопрос об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (2) решается достаточно стандартно и сводится к анализу линеаризованной системы дифференциальных уравнений (2), т.е. к анализу следующей системы

$$\begin{aligned} &\ddot{u}_1 - 2\varepsilon\alpha\dot{u}_1 + \omega^2 u_1 + \varepsilon\gamma(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = 0, \\ &\ddot{u}_2 - 2\varepsilon\alpha\dot{u}_2 + \omega^2 u_2 + \varepsilon\gamma(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Для анализа устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений (3) положим $u_1(t) = \exp(\lambda t)y_1, u_2(t) = \exp(\lambda t)y_2$, где $y_1, y_2 \in C\,(R)$. Через C обозначено поле комплексных чисел, а через R – поле действительных чисел. Параметр λ подлежит определению. В результате такой подстановки получим систему линейных однородных уравнений

$$B(\lambda)y = 0,\ y = colon(y_1, y_2), \tag{4}$$

где матрица второго порядка B зависит от λ :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & b_{12}(\lambda) \\ b_{21}(\lambda) & b_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $b_{11}(\lambda) = \lambda^2 - (2\alpha+\gamma)\varepsilon\lambda + \omega^2$, $b_{12}(\lambda) = \varepsilon\gamma\lambda, b_{21}(\lambda) = \varepsilon\gamma\lambda$, $b_{22}(\lambda) = \lambda^2 - (2\alpha+\gamma)\varepsilon\lambda + \omega^2$.

Система алгебраических уравнений (4) имеет нетривиальные решения, если ее определитель равен нулю. Это после преобразований приводит к двум квадратным уравнениям для нахождения λ

$$\lambda^2 - 2\varepsilon\alpha\lambda + \omega^2 = 0,\ \lambda^2 - 2\varepsilon(\alpha+\gamma)\lambda + \omega^2 = 0.$$

Их корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, если выполнены два следующих неравенства

$$\alpha < 0,\ \alpha + \gamma < 0.$$

Следовательно, справедливо утверждение.

Лемма 1. *Нулевое решение нелинейной системы (2) асимптотически устойчиво, если*

$$\alpha < 0,\ \alpha + \gamma < 0.$$

Доказательство вытекает из предшествующих вычислений и теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости по первому (линейному) приближению.

В следующих разделах изучим структуру окрестности нулевого решения системы (2) в более детальной форме.

2. Построение нормальной формы

В данном разделе построим нормальную форму системы дифференциальных уравнений (2). При этом будем следовать методике работы [6-8]. Более детальное обсуждение теории нормальных форм можно найти в монографиях [9-11].

Итак, будем искать решение системы дифференциальных уравнений (2) в следующем виде

$$\begin{aligned} u_1(t,s,\varepsilon) &= \varepsilon^{1/2}x_1(t,s) + \varepsilon y_1(t,s) + \varepsilon^{3/2}v_1(t,s) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ u_2(t,s,\varepsilon) &= \varepsilon^{1/2}x_2(t,s) + \varepsilon y_2(t,s) + \varepsilon^{3/2}v_2(t,s) + o(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $s = \varepsilon t$ – «медленное» время,

$$\begin{aligned} x_1(t,s) &= z_1(s)\exp(i\omega t) + \overline{z}_1(s)\exp(-i\omega t), \\ x_2(t,s) &= z_2(s)\exp(i\omega t) + \overline{z}_2(s)\exp(-i\omega t). \end{aligned}$$

Функции $y_1(t,s), y_2(t,s), v_1(t,s), v_2(t,s)$ принадлежат классу функций Φ. При этом функция $w(t,s) \in \Phi$, если она обладает следующими свойствами:

P1) она непрерывна по совокупности переменных;

P2) по t имеет период 2π;

P3)

$$\frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} w(t,s)\exp(\pm i\omega t)dt = 0.$$

Подставим сумму (5) в систему дифференциальных уравнений (2) и выделим слагаемые при $\varepsilon^{1/2}, \varepsilon, \varepsilon^{3/2}$ и т.д. В результате получим последовательность линейных неоднородных уравнений. Для определения $x_1(t,s), x_2(t,s)$ получим следующую систему линейных дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0,\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 0,$$

у которой уже были указаны решения.

Приравняем теперь коэффициенты при ε и $\varepsilon^{3/2}$ получаем систему дифференциальных уравнений для определения $y_1(t,s), y_2(t,s)$

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 = 0,\ \ddot{y}_2 + \omega^2 y_2 = 0, \tag{6}$$

а также неоднородную систему для определения $v_1(t,s), v_2(t,s)$

$$\ddot{v}_1 + \omega^2 v_1 = \Psi_1(t,s),\ \ddot{v}_2 + \omega^2 v_2 = \Psi_2(t,s), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(t,s) &= -2\frac{\partial^2 x_1}{\partial s\partial t} + 2\alpha\frac{\partial x_1}{\partial t} - ax_1^2\dot{x}_1 - \gamma(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \Psi_2(t,s) &= -2\frac{\partial^2 x_2}{\partial s\partial t} + 2\alpha\frac{\partial x_2}{\partial t} - ax_2^2\dot{x}_2 - \gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \end{aligned}$$

Если функции $y_1(t,s), y_2(t,s) \in \Phi$, то, как нетрудно проверить, система уравнений (6) имеет решение $y_1 = y_2 = 0$. Из условий разрешимости в классе функций из Φ, т.е. выполнения равенств

$$\frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega} \Psi_j(t,s)\exp(\pm i\omega t)dt = 0,\ j = 1,2,$$

следует, что функции $z_1(s), z_2(s)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= \alpha z_1 - \frac{a}{2}|z_1|^2 z_1 + \frac{\gamma}{2}(z_1 - z_2), \\ z_2' &= \alpha z_2 - \frac{a}{2}|z_2|^2 z_2 + \frac{\gamma}{2}(z_2 - z_1), \end{aligned} \tag{8}$$

где $z_j = z_j(s), j = 1, 2$. Напомним, что $a > 0$. При таком варианте выбора знака для a замена

$$s = 2\tau,\ z_j = \frac{w_j}{\sqrt{a}},\ j = 1, 2$$

приводит систему дифференциальных уравнений (8) к нормированной системе для $w_j(\tau)\,(j = 1, 2)$

$$\begin{aligned} w_1' &= 2\alpha w_1 - w_1|w_1|^2 + \gamma(w_1 - w_2), \\ w_2' &= 2\alpha w_2 - w_2|w_2|^2 + \gamma(w_2 - w_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Систему дифференциальных уравнений (9) (или (8)) принято называть нормальной формой (НФ) или «укороченной» НФ (см. [11]).

Докажем, что система дифференциальных уравнений (9) диссипативна. Для этого рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} w_1' &= 2\alpha w_1 - w_1|w_1|^2 + \gamma(w_1 - w_2),\ \overline{w}_1' = 2\alpha\overline{w}_1 - \overline{w}_1|w_1|^2 + \gamma(\overline{w}_1 - \overline{w}_2), \\ w_2' &= 2\alpha w_2 - w_2|w_2|^2 + \gamma(w_2 - w_1),\ \overline{w}_2' = 2\alpha\overline{w}_2 - \overline{w}_2|w_2|^2 + \gamma(\overline{w}_2 - \overline{w}_1). \end{aligned} \tag{10}$$

Домножим первое уравнение системы (10) на $\overline{w}_1$, второе уравнение на w_1, третье уравнение на $\overline{w}_2$, и, наконец, четвертое на w_2, а затем полученные равенства сложим. В результате получим равенство

$$\frac{d}{dt}(|w_1|^2+|w_2|^2) = 4\alpha(|w_1|^2+|w_2|^2)-2(|w_1|^4+|w_2|^4)+2\gamma(|w_1|^2+|w_2|^2-w_1\overline{w}_2-\overline{w}_1 w_2).$$

Отметим, что

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 - w_1\overline{w}_2 - \overline{w}_1 w_2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

где $w_1 = x_1 + iy_1, w_2 = x_2 + iy_2$. Наконец,

$$-2(|w_1|^4 + |w_1|^4) \leq (|w_1|^2 + |w_2|^2)^2,\ V = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = |w_1|^2 + |w_2|^2.$$

Пусть $V = V(t) = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = |w_1|^2 + |w_2|^2$. В результате получаем неравенство

$$\frac{dV}{dt} \leq 4\alpha V - V^2 + 4|\gamma|V.$$

Следовательно, функция $V(t)$ имеет геометрический смысл квадрата расстояния от решения системы дифференциальных уравнений (9) в момент времени t до начала координат. Если при $t = 0$ $V(t_0) > R = 4|\gamma| + 4|\alpha|$, то функция $V(t)$ убывает. Следовательно, все решения системы дифференциальных уравнений (9) с течением времени попадают в шар радиуса $R_\mu = 4|\gamma| + 4|\alpha| + \mu\,(\mu > 0)$. При этом μ может быть достаточно малой положительной постоянной. Подчеркнем, что, если $\alpha + |\gamma| < 0$, о все решения системы дифференциальных уравнений (9) приближаются к началу координат.

Итак, во всех случаях решения системы дифференциальных уравнений (9) попадают в некоторый шар с центром в нуле. Это означает, что система дифференциальных уравнений (9) диссипативна [12]. При этом данный вывод не зависит от знака постоянной γ.

3. Анализ нормальной формы

В данном разделе будем изучать систему дифференциальных уравнений (9), у которой найдем периодические решения. Для этого перепишем систему (9), используя для функций $w_1(\tau), w_2(\tau)$ тригонометрическую форму, т.е. положим

$$w_1(\tau) = \rho_1(\tau)\exp(i\varphi_1(\tau)),\ w_2(\tau) = \rho_2(\tau)\exp(i\varphi_2(\tau)), \tag{11}$$

где $\rho_1(\tau), \rho_2(\tau) > 0, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau) \in R$. Замена (11) приводит систему дифференциальных уравнений (9) к следующему виду

$$\begin{gathered}\rho_1' = 2\alpha\rho_1 - \rho_1^3 + \gamma(\rho_1 - \rho_2\cos\psi),\ \ \rho_2' = 2\alpha\rho_2 - \rho_2^3 + \gamma(\rho_2 - \rho_1\cos\psi),\\ \varphi_1' = -\frac{\gamma\rho_2\sin\psi}{\rho_1},\ \varphi_2' = \frac{\gamma\rho_1\sin\psi}{\rho_2},\end{gathered} \tag{12}$$

где $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. Наконец, для «медленных» переменных $\rho_1(\tau), \rho_2(\tau), \psi(\tau)$ получаем систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\rho_1' = 2\alpha\rho_1 - \rho_1^3 + \gamma(\rho_1 - \rho_2\cos\psi),\ \rho_2' = 2\alpha\rho_2 - \rho_2^3 + \gamma(\rho_2 - \rho_1\cos\psi),\\ \psi' = \gamma\Big(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\Big)\sin\psi.\end{gathered} \tag{13}$$

Для того, чтобы восстановить основные переменные $w_1(\tau), w_2(\tau)$ к системе дифференциальных уравнений (13) следует добавить одно из двух последних уравнений системы (12). Например,

$$\varphi_2' = \gamma\frac{\rho_1}{\rho_2}\sin\psi.$$

Перейдем к анализу системы дифференциальных уравнений (13). Из предыдущих построений вытекает, что каждому состоянию равновесия системы дифференциальных уравнений (13) соответствуют периодические решения НФ (9), а также и системы дифференциальных уравнений (2).

Поэтому изучим вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия у системы дифференциальных уравнений (13). Пусть $\rho_1(s) = \eta_1, \rho_2(s) = \eta_2, \psi(s) = \Theta$, где, естественно, $\eta_1, \eta_2 > 0$, а $\Theta \in R$, но без нарушения общности можно считать, что $\Theta \in [0, 2\pi)$.

Очевидно что для третьей координаты состояния равновесия Θ характерно равенство

$$\sin\Theta = 0.$$

Тем самым следует выделить 2 варианта $\Theta = 0$ или $\Theta = \pi$.

Вариант 1. Пусть $\Theta = 0$. Оставшиеся координаты состояния равновесия системы (13) в таком случае следует искать как решения следующей системы алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}2\alpha\eta_1 - \eta_1^3 + \gamma(\eta_1 - \eta_2) = 0,\\ 2\alpha\eta_2 - \eta_2^3 + \gamma(\eta_2 - \eta_1) = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Напомним, что $\eta_1, \eta_2 > 0$ и существуют, в свою очередь, две возможности

$$1)\, \eta_1 = \eta_2;\ \ 2)\, \eta_1 \neq \eta_2.$$

Если $\eta_1 = \eta_2$, то состояние равновесия $S_0(\eta_1, \eta_1, 0)$ существует, если $\alpha > 0$ и любом γ, при этом $\eta_1 = \eta_2 = \sqrt{2\alpha}$. Итак, S_0 имеет координаты

$$\eta_1 = \sqrt{2\alpha},\ \eta_2 = \sqrt{2\alpha},\ \Theta = 0.$$

Вторая возможность предусматривает, что $\eta_1 \neq \eta_2$. В силу симметрии задачи можно сразу отметить, что если существует состояние равновесия $S_1(\eta_1, \eta_2, 0)$, то существует и состояние равновесия $S_2 = (\eta_2, \eta_1, 0)$.

Положим $\eta_2 = \mu\eta_1$, где $\mu > 0$ и $\mu \neq 1$. Следовательно, после элементарных преобразований получаем, что система алгебраических уравнений (14) перепишется в следующем виде

$$2\alpha + \gamma(1-\mu) = \eta_1^2,\ 2\alpha\mu + \gamma(\mu - 1) = \mu^3\eta_1^2. \tag{15}$$

У системы алгебраических уравнений (15) следует искать только положительные решения ($\mu > 0, \eta_1 > 0$). Исключив η_1, получаем, что μ – положительный корень алгебраического уравнения

$$\frac{2\alpha + \gamma(1-\mu)}{2\alpha\mu + \gamma(\mu-1)} = \frac{1}{\mu^3}$$

или в более стандартной форме записи

$$2\alpha(\mu^3 - \mu) = \gamma(\mu - 1)(\mu^3 + 1).$$

У последнего уравнения есть два корня $\mu = 1$ и $\mu = -1$. Оба эти корня не подходят. Корень $\mu = 1$ приводит к равенству $\eta_1 = \eta_2$, которое в свою очередь приводит к состоянию равновесия S_0. Оставшиеся корни $\mu_1, \mu_2 > 0$ следует искать как корни уже квадратного уравнения

$$\mu^2 - (1+\beta)\mu + 1 = 0,\ \beta = 2\frac{\alpha}{\gamma}. \tag{16}$$

Уравнение (16) имеет положительные корни, если $\beta \in (1, \infty)\, (1 + \beta > 0, \beta^2 + 2\beta - 3 > 0)$. Следовательно, квадратное уравнение (16) имеет подходящие корни, если выполнено неравенство $\beta > 1$ или в иной записи $(2\alpha - \gamma)/\gamma > 0$.

Выберем, например, больший положительный корень уравнения (16). Тогда $\eta_1^2 = 2\alpha + \gamma(1 - \mu_2) = \gamma\mu_1$, где μ_1 уже меньший положительный корень уравнения (16). Следовательно, $\eta_2^2 = \gamma\mu_2\, (\mu_1\mu_2 = 1)$. Итак, получили состояние равновесия $S_1 = (\sqrt{\gamma\mu_1}, \sqrt{\gamma\mu_2}, 0)$. Наряду с ним система дифференциальных уравнений (13) имеет состояние равновесия $S_2 = (\sqrt{\gamma\mu_2}, \sqrt{\gamma\mu_1}, 0)$. Доказано утверждение.

Лемма 2. *Система дифференциальных уравнений (13) имеет состояние равновесия $S_0 = (\sqrt{2\alpha}, \sqrt{2\alpha}, 0)$, если $\alpha > 0$ и два асимметричных состояния равновесия $S_1 = (\sqrt{\gamma\mu_1}, \sqrt{\gamma\mu_2}, 0), S_2 = (\sqrt{\gamma\mu_2}, \sqrt{\gamma\mu_1}, 0)$, где μ_1, μ_2 корни квадратного уравнения (16): $\mu_{1,2} = \Big((1+\beta) \mp \sqrt{\beta^2 + 2\beta - 3}\Big)/2$. Последние состояния равновесия существуют, если*

$$\gamma > 0,\ 2\alpha - \gamma > 0.$$

Перейдем к вопросу об устойчивости найденных состояний равновесия S_0, S_1, S_2, у которых, напомним, третья координата $\Theta = 0$. Вопрос об их устойчивости в первом (линейном) приближении сводится к анализу расположения собственных значений соответствующей матрицы Якоби

$$J = \begin{pmatrix} 2\alpha - 2\eta_1^2 + \gamma & -\gamma & 0 \\ -\gamma & 2\alpha - 3\eta_2^2 + \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\Big(\dfrac{\eta_1}{\eta_2} + \dfrac{\eta_2}{\eta_1}\Big) \end{pmatrix},$$

где η_1, η_2 – координаты соответствующего состояния равновесия (S_0, S_1 или S_2).

Пусть сначала рассматривается S_0, т.е. $\eta_1 = \eta_2 = \sqrt{2\alpha}, \Theta = 0$. Достаточно простой анализ матрицы J показывает, что при $\gamma > 0$ у нее третье собственное число всегда положительно. Если же $\gamma < 0$, то все ее собственные числа действительны и отрицательны.

При анализе асимптотической устойчивости S_1, S_2 следует учесть, что они существуют, если $\gamma > 0$. Поэтому собственное значение $\lambda_3 > 0$.

Итак, справедливо утверждение.

Лемма 3. *Состояние равновесия S_0 асимптотически устойчиво, если $\gamma < 0$ и неустойчиво, если $\gamma > 0$. Состояния равновесия S_1, S_2 всегда неустойчивы.*

Вариант 2. Пусть $\psi = \Theta = \pi$. В этом случае оставшиеся координаты состояния равновесия обозначим через ξ_1, ξ_2 ($\rho_1(s) = \xi_1, \rho_2(s) = \xi_2$). Их следует искать как решения следующей системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 2\alpha\xi_1 - \xi_1^3 + \gamma(\xi_1 + \xi_2) = 0, \\ 2\alpha\xi_2 - \xi_2^3 + \gamma(\xi_1 + \xi_2) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

У системы (17) существует решение $S_3 : \xi_1 = \xi_2 = \sqrt{2(\alpha + \gamma)}$, если $\alpha + \gamma > 0$.

Пусть теперь состояние равновесия S_4 имеет координаты (ξ_1, ξ_2, π), где $\xi_1 \neq \xi_2$ и, следовательно, $S_5 : (\xi_2, \xi_1, \pi)$. Положим $\xi_2 = \mu\xi_1$ ($\mu > 0$). В результате для определения положительных μ, η_1 получим систему алгебраических уравнений ($\mu \neq 1$)

$$\begin{aligned} 2\alpha + \gamma(1 + \mu) = \xi_1^2, \\ 2\alpha\mu + \gamma(1 + \mu) = \mu^3\xi_1^2. \end{aligned}$$

В свою очередь, для определения μ получаем уравнение

$$\frac{2\alpha + \gamma(1 + \mu)}{2\alpha\mu + \gamma(1 + \mu)} = \frac{1}{\mu^3}$$

или $\gamma(1 + \mu)(\mu^3 - 1) = 2\alpha\mu(1 - \mu^2)$. Как и в предыдущем случае у последнего уравнения есть посторонние для нашей задачи корни $\mu = \pm 1$. Представляющие интерес корни следует искать как корни следующего квадратного уравнения

$$\mu^2 + (1 + \beta)\mu + 1 = 0, \; \beta = \frac{2\alpha}{\gamma}, \tag{18}$$

у которого существуют положительные корни, если $1 + \beta < 0, \beta^2 + 2\beta - 3 > 0$, т.е. при $\beta \in (-\infty, -3)$ или в иной форме записи при $(2\alpha + 3\gamma)/\gamma < 0$.

Следовательно, можно положить

$$\xi_1^2 = 2\alpha + \gamma(1+\mu_1),$$

где μ_1 – меньший корень квадратного уравнения (18). После преобразований получаем, что состояние равновесия S_4 имеет координаты $\xi_1 = \sqrt{-\gamma\mu_1}, \xi_2 = \sqrt{-\gamma\mu_2}$, где μ_2 – больший корень квадратного уравнения (18) ($\mu_1 < \mu_2$). В силу симметрии, аналогично предыдущему случаю ($\psi = \Theta = 0$) можно указать, что существует состояние равновесия S_5, которое имеет координаты $\xi_1 = \sqrt{-\gamma\mu_2}, \xi_2 = \sqrt{-\gamma\mu_1}$.

Лемма 4. *У системы дифференциальных уравнений (13) могут существовать следующие состояния равновесия*

$$S_3 : \xi_1 = \xi_2 = \sqrt{2(\alpha+\gamma)},\ \Theta = \pi;\ \ S_4 : \xi_1 = \sqrt{-\gamma\mu_1},\ \xi_2 = \sqrt{-\gamma\mu_2}, \Theta = \pi;$$
$$S_5 : \xi_1 = \sqrt{-\gamma\mu_2},\ \xi_2 = \sqrt{-\gamma\mu_1},\ \Theta = \pi.$$

Состояние равновесия S_3 существует, если $\alpha + \gamma > 0$. Состояния равновесия S_4, S_5 существуют, если $\gamma < 0, 2\alpha + 3\gamma > 0$. В последних формулах для амплитуд состояний равновесия через μ_1, μ_2 обозначены корни квадратного уравнения (18).

Анализ устойчивости состояний равновесия S_3, S_4, S_5 системы дифференциальных уравнений (13) показывает, что справедливо утверждение.

Лемма 5. *Состояние равновесия S_3 асимптотически устойчиво, если $\gamma > 0$, а состояние равновесия S_4, S_5 всегда неустойчивы.*

Подчеркнем, что состояния равновесия S_1, S_2, S_4, S_5 неустойчивы всегда, если существуют.

4. Основные результаты

В предыдущем разделе были найдены состояния равновесия $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ вспомогательной системы дифференциальных уравнений (13). Она была получена из системы дифференциальных уравнений (8), которую следует называть НФ (или «укороченной» НФ). Возвращаясь от системы дифференциальных уравнений (13) к НФ (8) получаем, что справедливы утверждения.

1) Состоянию равновесия S_0 соответствует семейство состояний равновесия НФ (8)

$$E_0(h):\ z_1 = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{a}}\exp(ih),\ z_2 = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{a}}\exp(ih).$$

2) Состояниям равновесия S_1, S_2 соответствуют два семейства состояний равновесия НФ (8)

$$E_1(h):\ z_1 = \frac{\sqrt{\gamma\mu_1}}{\sqrt{a}}\exp(ih),\ z_2 = \frac{\sqrt{\gamma\mu_2}}{\sqrt{a}}\exp(ih),$$
$$E_2(h):\ z_1 = \frac{\sqrt{\gamma\mu_2}}{\sqrt{a}}\exp(ih),\ z_2 = \frac{\sqrt{\gamma\mu_1}}{\sqrt{a}}\exp(ih).$$

Напомним, что здесь μ_1, μ_2 – корни квадратного уравнения (16).

3) Состоянию равновесия S_3 соответствует однопараметрическое семейство состояний равновесия НФ (8)

$$E_3(h):\ z_1 = \frac{\sqrt{2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{a}}\exp(ih),\ z_2 = -z_1.$$

4) Наконец, состояниям равновесия S_4, S_5 соответствуют два семейства состояний равновесия НФ (8):

$$E_4(h):\ z_1 = \frac{\sqrt{-\gamma\mu_1}}{\sqrt{a}}\exp(ih),\ \ z_2 = -\frac{\sqrt{-\gamma\mu_2}}{\sqrt{a}}\exp(ih),$$
$$E_5(h):\ z_1 = \frac{\sqrt{-\gamma\mu_2}}{\sqrt{a}}\exp(ih),\ \ z_2 = -\frac{\sqrt{-\gamma\mu_1}}{\sqrt{a}}\exp(ih),$$

где μ_1, μ_2 – корни квадратного уравнения (18).

Здесь везде h – произвольная действительная постоянная. При переходе к формулам для семейств состояний равновесия $E_3(h), E_4(h), E_5(h)$ было учтено, что $\exp(i\pi) = -1$. Переход от НФ (8) к основной системе (2) использует равенства (5).

Итак, справедливы утверждения.

Теорема 1. *Существует такая постоянная $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ состоянию равновесия S_0 системы дифференциальных уравнений (13) соответствует цикл C_0 системы дифференциальных уравнений (2)*

$$u_1(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon),$$
$$u_2(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon),$$

где $h \in R$ и произвольна. Цикл C_0 существует, если $\alpha > 0$ и он устойчив, если выполнено неравенство $\gamma < 0$.

Теорема 2. *Существует такая постоянная $\varepsilon_3 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ состоянию равновесия S_3 соответствует цикл C_3 системы дифференциальных уравнений (2)*

$$u_1(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon),$$
$$u_2(t,\varepsilon) = -2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{2(\alpha+\gamma)}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon).$$

Этот цикл существует, если $\alpha + \gamma > 0$ и он устойчив если $\gamma > 0$.

Напомним, что в этом случае $\psi = 0$ $(\Theta = \pi)$, если $\varphi_1(t) = h_1$, то $\varphi_2(t) = h_1 + \pi$.

Теорема 3. *Существует такая постоянная $\varepsilon_2 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ состояниям равновесия S_1, S_2 соответствуют циклы C_1, C_2 системы дифференциальных уравнений (2). Так, для $C_1(h)$ справедлива асимптотическая формула*

$$u_1(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{\gamma\mu_1}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon),$$
$$u_2(t,\varepsilon) = -2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{\gamma\mu_2}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon),$$

а для C_2 она имеет следующий вид

$$u_1(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{\gamma\mu_2}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon),$$
$$u_2(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{\gamma\mu_1}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon).$$

Здесь μ_1, μ_2 – корни квадратного уравнения (16).

Оба эти цикла существуют, если $\gamma > 0, 2\alpha - \gamma > 0$. При всех значениях параметров они неустойчивы.

Теорема 4. *Существует такая постоянная $\varepsilon_5 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_5)$ состояниям равновесия S_4, S_5 системы дифференциальных уравнений (13) соответствуют циклы C_4, C_5 системы дифференциальных уравнений (2). Так для цикла C_4 справедлива следующая асимптотическая формула*

$$u_1(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{-\gamma\mu_1}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon),$$
$$u_2(t,\varepsilon) = -2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{-\gamma\mu_2}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon),$$

а для C_5 она имеет следующий вид

$$u_1(t,\varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{-\gamma\mu_2}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon),$$
$$u_2(t,\varepsilon) = -2\varepsilon^{1/2}\frac{\sqrt{-\gamma\mu_1}}{\sqrt{a}}\cos(\omega t + h) + o(\varepsilon).$$

Здесь μ_1, μ_2 – корни квадратного уравнения (18).

Циклы C_4, C_5 существуют, если $\gamma < 0, 2\alpha + 3\gamma > 0$. При всех значениях этих параметров они неустойчивы.

Обычно цикл C_0 называют однородным или АХЦ, а цикл C_4 – ПЦ. В свою очередь циклы C_1, C_2, C_4, C_5 будем называть асимметричными. Для асимметричных циклов характерны разные амплитуды для компонент $u_1(t,\varepsilon), u_2(t,\varepsilon)$.

Заключение

Задача о синхронизации автоколебаний двух связанных осцилляторов известна со времен Гюйгенса [13], который на эксперименте с двумя маятниками обнаружил, что даже два слабосвязанных осциллятора демонстрируют тенденцию к синхронизации. С тех пор эта задача стала достаточно популярной.

В работе рассмотрен один из наиболее известных вариантов задачи о синхронизации колебаний двух полностью идентичных и слабосвязанных осцилляторов Ван дер Поля. При этом рассмотрен вариант диффузионной связи. В целом эту задачу можно оценить как одну из наиболее известных в данном разделе теории колебаний. Достаточно простая постановка задачи должна предполагать и простой ответ. Совместные колебания должны происходить в синхронном режиме: либо полностью синхронные колебания (АХЦ в работе), либо противофазные колебания (ПЦ в работе).

Использование методов интегральных многообразий и НФ показали, что динамика даже такой простой автоколебательной системы может быть сложнее ожидаемой. В данном случае существуют асимметричные циклы, когда колебания каждой из двух частей системы происходит с амплитудой отличной от амплитуды другого осциллятора и реализуются циклы, которые естественно, назвать асимметричными.

Добавим также, что использование аппарата теории НФ Пуанкаре-Дюлака позволяет не только находить циклы, но и получать ответы об их устойчивости.

В заключение подчеркнем, что теория синхронизации автоколебаний имеет широкий спектр приложений. В первую очередь можно отметить механику и радиофизику. Вместе с тем с точки зрения теории синхронизации можно дать объяснение воздействия конкуренции на динамику макроэкономических процессов [14].

Список литературы

[1] Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956.

[2] Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.

[3] Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude responce of coupled oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1990. Vol. 41, № 5. Pp. 403–449.

[4] Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W. Hysteresis of syncronous-asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators // Physical Review A. 1991. Vol. 43, № 10. Pp. 5638–5641.

[5] Кузнецов А.П., Паксютов В.И. О динамике двух осцилляторов Ван дер Поля – Дюффинга с диссипативной связью // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 6. С. 48–64.

[6] Куликов Д.А. Автомодельные циклы и их локальные бифуркации в задаче о двух слабосвязанных осцилляторах // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, № 4. С. 543–559.

[7] Куликов Д.А. Периодические решения разностной аппроксимации уравнения Курамото-Цузуки // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 7. С. 992–994.

[8] Куликов Д.А. Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14, № 5. С. 120–132.

[9] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

[10] Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 303 с.

[11] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва, Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 560 с.

[12] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. Москва: Наука, 1967. 472 с.

[13] Huygens C. The pendulum clock, or, geometrical demonstrations concerning the motion of pendula as applied to clocks. Iowa: Iowa State University, 1986.

[14] Radin M.A., Kulikov A.N., Kulikov D.A. Synchronization of Fluctuations in the Interaction of Economies within the Framework of the Keynes's Business Cycle Model // Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences. 2021. Vol. 25, № 1. Pp. 93–111.

Образец цитирования

Баева О.В., Куликов Д.А. К вопросу о периодических решениях системы дифференциальных уравнений, описывающих колебания двух слабосвязанных осцилляторов Ван дер Поля // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. №4. С. 24–38. https://doi.org/10.26456/vtpmk648

Сведения об авторах

1. **Баева Ольга Владимировна**
доцент кафедры математики и информационных технологий управления Академии ФСИН России.

Россия, 390000, г. Рязань, улица Сенная, д. 1. E-mail: olga8682@mail.ru

2. **Куликов Дмитрий Анатольевич**
доцент кафедры дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Россия, 150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, ЯрГУ им. П.Г. Демидова. E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

ON THE QUESTION OF THE PERIODIC SOLUTIONS OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS DESCRIBING THE OSCILLATIONS OF TWO LOOSELY COUPLED VAN DER POL OSCILLATORS

Baeva Olga Vladimirovna
Associate Professor of the Department of Mathematics and Information Technology Management of the Academy of the Federal Penitentiary Service of Russia
Russia, 390000, Ryazan, 1 Sennaya str.
E-mail: olga8682@mail.ru

Kulikov Dmitrii Anatolievich
Docent of Differential Equation department, Demidov Yaroslavl State University
Russia, 150003, Yaroslavl, 14 Sovetskaya str.
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Received 17.10.2022, revised 08.11.2022.

We study a system of two weakly coupled completely identical van der Pol oscillators in the case of diffusion coupling. the question of the existence and stability of periodic solutions of the system under consideration. It is shown that it can have periodic solutions of three types, which generate Andronov-Hopf cycles, antiphase, and the third type of synchronization cycles: asymmetric cycles. The analysis of the problem used the Poincare-Dulac method of normal forms, as well as the method of integral manifolds.

Keywords: Van der Pol oscillator, synchronization of self-oscillations, normal form, stability, cycles, asymptotics of periodic solutions.

Citation

Baeva O.V., Kulikov D.A., “On the question of the periodic solutions of a system of differential equations describing the oscillations of two loosely coupled Van der Pol oscillators”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 4, 24–38 (in Russian).
https://doi.org/10.26456/vtpmk648

References

[1] Malkin I.G., *Nekotorye zadachi teorii nelinejnykh kolebanij [Some problems of the theory of nonlinear oscillations]*, GITTL, Moscow, 1956 (in Russian).

[2] Pikovskij A., Rozenblyum M., Kurtts Yu., *Sinkhronizatsiya: Fundamentalnoe nelinejnoe yavlenie [Synchronization: A fundamental nonlinear phenomenon]*, Tekhnosfera, Moscow, 2003 (in Russian), 496 pp.

[3] Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N., “Amplitude responce of coupled oscillators”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **41**:5 (1990), 403–449.

[4] Poliashenko M., McKay S.R., Smith C.W., "Hysteresis of syncronous-asynchronous regimes in a system of two coupled oscillators", *Physical Review A*, **43**:10 (1991), 5638–5641.

[5] Kuznetsov A.P., Paksyutov V.I., "On the dynamics of two Van der Pol – Duffing oscillators with dissipative coupling", *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **11**:6 (2003), 48–64 (in Russian).

[6] Kulikov D.A., "Self-similar cycles and their local bifurcations in the problem of two weakly coupled oscillators", *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, **74**:4 (2010), 543–559 (in Russian).

[7] Kulikov D.A., "Periodic solutions of the difference approximation of the Kuramoto-Tsuzuki equation", *Differentsialnye uravneniya [Differential equations]*, **43**:7 (2007), 992–994 (in Russian).

[8] Kulikov D.A., "Self-similar periodic solutions and bifurcations from them in the problem of the interaction of two weakly coupled oscillators", *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **14**:5 (2006), 120–132 (in Russian).

[9] Arnold V.I., *Dopolnitelnye glavy teorii obyknovennykh differentsialnykh uravnenij [Additional chapters of the theory of ordinary differential equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (in Russian), 304 pp.

[10] Bibikov Yu.N., *Kurs obyknovennykh differentsialnykh uravnenij [Course of ordinary differential equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1991 (in Russian), 303 pp.

[11] Gukenkhejmer Dzh., Kholms F., *Nelinejnye kolebaniya, dinamicheskie sistemy i bifurkatsii vektornykh polej [Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields]*, Institute of Computer Research, Moscow, Izhevsk, 2003 (in Russian), 560 pp.

[12] Demidovich B.P., *Lektsii po matematicheskoj teorii ustojchivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (in Russian), 472 pp.

[13] Huygens C., *The pendulum clock, or, geometrical demonstrations concerning the motion of pendula as applied to clocks*, Iowa State University, Iowa, 1986.

[14] Radin M.A., Kulikov A.N., Kulikov D.A., "Synchronization of Fluctuations in the Interaction of Economies within the Framework of the Keynes's Business Cycle Model", *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, **25**:1 (2021), 93–111.