УДК 517.95, 532.5

О ПОСТРОЕНИИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ПОДСТАНОВКИ ЛИНЯ

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 01.02.2023, после переработки 14.03.2023.

Описаны новые точные решения стационарной квазигидродинамической (КГД) системы, которые не удовлетворяют ни уравнениям Навье–Стокса, ни уравнениям Эйлера. С помощью подстановки Линя указанная КГД система свелась к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая была до конца проинтегрирована. При $c_s \to +\infty$, где c_s – скорость звука в жидкости, построенные решения стремятся к соответствующим точным решениям системы Навье–Стокса.

Ключевые слова: квазигидродинамическая система, система Навье–Стокса, точные решения, подстановка Линя.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 1. С. 36–48.
https://doi.org/10.26456/vtpmk657

Введение

Построению точных решений системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости посвящена обширная научная литература [1] – [7]. Альтернативная квазигидродинамическая (КГД) система, имеющая глубокие связи с указанной классической моделью, была предложена автором в 1993 году [8]. Теоретическому обоснованию подхода посвящены монографии [9], [10]. В статьях [11] – [18] разрабатывались методы построения точных решений КГД системы. Найденные решения в большинстве случаев удовлетворяли либо уравнениям Навье – Стокса, либо уравнениям Эйлера. Актуальной является задача поиска точных решений, специфических для системы КГД.

В настоящей работе описаны новые точные решения стационарной квазигидродинамической (КГД) системы, которые не удовлетворяют ни уравнениям Навье–Стокса, ни уравнениям Эйлера. С помощью подстановки Линя указанная КГД система свелась к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая была до конца проинтегрирована. При $c_s \to +\infty$, где c_s – скорость звука в жидкости, построенные решения стремятся к соответствующим точным решениям системы Навье–Стокса.

1. Квазигидродинамическая система и система Навье–Стокса

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних сил в стандартных обозначениях может быть представлена в виде

$$\operatorname{div}\,\vec{u} = \operatorname{div}\,\vec{w}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\vec{u} + \nabla p = \nu\Delta\vec{u} + \nu\nabla\big(\operatorname{div}\,\vec{u}\big) + \operatorname{div}\,(\vec{u}\otimes\vec{w}). \tag{1.2}$$

Вектор $\vec{w}$ вычисляется по формуле

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big). \tag{1.3}$$

Греческой буквой ν обозначен коэффициент кинематической вязкости жидкости, постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Символом Δ обозначен оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, действующий на векторное поле. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$ и давления $p = p(\vec{x},t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}, \tag{1.4}$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Параметры ν и τ являются положительными константами.

Если в (1.1) – (1.2) пренебречь членами, содержащими τ, то получим классическую систему Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div}\,\vec{u} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu\Delta\vec{u}. \tag{1.6}$$

Квазигидродинамическая система (1.1) – (1.2) в декартовых координатах для установившихся течений имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
&\big(u_x - w_x\big)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \big(u_y - w_y\big)\frac{\partial u_x}{\partial y} + \big(u_z - w_z\big)\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\
&= \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big) + \\
&\qquad + \frac{\partial(u_x w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y w_x)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z w_x)}{\partial z},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
&\big(u_x - w_x\big)\frac{\partial u_y}{\partial x} + \big(u_y - w_y\big)\frac{\partial u_y}{\partial y} + \big(u_z - w_z\big)\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \\
&= \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big) + \nu\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Big) +
\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial(u_x w_y)}{\partial x}+\frac{\partial(u_y w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(u_z w_y)}{\partial z}, \tag{1.9}$$

$$\big(u_x-w_x\big)\frac{\partial u_z}{\partial x}+\big(u_y-w_y\big)\frac{\partial u_z}{\partial y}+\big(u_z-w_z\big)\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}=$$

$$=\nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big)+\nu\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\Big)+$$

$$+\frac{\partial(u_x w_z)}{\partial x}+\frac{\partial(u_y w_z)}{\partial y}+\frac{\partial(u_z w_z)}{\partial z}. \tag{1.10}$$

Здесь

$$w_x=\tau\Big(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial x}\Big), \tag{1.11}$$

$$w_y=\tau\Big(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial y}\Big), \tag{1.12}$$

$$w_z=\tau\Big(u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}\Big). \tag{1.13}$$

Система (1.7) – (1.10) замкнута относительно неизвестных функций – компонент вектора скорости $u_x = u_x(x,y,z)$, $u_y = u_y(x,y,z)$, $u_z = u_z(x,y,z)$ и давления $p = p(x,y,z)$.

Стационарная система Навье–Стокса (1.4) – (1.5) в декартовых координатах записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0, \tag{1.14}$$

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial x}=\nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big), \tag{1.15}$$

$$u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial y}=\nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big), \tag{1.16}$$

$$u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}=\nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big). \tag{1.17}$$

2. Подстановка Линя

Для нахождения точных решений квазигидродинамической системы (1.6) – (1.9) применим (см. [19]) подстановку Линя

$$u_x=u(z),\quad u_y=v(z)+\frac{x}{L}v_1(z),\quad u_z=W=const>0,\quad p=p_0=const>0. \tag{2.1}$$

Здесь L – заданная положительная константа, имеющая размерность длины. Подставив функции (2.1) в выражения (1.11) – (1.13), находим

$$w_x=\tau W u'(z), \tag{2.2}$$

$$w_y = \tau\left(\frac{u(z)v_1(z)}{L} + W\Big(v'(z) + \frac{x}{L}v_1'(z)\Big)\right), \tag{2.3}$$

$$w_z = 0. \tag{2.4}$$

Нетрудно проверить, что для зависимостей (2.1) – (2.4) выполняются равенства

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, уравнение (1.7) удовлетворяется тождественно. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что равенство (1.10) также справедливо. Уравнение (1.8) преобразуется к виду

$$Wu'(z) = \nu u''(z) + \tau W^2 u''(z). \tag{2.7}$$

Принимая во внимание (1.4), запишем (2.7) следующим образом:

$$u''(z) = \frac{W}{\nu_*}u'(z). \tag{2.8}$$

Здесь

$$\nu_* = \nu\left(1 + \frac{W^2}{c_s^2}\right). \tag{2.9}$$

Подстановка (2.1) в (1.9) дает

$$\frac{u(z)v_1(z)}{L} - \frac{\tau W}{L}u'(z)v_1(z) + W\Big(v'(z) + \frac{x}{L}v_1'(z)\Big) =$$

$$= \nu\Big(v''(z) + \frac{x}{L}v_1''(z)\Big) + \frac{\tau W}{L}u(z)v_1'(z) +$$

$$+\tau W^2 v''(z) + \frac{\tau W}{L}\big(u(z)v_1(z)\big)' + x\frac{\tau W^2}{L}v_1''(z). \tag{2.10}$$

Приравнивая в (2.10) коэффициенты при x и свободные члены, получим

$$v_1''(z) = \frac{W}{\nu_*}v_1'(z), \tag{2.11}$$

$$v''(z) = \frac{W}{\nu_*}v'(z) + \varphi(z), \tag{2.12}$$

где

$$\varphi(z) = \frac{u(z)v_1(z)}{\nu_* L} - 2\frac{\tau W}{\nu_* L}u(z)v_1'(z) - 2\frac{\tau W}{\nu_* L}u'(z)v_1(z). \tag{2.13}$$

3. Решение проблемы интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Итак, задача свелась к системе трех дифференциальных уравнений

$$u''(z) = \frac{W}{\nu_*} u'(z), \tag{3.1}$$

$$v_1''(z) = \frac{W}{\nu_*} v_1'(z), \tag{3.2}$$

$$v''(z) = \frac{W}{\nu_*} v'(z) + \varphi(z), \tag{3.3}$$

содержащей три неизвестные функции $u(z)$, $v_1(z)$ и $v(z)$. Функция $\varphi(z)$ в правой части (3.3) определяется равенством (2.13).

Проинтегрируем уравнение (3.1). Обозначив

$$u'(z) = \widetilde{u}(z), \tag{3.4}$$

преобразуем его к виду

$$\widetilde{u}'(z) = \frac{W}{\nu_*} \widetilde{u}(z). \tag{3.5}$$

Общее решение (3.5) таково:

$$\widetilde{u}(z) = \widetilde{c}_1 \exp\Big(\frac{Wz}{\nu_*}\Big), \tag{3.6}$$

где $\widetilde{c}_1$ – произвольная постоянная. Из (3.4) находим

$$u(z) = \int \widetilde{u}(z) dz = \frac{\widetilde{c}_1 \nu_*}{W} \exp\Big(\frac{Wz}{\nu_*}\Big) + c_2 = c_1 \exp\Big(\frac{Wz}{\nu_*}\Big) + c_2. \tag{3.7}$$

Здесь и далее символами c_i и $\widetilde{c}_i$, где i – натуральное число, обозначены произвольные вещественные константы. Аналогично находим решение уравнения (3.2):

$$v_1(z) = c_3 \exp\Big(\frac{Wz}{\nu_*}\Big) + c_4. \tag{3.8}$$

Обозначив

$$v'(z) = \widetilde{v}(z), \tag{3.9}$$

запишем (3.3) следующим образом:

$$\widetilde{v}'(z) = \frac{W}{\nu_*} \widetilde{v} + \varphi(z). \tag{3.10}$$

Решение неоднородного уравнения (3.10) будем искать методом Лагранжа вариации постоянных:

$$\widetilde{v} = \widetilde{c}(z) \exp\Big(\frac{Wz}{\nu_*}\Big). \tag{3.11}$$

Подстановка (3.11) в (3.10) дает

$$\widetilde{c}'(z)\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)=\varphi(z). \tag{3.12}$$

Отсюда неизвестная функция

$$\widetilde{c}(z)=\int\varphi(z)\exp\Bigl(-\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)dz. \tag{3.13}$$

Принимая во внимание (3.9) и (3.11), находим

$$v(z)=\int\widetilde{c}(z)\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)dz. \tag{3.14}$$

Осталось последовательно вычислить интегралы (3.13) и (3.14):

$$\widetilde{c}(z)=\frac{1}{\nu_*L}\int\Bigl(u(z)v_1(z)-2\tau Wu(z)v_1'(z)-2\tau Wu'(z)v_1(z)\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)dz=$$

$$=\frac{1}{\nu_*L}\int\Bigl(\Bigl(c_1\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)+c_2\Bigr)\Bigl(c_3\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)+c_4\Bigr)-$$

$$-2\tau c_3\frac{W^2}{\nu_*}\Bigl(c_1\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)+c_2\Bigr)\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)-$$

$$-2\tau c_1\frac{W^2}{\nu_*}\Bigl(c_3\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)+c_4\Bigr)\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)dz=$$

$$=\frac{c_2c_4}{\nu_*L}\int\exp\Bigl(-\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)dz+\frac{1}{\nu_*L}\Bigl(1-2\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Bigr)\int(c_1c_4+c_2c_3)dz+$$

$$+\frac{c_1c_3}{\nu_*L}\Bigl(1-4\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Bigr)\int\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)dz=-\frac{c_2c_4}{WL}\exp\Bigl(-\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)+$$

$$+\frac{1}{\nu_*L}\Bigl(1-2\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Bigr)(c_1c_4+c_2c_3)z+\frac{c_1c_3}{WL}\Bigl(1-4\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Bigr)\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)+\widetilde{c}_5, \tag{3.15}$$

$$v(z)=-\frac{c_2c_4}{WL}z+\frac{1}{\nu_*L}\Bigl(1-2\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Bigr)(c_1c_4+c_2c_3)\int z\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)dz+$$

$$+\frac{c_1c_3}{WL}\Bigl(1-4\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Bigr)\int\exp\Bigl(\frac{2Wz}{\nu_*}\Bigr)dz+\widetilde{c}_5\int\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)dz+c_6. \tag{3.16}$$

Второй интеграл в правой части (3.16) найдем методом интегрирования по частям. Остальные интегралы являются табличными. Будем иметь

$$v(z)=-\frac{c_2c_4}{WL}z+\frac{1}{WL}\Bigl(1-2\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Bigr)(c_1c_4+c_2c_3)z\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)-$$

$$-\frac{\nu_*}{W^2L}\Bigl(1-2\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Bigr)(c_1c_4+c_2c_3)\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)+$$

$$+\frac{c_1c_3\nu_*}{2W^2L}\Bigl(1-4\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Bigr)\exp\Bigl(\frac{2Wz}{\nu_*}\Bigr)+\frac{\widetilde{c}_5\nu_*}{W}\exp\Bigl(\frac{Wz}{\nu_*}\Bigr)+c_6. \tag{3.17}$$

Эквивалентная запись (3.17) такова:

$$v(z)=\frac{1}{WL}\Big(1-2\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Big)(c_1c_4+c_2c_3)z\exp\Big(\frac{Wz}{\nu_*}\Big)+$$

$$+\frac{c_1c_3\nu_*}{2W^2L}\Big(1-4\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Big)\exp\Big(\frac{2Wz}{\nu_*}\Big)-\frac{c_2c_4}{WL}z+c_5\exp\Big(\frac{Wz}{\nu_*}\Big)+c_6, \qquad (3.18)$$

где

$$c_5=\frac{\widetilde{c}_5\nu_*}{W}-\frac{\nu_*}{W^2L}\Big(1-2\tau\frac{W^2}{\nu_*}\Big)(c_1c_4+c_2c_3)$$

– произвольная постоянная, имеющая размерность скорости.

Принимая во внимание выражение (1.4) для параметра τ, а также формулы (3.7), (3.8) и (3.18), запишем результат интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1) – (3.3) следующим образом:

$$u(z)=c_1\exp\Big(\frac{Wz}{\nu_*}\Big)+c_2, \qquad (3.19)$$

$$v_1(z)=c_3\exp\Big(\frac{Wz}{\nu_*}\Big)+c_4, \qquad (3.20)$$

$$v(z)=\frac{1}{WL}\Big(1-2\frac{\nu}{\nu_*}\frac{W^2}{c_s^2}\Big)(c_1c_4+c_2c_3)z\exp\Big(\frac{Wz}{\nu_*}\Big)+$$

$$+\frac{c_1c_3\nu_*}{2W^2L}\Big(1-4\frac{\nu}{\nu_*}\frac{W^2}{c_s^2}\Big)\exp\Big(\frac{2Wz}{\nu_*}\Big)-\frac{c_2c_4}{WL}z+c_5\exp\Big(\frac{Wz}{\nu_*}\Big)+c_6. \qquad (3.21)$$

Здесь c_i, $i=\overline{1,\ 6}$, есть произвольные константы, имеющие размерность скорости.

Подставив (3.19) – (3.21) в (2.1), получим точное решение квазигидродинамической системы (1.7) – (1.10). Если при этом поле скорости $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ не является постоянным, то указанный набор функций не будет точным решением системы Навье–Стокса (1.14) – (1.17). Соответствующее точное решение системы Навье–Стокса получается из $(\vec{u},p)$ предельным переходом при $c_s\to+\infty$. Немногочисленные примеры точных решений системы КГД, не удовлетворяющих ни уравнениям Навье–Стокса, ни уравнениям Эйлера, приведены в [9] на с. 106–107 и в [16].

Заключение

Таким образом, анзац Линя позволяет свести стационарную квазигидродинамическую систему к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является до конца аналитически интегрируемой. Найденное решение системы КГД в пределе при $c_s\to+\infty$ поточечно стремится к соответствующему точному решению системы Навье–Стокса. Полученный результат – еще одно свидетельство внутренней непротиворечивости и физической адекватности КГД модели. Дальнейшие исследования могут быть связаны с поиском новых точных решений КГД системы с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных [7]. Квазигидродинамические уравнения и их обобщения применялись для построения численных методов. Некоторые последние результаты представлены в [20] – [25].

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[3] Riley N., Drazin P.G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.

[4] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.

[5] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.

[6] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

[7] Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.

[8] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[9] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[10] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.

[11] Шеретов Ю.В. О общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5–15.

[12] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье-Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13–25. https://doi.org/10.26456/vtpmk176

[13] Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 84–96. https://doi.org/10.26456/vtpmk557

[14] Шеретов Ю.В. О классах точных решений квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 2. С. 5–17. https://doi.org/10.26456/vtpmk592

[15] Шеретов Ю.В. О построении точных решений двумерной квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. С. 5–20. https://doi.org/10.26456/vtpmk605

[16] Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих системам Навье–Стокса и Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. Т. 2. С. 5–15. https://doi.org/10.26456/vtpmk611

[17] Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О новом классе точных решений квазигидродинамической системы, порождаемых собственными функциями двумерного оператора Лапласа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 1. С. 5–17. https://doi.org/10.26456/vtpmk631

[18] Шеретов Ю.В. Принцип суперпозиции решений квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 2. С. 60–73. https://doi.org/10.26456/vtpmk638

[19] Harun M.H., Didane D.H., Sayed Abdelaal M.A., Zaman I., Manshoor B. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for nonlinear viscous flows by undetermined coefficient approach // Journal of Complex Flow. 2021. Vol. 3, № 2. Pp. 38–41.

[20] Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. ID 066. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66

[21] Balashov V.A., Zlotnik A.A. An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // Journal of Computational Dynamics. 2020. Vol. 7, № 2. Pp. 291–312. https://doi.org/10.3934/jcd.2020012

[22] Balashov V.A. Dissipative spatial discretization of a phase field model of multiphase multicomponent isothermal fluid flow // Computers and Mathematics with Applications. 2021. Vol. 90, № 112. ID 124. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.013

[23] Злотник А.А., Федченко А.С. О свойствах квазигазодинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 3. С. 346–360.

[24] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Регуляризованная модель типа фазового поля для описания динамики системы «жидкость-твердое тело» с учетом химических реакций. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. 20 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-82

[25] Kraposhin M.V., Ryazanov D.A. Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // Computer Physics Communications. 2022. Vol. 271, № 1. ID 108216. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. О построении точных решений стационарной квазигидродинамической системы с помощью подстановки Линя // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2023. № 1. С. 36–48. https://doi.org/10.26456/vtpmk657

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON CONSTRUCTION OF EXACT SOLUTIONS OF STATIONARY QUASI-HYDRODYNAMIC SYSTEM USING LIN'S SUBSTITUTION

Sheretov Yu.V.
Tver State University, Tver

Received 01.02.2023, revised 14.03.2023.

New exact solutions of stationary quasi-hydrodynamic (QHD) system that do not satisfy either the Navier–Stokes equations or the Euler equations are described. With the help of Lin's substitution, the indicated QHD system was reduced to the system of ordinary differential equations, which was fully integrated. For $c_s \to +\infty$, where c_s is the sound velocity in the liquid, the constructed solutions tend to the corresponding exact solutions of the Navier–Stokes system.

Keywords: Quasi-Hydrodynamic system, Navier–Stokes system, exact solutions, Lin's substitution.

Citation

Sheretov Yu.V., "On construction of exact solutions of stationary quasi-hydrodynamic system using Lin's substitution", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2023, № 1, 36–48 (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk657

References

[1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.

[2] Landau L.D., Lifshits E.M., *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 736 pp.

[3] Riley N., Drazin P.G., *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 pp.

[4] Shmyglevskij Yu.D., *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti [Analytical Investigations of Gas and Fluid Dynamics]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 1999 (in Russian), 232 pp.

[5] Pukhnachev V.V., "Symmetries in the Navier-Stokes equations", *Uspekhi mekhaniki [Achievements in Mechanics]*, 2006, № 1, 6–76 (in Russian).

[6] Wang C.Y., "Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations", *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.

[7] Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D., "Exact solutions of the Navier-Stokes equations with linear dependence of the velocity components on two spatial variables", *Teoreticheskie osnovy khimicheskoj tekhnologii [Theoretical foundations of chemical technology]*, **43**:5 (2009), 547–566 (in Russian).

[8] Sheretov Yu.V., "On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type", *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).

[9] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.

[10] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.

[11] Sheretov Yu.V., "On the common exact solutions of stationary Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems, not satisfying to Euler equations", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 2, 5–15 (in Russian).

[12] Sheretov Yu.V., "On common exact solutions of Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems for nonstationary flows", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 13–25 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk176.

[13] Sheretov Yu.V., "On the solutions of Cauchy problem for quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 1, 84–96 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk557.

[14] Sheretov Yu.V., "On classes of exact solutions of quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 2, 5–17 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk592.

[15] Sheretov Yu.V., "On the construction of exact solutions of two-dimensional quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 1, 5–20 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk605.

[16] Grigoreva V.V., Sheretov Yu.V., "On exact solutions of quasi-hydrodynamic system that don't satisfy the Navier-Stokes and Euler systems", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, **2** (2021), 5–15 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk611.

[17] Grigoreva V.V., Sheretov Yu.V., "a new class of exact solutions of Quasi-Hydrodynamic system, generated by eigenfunctions of two-dimensional Laplace operator", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 1, 5–17 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk631.

[18] Sheretov Yu.V., "Superposition principle for solutions of quasi-hydrodynamic system", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2022, № 2, 60–73 (in Russian), https://doi.org/10.26456/vtpmk638.

[19] Harun M.H., Didane D.H., Sayed Abdelaal M.A., Zaman I., Manshoor B., "Exact solutions to the Navier–Stokes equations for nonlinear viscous flows by undetermined coefficient approach", *Journal of Complex Flow*, **3**:2 (2021), 38–41.

[20] Stenina T.V., Elizarova T.G., Kraposhin M.V., "Regularized equations for disk pump simulation problems in OpenFOAM implementation", *Keldysh Institute preprints*, 2020, 066 (in Russian), 30 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66.

[21] Balashov V.A., Zlotnik A.A., "An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations", *Journal of Computational Dynamics*, **7**:2 (2020), 291–312, https://doi.org/10.3934/jcd.2020012.

[22] Balashov V.A., "Dissipative spatial discretization of a phase field model of multiphase multicomponent isothermal fluid flow", *Computers and Mathematics with Applications*, **90**:112 (2021), 124, https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.013.

[23] Zlotnik A.A., Fedchenko A.S., "On the properties of a quasi-gas dynamic system of equations of a homogeneous gas mixture with a common regularizing velocity", *Differentsialnye uravneniya [Differential equations]*, **58**:3 (2022), 346–360 (in Russian).

[24] Balashov V.A., Savenkov E.B., *Regularized phase-field model for description of dynamics of "solid-fluid" system taking into account chemical reactions*, Keldysh Institute of Applied Mathematics Preprints, 2020 (in Russian), 29 pp., https://doi.org/10.20948/prepr-2021-82.

[25] Kraposhin M.V., Ryazanov D.A. Elizarova T.G., "Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM", *Computer Physics Communications*, **271**:1 (2022), 108216, https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216.

Author Info

1. **Sheretov Yurii Vladimirovich**
   Head of Mathematical Analysis Department, Tver State University.

   Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TverSU.
   E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru